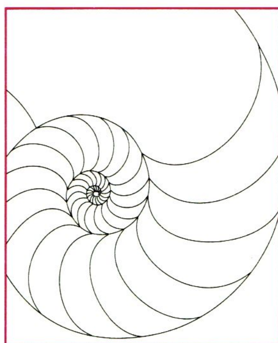
Kelionės į Šiuolaikinę Matematiką





Peteris Tannenbaumas / Robertas Arnoldas

Kelionės į ŠIUOLAIKINĘ MATEMATIKĄ



Peteris Tannenbaumas
Robertas Arnoldas

TEV

Vilnius * 1995



Knyga išleista Atviros Lietuvos fondui parėmus

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti

Darbo vadovas: *E. Žalys*

Vertimo vadovas: *S. Norvaišas*

Vertėjai ir vertimo redaktoriai:
R. Bajarūnienė, A. Burnienė,
V. Būda, R. Kašuba, V. Mackevičius,
J. Mačys (ats. redaktorius)

Kalbos redaktorė: *D. Tarvydaitė*

Programinė įranga: *T. Šeibak*

Kompiuterinė grafika:
A. Kazbaras (vadovas), *H. Pragarauskas,*
A. Stočkus, D. Valentinavičienė

Gamybos vadovas: *A. Paškevičius*

Korektorės: *N. Kolpigina, B. Laurinskienė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas:
I. Čiplytė, I. Talandienė,
N. Pragarauskienė, A. Žalienė

Techninė asistentė: *I. Muzikevičiūtė*

EXCURSIONS IN MODERN MATHEMATICS
Peter Tannenbaum, Robert Arnold

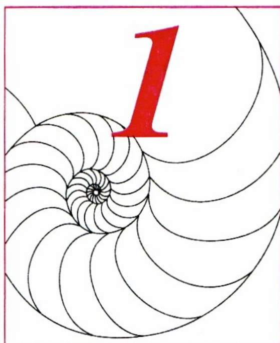
Original English language edition published

KELIONĖS Į ŠIUOLAIKINĘ MATEMATIKĄ
Peteris Tannenbaumas, Robertas Arnoldas

ISBN 9986-546-01-X

SL 1185. 1995 03 01.
33 sp. l. su įklija 0,5 sp. l.
Tiražas 7000 egz. Užsakymas Nr. 76.
Išleido leidykla TEV,
Akademijos 4, 2060 Vilnius
Spausdino spaustuvė „Viltis“,
Viršuliškių skg. 80, 2056 Vilnius

I DALIS ▪ SOCIALINIŲ SPRENDIMŲ MATEMATIKA ▪



Balsavimas

Demokratija yra pati blogiausia valdymo forma – tiesa, visos kitos išbandytos formos buvo dar blogesnės.

V. ČERČILIS
(WINSTON CHURCHILL)

Demokratijos paradoksai

Kartais išgirstame, kad negalima aklai pasitikėti balsavimo teise – viena iš pagrindinių demokratijos dogmų. Demokratinėje visuomenėje sprendimai priimami balsavimu, o **balsavimo teorija** būtent ir nagrinėja taisykles, kaip iš daugybės dažnai prieštaringų nuomonių išrinkti vieną. Tačiau kam reikalinga visa teorija? Dalykas, atrodytų, labai paprastas: juk turėtų būti lengvai suprantamas, universalus būdas, kaip demokratinėje visuomenėje priimti grupinius sprendimus remiantis tam tikrais *skaičiais*. Tada matematika, turėdama gausybę įvairių metodų ir priemonių, padėtų mums rasti teisingą atsakymą.

Matematika iš tiesų duoda atsakymą, tačiau jis gana netikėtas ir anaiptol nėra paprastas: *nėra metodo, kuriuo iš kelių (trijų ir daugiau) alternatyvų būtų galima demokratiškai išsirinkti geriausią*. Šis nuostabus faktas, atskleistas matematiko ir ekonomisto K. Erou (Kenneth Arrow) 1952 metais, žinomas

kaip **Erou negalimumo teorema**. 1972 metais K. Erou gavo Nobelio premiją ekonomikos srityje už matematinės socialinių sprendimų teorijos darbus.

Šio skyriaus tikslas ir yra išsiaiškinti Erou negalimumo teoremos esmę ir kartu išnagrinėti keletą gerai žinomų balsavimo metodų.

Toliau šiame skyriuje remsimės tokiu iš pirmo žvilgsnio apgaulingai paprastu pavyzdžiu.

MMK prezidento rinkimai. Rinkimuose turi būti išrinktas Matematikos mėgėjų klubo (MMK) prezidentas. Iš viso yra keturi kandidatai: Algis, Birutė, Celestinas ir Dovilė (trumpiau A, B, C ir D). Kiekvienas iš 37 klubo narių balsavimo biuletenyje turi surašyti kandidatus jų vertinimo tvarka (biuletenyje lygiosios neleidžiamos: pildant biuletenį, negalima dviem kandidatams suteikti tos pačios vietos). Visi užpildyti biuleteniai parodyti 1.1 pav. Kas turėtų tapti prezidentu? Kodėl?

1.1 pav.

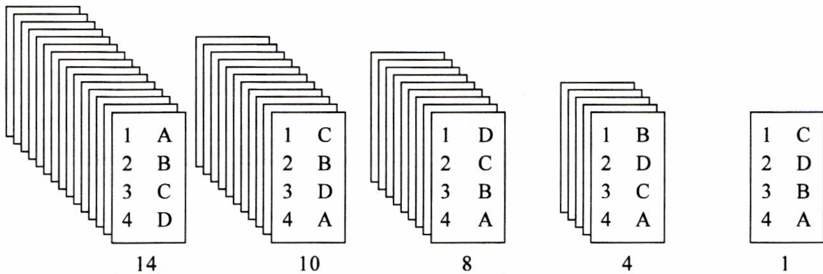
1 A	1 B	1 A	1 C	1 B	1 C	1 A	1 D	1 A	1 A
2 B	2 D	2 B	2 B	2 D	2 B	2 B	2 C	2 B	2 B
3 C	3 C	3 C	3 D	3 C	3 D	3 C	3 B	3 C	3 C
4 D	4 A	4 D	4 A	4 A	4 A	4 D	4 A	4 D	4 D
1 C	1 A	1 C	1 D	1 C	1 A	1 D	1 D	1 C	1 C
2 B	2 B	2 B	2 C	2 B	2 B	2 C	2 C	2 B	2 B
3 D	3 C	3 D	3 B	3 D	3 C	3 B	3 B	3 D	3 D
4 A	4 D	4 A	4 A	4 A	4 D	4 A	4 A	4 A	4 A
1 A	1 B	1 C	1 C	1 D	1 A	1 D	1 C	1 A	1 D
2 B	2 D	2 B	2 B	2 C	2 B	2 C	2 B	2 B	2 C
3 C	3 C	3 D	3 D	3 B	3 C	3 B	3 D	3 C	3 B
4 D	4 A	4 A	4 A	4 A	4 D	4 A	4 A	4 D	4 A
1 B	1 A	1 C	1 A	1 A	1 D	1 A			
2 D	2 B	2 D	2 B	2 B	2 C	2 B			
3 C	3 C	3 B	3 C	3 C	3 B	3 C			
4 A	4 D	4 A	4 D	4 D	4 A	4 D			

PRIORITETINIS BALSAVIMAS IR VERTINIMŲ LENTELĖ

Tokie biuleteniai, kai kiekvienas rinkėjas turi išrikiuoti visus kandidatus vertinimo tvarka (kaip parodyta 1.1 pav.), vadinami **vertinimų** (prioritetų) **biuleteniais**, o pats balsavimas – **prioritetiniu balsavimu**. Peržiūrėję visus 1.1 pav. pavaizduotus 37 biuletenius, matome, jog kai kurie rinkėjai kandidatus išdėstė vienoda tvarka. Tai dar geriau matyti, balsavimo rezultatus susumavus

1.2 pav. parodytu būdu arba užpildžius žemiau pavaizduotą lentelę, vadinamą vertinimų lentele.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*D*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	*D*	*D*
3 vieta	*C*	*D*	*B*	*C*	*B*
4 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*	*A*



1.2 pav.

Pastaba. Pirmas dalykas, kuris ateina mums į galvą, kai kalbame apie balsavimą, yra politiniai rinkimai. Juose mes dažniausiai turime rinktis kurį nors vieną kandidatą, o ne užpildyti vertinimų biuletenį. Todėl prioritetinis balsavimas kai kam atrodo neįprastas ir neatitinkantis tikrovės. Bet tai toli gražu ne taip. Visų pirma, kuriant teoriją, reikia aprėpti pačius bendriausius atvejus: juk be politinių, pasaulyje vyksta daugybė kitokių rinkimų, kurie remiasi prioritetiniu balsavimu – tai grožio konkursai, premijų skirstymas, naujų darbuotojų atranka ir pan. Visi jie, bent jau teoriškai, yra vienodai svarbūs. Kita vertus, net kai mūsų prašo nurodyti vienintelę alternatyvą, mes beveik visada (sąmoningai ar ne) surikiuojame visas ar dalį alternatyvų į eilę. (Jeigu dėl kokių nors priežasčių mūsų pirmoji alternatyva pasidaro negalima, dažniausiai mes iš karto žinome, kokia bus mūsų nauja alternatyva.)

Kelios esminės prielaidos

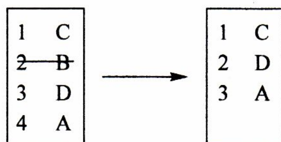
Prieš nustatant MMK prezidento rinkimų nugalėtoją, mums reikia susipažinti su keletu svarbių prielaidų apie rinkėjų asmeninius vertinimus. Viena iš jų yra vertinimų **tranzityvumas**. Tai reiškia, kad jei kuris nors rinkėjas geriau vertina kandidatą X nei kandidatą Y, o Y geriau nei Z, tai tas pats rinkėjas kandidatą X turėtų vertinti geriau nei kandidatą Z. Balsuojant vertinimo biuleteniais, taip yra visada: 1.3 pav. pavaizduotame biuletenyje rinkėjas ne tik C vertina geriau už B, B geriau už D ir D geriau už A, bet ir C vertina geriau už D, C už A ir B už A.

1	C
2	B
3	D
4	A

1.3 pav.

Kita svarbi prielaida yra vertinimų **pastovumas**. Tai reiškia, kad rinkėjo vertinimas turi nesikeisti, jei iš kandidatų sąrašo bus išbrauktas vienas ar keli

kandidatai. Kaip pavyzdį vėl nagrinėkime 1.3 pav. parodytą vertinimų biuletenį. Tarkime, jog dėl kažkokių priežasčių kandidatas *B* iškrenta iš varžybų. Tuomet natūralu tikėtis, kad rinkėjo likusių kandidatų vertinimas nepasikeis: net jeigu jam tektų pildyti naują biuletenį, jis ir toliau *C* vertins labiau už *D*, o *D* labiau už *A*.



1.4 pav.

Kartais šių prielaidų nesilaikoma*, tačiau tokie atvejai greičiau yra išimtis. Natūralu laikyti, kad bet kokioje balsavimo sistemoje, kur rinkėjai veikia *protingai*, tų dviejų prielaidų yra paisoma. Todėl iki pat skyriaus pabaigos jomis neabejosime.

DAUGUMOS METODAS

Vienas iš žinomiausių ir lengvai suprantamų balsavimo rezultatų apdorojimo būdų yra daugumos metodas: laimi kandidatas, surinkęs *daugiausiai* pirmųjų vietų. Tada MMK rinkimų rezultatai būtų tokie:

A: 14 pirmų vietų;

B: 4 pirmos vietos;

C: 11 pirmų vietų;

D: 8 pirmos vietos.

Kadangi daugiausiai rinkėjų pirmąjį nurodė Algį, tai jis ir yra nugalėtojas!

Daugumos metodas labai dažnai naudojamas, nes jis labai paprastas; be to, šis metodas natūraliai apibendrina **didžiumos taisyklę**: bet kokiuose demokratiniuose rinkimuose, kuriuose dalyvauja du kandidatai, laimi tas, kuris surenka didžiumą (t.y. daugiau kaip pusę) balsų. Deja, didžiumos taisyklė ne visada gali būti taikoma, kai yra daugiau nei du kandidatai. MMK rinkimuose dalyvauja 37 rinkėjai. Didžiumai surinkti reikia bent jau 19 pirmosios vietos balsų, bet nei vienas kandidatas jų tiek nesurinko. Žinoma, jei kuris nors kandidatas būtų gavęs 19 ar daugiau pirmų vietų, tai jis akivaizdžiai turėtų tapti nugalėtoju pagal daugumos metodą, nes nė vienas kitas kandidatas negalėtų surinkti dar daugiau balsų. Balsavimo teorijoje sakoma, kad daugumos metodas tenkina **didžiumos kriterijų**.

* Žr. pavyzdį šio skyriaus 2 priede apie 1996 metų Vasaros Olimpiados sostinės rinkimus, kai buvo išrinktas Atlantos miestas (JAV).

Didžiumos kriterijus. Jeigu yra kandidatas, kuris labiausiai vertinamas didžiumos rinkėjų, tai šis kandidatas turi būti rinkimų nugalėtojas.

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad didžiumos kriterijus yra visiškai logiškas ir neprieštarauja demokratijos sampratai, todėl mes linkę juo neabejoti. Tačiau, kad ir kaip tai būtų keista, netrukus įsitikinsime, jog yra keletas paplitusių metodų, kur kandidatas, kad ir turėdamas didžiumą pirmųjų vietų, gali pralaimėti rinkimus.

Daugumos metodo trūkumai

Nepaisant to, kad daugumos metodu plačiai naudojamasi, jis turi keletą esminių trūkumų, todėl apskritai laikomas labai prastu metodu, kai reikia nustatyti nugalėtoją rinkimuose iš daugiau kaip dviejų kandidatų. Principinis daugumos metodo trūkumas – nustatant nugalėtoją, imami domėn tik aukščiausi vertinimai (pirmųjų vietų skaičius) ir neatsižvelgiama į kitus vertinimus. Iš tiesų, jei pažvelgsime į MMK rinkimų vertinimų lentelę, įsitikinsime, jog didžiuma rinkėjų (tiksliau, 23) anaiptol nenorėtų, kad Algis būtų išrinktas MMK prezidentu, ir nurodo jį paskutinį.

Kad geriau suprastume, kaip daugumos metodu kartais galima gauti labai blogus rezultatus, išnagrinėkime pavyzdį.

1 pavyzdys. Balsavimu, kuriame dalyvauja šimtas vidurinės mokyklos vyresniųjų klasių moksleivių, reikia nuspręsti, kur vykti moksleivių atostogų metu. Alternatyvos yra tokios: Budapeštas, Talinas, Praha, Ryga ir Varšuva. Balsavimo rezultatai parodyti vertinimų lentelėje:

Balsavusiųjų skaičius	49	48	3
1 vieta	*B*	*P*	*T*
2 vieta	*P*	*V*	*P*
3 vieta	*T*	*R*	*V*
4 vieta	*R*	*T*	*R*
5 vieta	*V*	*B*	*B*

Daugumos metodu išrenkamas Budapeštas, nors didžiuma moksleivių (51) parašė jį *paskutinėje* vietoje, tuo tarpu Prahą pirmąją nurodė 48 rinkėjai (vos vienu mažiau negu Budapeštą), o antrąją – 52 rinkėjai. Gana aišku, kad moksleiviai labiau pageidauja vykti į Prahą nei į Budapeštą. Galima pateikti ir dar vieną įtikinamą argumentą kelionės į Prahą naudai: jeigu Prahą lygintume vieną prieš vieną su bet kuriuo kitu miestu, Praha visada gautų didžiumą balsų. Palyginkime, pavyzdžiui, Prahą ir Budapeštą: Praha gavo 51 balsą (48 balsai iš antro stulpelio plius 3 balsai iš paskutinio stulpelio), o Budapeštas – 49 balsus. Jei palyginsime Prahą ir Taliną, gausime 97 balsus už Prahą

(pirmas ir antras stulpeliai) ir tik 3 balsus už Taliną. Ir pagaliau kelionę į Prahą visi 100 moksleivių vertina labiau nei kelionę į Rygą ar Varšuvą.

Visa tai galima glaustai išreikšti taip: nors alternatyva P, lyginant vieną prieš vieną, nugali bet kurią kitą alternatyvą, tačiau daugumos metodu ji nelaimi. Balsavimo teorijoje sakoma, kad daugumos metodas pažeidžia labai svarbų teisingumo principą, vadinamą **Kondorsė* kriterijumi**.

Kondorsė kriterijus. Jeigu kandidatas, lyginant vieną prieš vieną, nugali bet kurį kitą kandidatą, tai jis turi laimėti rinkimus.

Tęsdami šią temą, pasakysime keletą žodžių apie tai, kaip reikia suprasti ką tik pavartotas sąvokas. Kai sakome, jog daugumos metodas *pažeidžia Kondorsė kriterijų*, mes turime galvoje, kad yra situacijų, kai kandidatas, lyginant vieną prieš vieną, nugali bet kurį kitą kandidatą, tačiau, taikant daugumos metodą, jis netampa nugalėtoju. Nebūtinai taip atsitinka kiekvienuose rinkimuose – kriterijus pažeidžiamas, jei mes žinome nors vieną tokį atvejį (kaip tat atsitiko balsuojant, kur vykti moksleivių atostogų metu). Palyginkite: kad jus apkaltintų pažeidus saugaus eismo taisykles, visai nebūtina nuolat viršyti leistiną greitį – užtenka tai padaryti tik vieną kartą.

Dar apie sąvokas: kandidatas, kuris rinkėjų labiau vertinamas, lyginant vieną prieš vieną, už bet kurį kitą kandidatą, yra vadinamas **Kondorsė nugalėtoju**. Remiantis šia sąvoka, Kondorsė kriterijus formuluojamas labai paprastai: rinkimus turi laimėti Kondorsė nugalėtojas.

Greit vėl grįšime prie kandidatų lyginimo vienas prieš vieną. O baigdami šią dalį, aptarsime dar vieną daugumos metodo silpną vietą – vadinamąjį rinkėjų **nenuoširdumą**, arba **strateginį balsavimą**. Vėl nagrinėkime 1 pavyzdį ir pažvelkime į vertinimų lentelės paskutinį stulpelį, kuriame pateikti trijų moksleivių – Jono, Petro ir Simo – vertinimai. Tarkime, jog jie neblogai nujaučia, kaip kiekvienas ruošiasi balsuoti, ir žino, kad daugumos metodu nugalės Budapeštas (o to jie labai nenori). Kadangi jie žino, kad miestas, kurį jie labiausiai norėtų pamatyti (Talinas), tikrai neturi šansų laimėti, jų taktika yra aiški: nurodyti Prahą savo kortelėse pirmąją (nors ten jie irgi nenori keliauti), ir tuo Budapeštą pašalinti iš nugalėtojų.

Taigi, nenuoširdžiai balsuodami, rinkėjai turi galimybę manipuliuoti balsavimo rezultatais. Tai nepageidautinas, tačiau daugeliui balsavimo metodų

* M. Kondorsė (Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet, 1743–1794) – prancūzų aristokratas, matematikas, filosofas, ekonomistas ir visuomenės reiškinių tyrinėtojas. Jis priklausė liberalių pažiūrų mąstytojų grupei (enciklopedistai), ir jo idėjos buvo labai reikšmingos Didžiajai Prancūzijos revoliucijai. Deja, dėl savo nepriklausomo charakterio jis nuolat patekdavo į nemalonę ir gyvenimą baigė kalėjime.

būdingas bruožas. Renkant nugalėtoją daugumos metodu, nenuoširdus balsavimas turi ypač didelę įtaką rezultatams. Kaip pavyzdį galima pateikti 1992 metų Lietuvos Seimo rinkimus, kai iš 17 rinkimuose dalyvavusių partijų ir rinkiminių koalicijų tik 4 didžiausios, gerai žinomos partijos surinko reikiamą balsų skaičių. Dažnas rinkėjas simpatizuoja mažos partijos kandidatui, bet mano, kad jo balsas nieko nenulems (ta partija vis vien nesurinks reikiamo balsų skaičiaus), todėl jis (nenuoširdžiai) balsuoja už kurią nors kitą, stipresnę partiją.

TAŠKŲ METODAS

Nustatant nugalėtoją **taškų metodu***, kiekvienai biuletenyje nurodytai vietai skiriami taškai. Rinkimuose iš N kandidatų 1 taškas duodamas už paskutinę vietą, 2 – už priešpaskutinę, ... ir N taškų – už pirmąją vietą. Kiekvieno kandidato taškai susumuojami, ir, surinkęs daugiausiai taškų, tampa nugalėtoju.

Dabar nustatykime MMK rinkimų nugalėtoją taškų metodu. Surašę taškus vertinimų lentelėje, gauname:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta: 4 taškai	*A*: 56 taškai	*C*: 40 taškų	*D*: 32 taškai	*B*: 16 taškų	*C*: 4 taškai
2 vieta: 3 taškai	*B*: 42 taškai	*B*: 30 taškų	*C*: 24 taškai	*D*: 12 taškų	*D*: 3 taškai
3 vieta: 2 taškai	*C*: 28 taškai	*D*: 20 taškų	*B*: 16 taškų	*C*: 8 taškai	*B*: 2 taškai
4 vieta: 1 taškas	*D*: 14 taškų	*A*: 10 taškų	*A*: 8 taškai	*A*: 4 taškai	*A*: 1 taškas

Todėl
A surinko $56 + 10 + 8 + 4 + 1 = 79$ taškus;
B surinko $42 + 30 + 16 + 16 + 2 = 106$ taškus;
C surinko $28 + 40 + 24 + 8 + 4 = 104$ taškus;
D surinko $14 + 20 + 32 + 12 + 3 = 81$ taškus.

Matome, kad šiuos rinkimus taškų metodu laimėjo Birutė! Tai nėra labai maloni naujiena Algiui, kuris nugalėjo rinkimuose, kai duomenys buvo skaičiuojami daugumos metodu.

MATEMATIKOS MĖGĖJŲ KLUBO RINKIMŲ REZULTATAI

Nugalėtojas	Balsavimo metodas
Algis	Daugumos
Birutė	Taškų

* Šį metodą pasiūlė prancūzas Borda (Jean-Charles de Borda, 1733–1799). Borda buvo kariškis – kavalerijos karininkas ir jūrų laivyno kapitonas; jis rašė straipsnius iš tokių skirtingų sričių, kaip matematika, fizika, moksliniai tyrimo metodai ir balsavimų teorija.

Taškų metodo trūkumai

Didžiausias taškų metodo trūkumas – jis dažnai prieštarauja didžiumos kriterijui. 2 pavyzdys rodo, kaip kandidatas, gavęs didžiumą pirmųjų vietų, gali pralaimėti rinkimus, kai rezultatai apdorojami taškų metodu.

2 pavyzdys. Panagrinėkime rinkimus, kuriuose dalyvauja keturi kandidatai (A, B, C ir D) ir 11 rinkėjų. Vertinimų lentelė atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	6	2	3
1 vieta: 4 taškai	A	B	C
2 vieta: 3 taškai	B	C	D
3 vieta: 2 taškai	C	D	B
4 vieta: 1 taškai	D	A	A

Nustatykime nugalėtoją taškų metodu:
A gauna $6 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 29$ taškus;
B gauna $6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 32$ taškus;
C gauna $6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 30$ taškų;
D gauna $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$ taškų.

Šiuose rinkimuose B gauna daugiausiai taškų, todėl, skaičiuojant taškų metodu, jis nugali, nors A turi didžiumą (daugiau kaip pusę) pirmųjų vietų. Balsavimo teorijoje sakoma, kad *taškų metodas pažeidžia didžiumos kriterijų*.

Kita taškų metodo silpna vieta yra tiesioginė ankstesnio trūkumo išdava: jis taip pat netenkina ir Kondorsė kriterijaus. Kadangi A turi didžiumą pirmųjų vietų, tai jis yra Kondorsė nugalėtojas (labiau vertinamas, lyginant vieną prieš vieną su bet kuriuo kitu kandidatu), todėl turėtų laimėti rinkimus (žr. 39 pratimą).

Nepaisant šių trūkumų, taškų metodas yra plačiai naudojamas ir daugeliu atvejų laikomas neblogu nugalėtojo nustatymo metodu. Priešingai nei naudojant daugumos metodą, čia atsižvelgiama į *visą* rinkėjų pateikiamą informaciją, todėl galima pasakyti, kad geriausias kandidatas išrenkamas kompromisiškai.

Nustatant nugalėtoją taškų metodu, taškus už vietas galima duoti ir taip: 0 taškų už paskutinę vietą, 1 tašką už priešpaskutinę vietą, 2 taškus už trečią nuo galo vietą ir t.t. Pasirodo (žr. 35 pratimą), kad toks taškų skyrimas nekeičia rinkimų rezultatų, bet supaprastina duomenų apdorojimą.

Kartais rinkimuose naudojamas paprastesnis taškų metodas. Pavyzdžiui, Lietuvos krepšinio lygos naudingiausio žaidėjo rinkimuose dalyvauja visų lygos komandų treneriai ir apie 50 sporto žurnalistų. Jie balsavimo kortelėse nurodo tik pirmą, antrą ir trečią vietas (3 taškai skiriami už pirmą, 2 taškai už antrą ir 1 taškas už trečią vietą). Prizą laimi kandidatas, surinkęs daugiausiai

taškų. Galima pasakyti, kad tai yra taškų metodo modifikacija, kai taškai už vietas yra duodami taip: 3, 2, 1, 0, 0, 0, ...

ELIMINAVIMO METODAS

Tai patobulintas daugumos metodo variantas. Skaičiuojama keliais etapais, naudojant tokią procedūrą:

- **1 etapas**. Suskaičiuojamos kiekvieno kandidato pirmosios vietos, kaip ir taikant daugumos metodą. Jeigu kuris nors kandidatas turi pirmųjų vietų didžiumą (daugiau kaip pusę), tai jis iš karto skelbiamas nugalėtoju. Jei nė vienas kandidatas neturi pirmųjų vietų didžiumos, vertinimų lentelėje išbraukiamas kandidatas, gavęs mažiausiai pirmųjų vietų (o jei vienodą mažiausią pirmųjų vietų skaičių gavo keli kandidatai, tai išbraukiami jie visi).
- **2 etapas**. Atmetus kandidatą (kandidatus), surinkusį (surinkusius) mažiausiai pirmųjų vietų, vėl perskaičiuojami pirmųjų vietų balsai. Jei kuris nors kandidatas turi didžiumą pirmųjų vietų, jis skelbiamas nugalėtoju. Priešingu atveju išbraukiamas kandidatas (kandidatai), gavęs (gavę) mažiausiai pirmųjų vietų.
- **3, 4 ir t.t. etapai**. Kartojama ta pati procedūra ir kiekvieną kartą atmetamas vienas ar daugiau kandidatų. Paskutiniame etape išaiškėja kandidatas, gavęs didžiumą pirmųjų vietų, arba keli kandidatai, gavę vienodai pirmųjų vietų.

Pabandykime eliminavimo metodu nustatyti MMK prezidento rinkimų nugalėtoją.

- **1 etapas**.

  A: 14 pirmųjų vietų;
  B: 4 pirmosios vietos;
  C: 11 pirmųjų vietų;
  D: 8 pirmosios vietos.

Birutė turi mažiausiai pirmųjų vietų ir todėl išbraukiama iš kandidatų sąrašo.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	A	C	D	(B)	C
2 vieta	(B)	(B)	C	D	D
3 vieta	C	D	(B)	C	(B)
4 vieta	D	A	A	A	A

Vertinimų lentelė (jau be Birutės) dabar atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*D*	*D*	*C*
2 vieta	*C*	*D*	*C*	*C*	*D*
3 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*	*A*

Lentelė sutraukiama, sujungus vienodus stulpelius:

Balsavusiųjų skaičius	14	11	12
1 vieta	*A*	*C*	*D*
2 vieta	*C*	*D*	*C*
3 vieta	*D*	*A*	*A*

- **2 etapas**.
  A: 14 pirmųjų vietų;
  C: 11 pirmųjų vietų;
  D: 12 pirmųjų vietų.

Atmetamas Celestinas.

Balsavusiųjų skaičius	14	11	12
1 vieta	*A*	(*C*)	*D*
2 vieta	(*C*)	*D*	(*C*)
3 vieta	*D*	*A*	*A*

Ši vertinimų lentelė sutraukus atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	14	23
1 vieta	*A*	*D*
2 vieta	*D*	*A*

- **3 etapas**.
  A: 14 pirmųjų vietų;
  D: 23 pirmosios vietos.

Šiame etape Dovilė turi didžiumą balsų, todėl ji skelbiama rinkimų nugalėtoja.

Taigi tie, kas mėgsta gauti aiškius atsakymus į paprastus klausimus, gali nusivilti, supratę, kad klausimas „Kas yra tikrasis MMK prezidento rinkimų nugalėtojas?“ neturi prasmės: atsakymas priklauso nuo to, kokiu metodu apdorojami balsavimo rezultatai.

MATEMATIKOS MĖGĖJŲ KLUBO RINKIMŲ REZULTATAI

Nugalėtojas	Balsavimo metodas
Algis	Daugumos
Birutė	Taškų
Dovilė	Eliminavimo

Panagrinėkime kitą pavyzdį ir pasižiūrėkime, kaip veikia eliminavimo metodas. Šį kartą, būdami labiau prityrę, nebeperrašinėsime vertinimų lentelės po kiekvieno etapo, o tiesiog išbrauksime pašalinamus kandidatus (tuomet aukščiausiai stulpelyje nurodytas neišbrauktas kandidatas ir bus pirmoje vietoje atitinkamame stulpelyje).

3 pavyzdys. Nagrinėkime rinkimus, kuriuose dalyvauja 5 kandidatai (A, B, C, D ir E) ir 24 rinkėjai. Vertinimų lentelė yra tokia:

Balsavusiųjų skaičius	8	6	2	3	5
1 vieta	A	B	C	D	E
2 vieta	B	D	A	E	A
3 vieta	C	E	E	A	D
4 vieta	D	C	B	C	B
5 vieta	E	A	D	B	C

Nugalėtoją nustatysime eliminavimo metodu:

- **1 etapas**.

Kandidatai	Pirmųjų vietų balsai	
A	8	
B	6	
C	**2**	⟶ C pašalinamas
D	3	
E	5	

Vertinimų lentelė dabar atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	8	6	2	3	5
1 vieta	A	B	(C)	D	E
2 vieta	B	D	A	E	A
3 vieta	(C)	E	E	A	D
4 vieta	D	(C)	B	(C)	B
5 vieta	E	A	D	B	(C)

- **2 etapas.**

Kandidatai	Pirmųjų vietų balsai	
A	10	
B	6	
D	**3**	⟶ *D* pašalinamas
E	5	

Vertinimų lentelė dabar atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	8	6	2	3	5
1 vieta	*A*	*B*	(*C*)	(*D*)	*E*
2 vieta	*B*	(*D*)	*A*	*E*	*A*
3 vieta	(*C*)	*E*	*E*	*A*	(*D*)
4 vieta	(*D*)	(*C*)	*B*	(*C*)	*B*
5 vieta	*E*	*A*	(*D*)	*B*	(*C*)

- **3 etapas.**

Kandidatai	Pirmųjų vietų balsai	
A	10	
B	**6**	⟶ *B* pašalinamas
E	8	

Vertinimų lentelė dabar atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	8	6	2	3	5
1 vieta	*A*	(*B*)	(*C*)	(*D*)	*E*
2 vieta	(*B*)	(*D*)	*A*	*E*	*A*
3 vieta	(*C*)	*E*	*E*	*A*	(*D*)
4 vieta	(*D*)	(*C*)	(*B*)	(*C*)	(*B*)
5 vieta	*E*	*A*	(*D*)	(*B*)	(*C*)

- **4 etapas.**

Kandidatai	Pirmųjų vietų balsai
A	10
E	14

Rinkimų nugalėtojas yra *E*.

Eliminavimo metodas Lietuvoje taikomas labai retai. JAV šis metodas plačiai taikomas vietiniuose miesto tarybos rinkimuose, mokyklos valdybos rinkimuose ir pan. Tarptautinis Olimpinis Komitetas Olimpinių Žaidynių sostines renka naudodamasis tam tikra šio metodo versija (žr. šio skyriaus 2 priedą). Kaip ir taškų metodo atveju, taikant eliminavimo metodą, yra atsižvelgiama į visą rinkėjų pateiktą informaciją apie kandidatų vertinimą (ne vien tik apie labiausiai vertinamą kandidatą), tačiau, skaičiuojant taškų metodu, visa informacija naudojamasi iš karto, o skaičiuojant eliminavimo metodu, informacija naudojamasi palaipsniui.

Vienu atžvilgiu eliminavimo metodas visgi yra pranašesnis už taškų metodą, nes *jis tenkina didžiumos kriterijų* (žr. 37 pratimą).

Eliminavimo metodo trūkumai

Pagrindinis eliminavimo metodo trūkumas yra sunkiai pastebimas. Pademonstruosime jį tokiu pavyzdžiu.

4 pavyzdys. Nagrinėkime rinkimus, kuriuose dalyvauja 3 kandidatai (A, B ir C) ir 29 rinkėjai. Vertinimų lentelė atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	7	8	10	4
1 vieta	A	B	C	A
2 vieta	B	C	A	C
3 vieta	C	A	B	B

Taikant eliminavimo metodą, 1 etape pašalinamas B. Tuomet vertinimų lentelė atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	11	18
1 vieta	A	C
2 vieta	C	A

Iš čia išplaukia, kad rinkimus laimėjo C.

Tarkime, kad dėl tam tikrų priežasčių pirmasis balsavimas atšaukiamas ir skelbiamas pakartotinis balsavimas. Antrą kartą visi rinkėjai balsuoja lygiai taip pat, kaip ir pirmą kartą, išskyrus keturis rinkėjus, kurie vertinimų lentelėje yra paskutiniame stulpelyje. Jie pakeitė savo nuomonę ir nusprendė kandidatui C duoti pirmą vietą, o kandidatui A – antrą vietą (nes sužinojo, kad C labiau vertintinas nei A). Kadangi C laimėjo pirmame balsavime, o antrame balsavime papildomai gauna dar keturias pirmąsias vietas, tai galima tikėtis, kad C vėl nugalės rinkimus. Pasitikrinkime.

Sukeitus A ir C vietomis paskutiniame stulpelyje, jis tampa toks pat, kaip ir trečias stulpelis, todėl pakartotinio balsavimo vertinimų lentelė atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	7	8	14
1 vieta	A	B	C
2 vieta	B	C	A
3 vieta	C	A	B

Taikant eliminavimo metodą, 1 etape atmetamas A. Dabar vertinimų lentelė tokia:

Balsavusiųjų skaičius	15	14
1 vieta	B	C
2 vieta	C	B

Tai reiškia, kad dabar nugalėtojas yra B! Bet kuriam teisingumo jausmą turinčiam žmogui pakartotinio balsavimo rezultatai gali pasirodyti absurdiški ir neteisingi. Kaip neužjausti kandidato C, kuris laimėjo atšauktajame pirmame balsavime ir gavo nemažą papildomą paramą pakartotiniame balsavime, o rinkimus vis tik pralaimėjo!

Balsavimo teorijoje yra dar vienas svarbus kriterijus, teigiantis, kad tai, kas atsitiko aukščiau aptartame pavyzdyje, yra neteisinga – tai **monotoniškumo kriterijus**. Paprastai kalbant, šis kriterijus reiškia, jog rinkimus laimėjęs kandidatas neturi nukentėti dėl to, kad gavo papildomų balsų. Tikslus monotoniškumo kriterijaus apibrėžimas yra pateiktas žemiau.

Monotoniškumo kriterijus. Jeigu kandidatas nugali rinkimuose, o, kartojant balsavimą, kai kurie rinkėjai keičia savo vertinimus jo naudai, tai jis turi vėl laimėti rinkimus.

4 pavyzdys rodo, kad eliminavimo metodas *pažeidžia monotoniškumo kriterijų*. Paliekame skaitytojui įrodyti, kad eliminavimo metodas *pažeidžia Kondorsė kriterijų* (žr. 41 pratimą), bet tenkina *didžiumos kriterijų* (žr. 37 pratimą).

DVIKOVŲ METODAS

Visi trys iki šiol nagrinėti metodai pažeidžia Kondorsė kriterijų. Tačiau yra keletas metodų, kurie tenkina Kondorsė kriterijų (visi jie vadinami *Kondorsė metodais*). Mes nagrinėsime tik paprasčiausią, kuris vadinamas **dvikovų metodu***.

Šis metodas taip vadinamas todėl, kad čia kiekvienas kandidatas varžosi vienas prieš vieną su kiekvienu kitu. Lyginant du kandidatus (sakykime, X

* Šis metodas kartais vadinamas Kopelendo (A. H. Copeland) metodu.

su Y), rinkėjo balsas priskiriamas X, jei tas rinkėjas jį vertina labiau negu Y. Jei rinkėjas kandidatą Y vertina labiau už X, jo balsą gauna Y. Kai visi balsai suskaičiuoti, šios poros dvikova gali baigtis X laimėjimu (tada X gauna 1 tašką), lygiosiomis (kiekvienas gauna po 1/2 taško) arba X pralaimėjimu (X gauna 0 taškų). Kandidatas, kuris po visų dvikovų surenka daugiausiai taškų, skelbiamas nugalėtoju. Jei keli kandidatai surenka vienodą skaičių balsų (o iš visų iki šiol nagrinėtų balsavimo metodų šis dažniau nei kiti baigiasi lygiosiomis), lygiosios yra išsprendžiamos kuriuo nors iš anksto numatytu lygiųjų sprendimo metodu (žr. 6 pavyzdį).

MMK prezidento rinkimuose dvikovų metodas veikia taip. Pirmiausia lyginame A ir B.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*D*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	*D*	*D*
3 vieta	*C*	*D*	*B*	*C*	*B*
4 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*	*A*

Pirmo stulpelio 14 rinkėjų labiau vertina A negu B, tačiau visi likusieji rinkėjai (23) labiau vertina B negu A. Todėl šios poros nugalėtojas yra B. Galutinis rezultatas būtų toks:

A prieš B (14:23) – B laimi (B gauna 1 tašką; A gauna 0 taškų).

Toliau lyginame A ir C.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*D*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	*D*	*D*
3 vieta	*C*	*D*	*B*	*C*	*B*
4 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*	*A*

Vėl susumuojame šio lyginimo rezultatus ir gauname:
A prieš C (14:23) – C laimi (C gauna 1 tašką).

Panašiai lyginame A su D, B su C, B su D ir C su D. Mes paliekame skaitytojui patikrinti šiuos rezultatus:

A prieš D (14:23) – D laimi (D gauna 1 tašką);
B prieš C (18:19) – C laimi (C gauna 1 tašką);
B prieš D (28: 9) – B laimi (B gauna 1 tašką);
C prieš D (25:12) – C laimi (C gauna 1 tašką).

Galutinis rezultatas yra toks: A – 0 taškų, B – 2 taškai, C – 3 taškai, D – 1 taškas. Kadangi Celestinas surinko daugiausiai taškų, jis tampa nugalėtoju dvikovų metodu.

MATEMATIKOS MĖGĖJŲ KLUBO RINKIMŲ REZULTATAI

Nugalėtojas	Balsavimo metodas
Algis	Daugumos
Birutė	Taškų
Dovilė	Eliminavimo
Celestinas	Dvikovų

Tie patys rinkimai, keturi skirtingi balsų skaičiavimo metodai ir keturi skirtingi nugalėtojai!

Akivaizdu, kad dvikovų metodas *tenkina Kondorsė kriterijų*: jei kandidatas laimi kiekvieną dvikovą, tai jis savaime surenka daugiausiai taškų ir laimi rinkimus. Taip pat nesunku suvokti, kad dvikovų metodas *tenkina didžiumos kriterijų* (žr. 38 pratimą). Mažiau akivaizdu (bet taip pat teisinga), kad dvikovų metodas *tenkina monotoniškumo kriterijų* (žr. 42 pratimą).

Dvikovų metodo trūkumai

Kadangi dvikovų metodas tenkina visus iki šiol nagrinėtus kriterijus, tai gali kilti klausimas, ar jis turi kokių nors trūkumų? Deja, tokių trūkumų yra. Vieną iš jų pademonstruosime tokiu pavyzdžiu.

5 pavyzdys. Nagrinėkime rinkimus, kuriuose dalyvauja 5 kandidatai (A, B, C, D ir E) ir 22 rinkėjai. Vertinimų lentelė yra tokia:

Balsavusiųjų skaičius	5	3	5	3	2	4
1 vieta	A	A	C	D	D	B
2 vieta	B	D	E	C	C	E
3 vieta	C	B	D	B	B	A
4 vieta	D	C	A	E	A	C
5 vieta	E	E	B	A	E	D

Šių rinkimų nugalėtoją nustatysime dvikovų metodu. Skaitytojas gali pats įsitikinti, kad, palyginus visas galimas poras, rezultatai yra tokie:

A prieš B (13: 9) – A laimi;
A prieš C (12:10) – A laimi;
A prieš D (12:10) – A laimi;
A prieš E (10:12) – E laimi;
B prieš C (12:10) – B laimi;
B prieš D (9:13) – D laimi;
B prieš E (17: 5) – B laimi;
C prieš D (14: 8) – C laimi;
C prieš E (18: 4) – C laimi;
D prieš E (13: 9) – D laimi.

Kadangi A gauna 3 taškus, B – 2 taškus, C – 2 taškus, D – 2 taškus ir E – 1 tašką, tai A yra šių rinkimų nugalėtojas dvikovų metodu.

Tarkime, kad dėl tam tikrų priežasčių balsai turi būti perskaičiuoti iš naujo, tačiau prieš tai trys kandidatai – B, C ir D – buvo įkalbėti atsiimti savo kandidatūras, paliekant varžytis kandidatus A ir E. Išbraukus iš vertinimų lentelės kandidatus B, C ir D, ji atrodys taip:

Balsavusiųjų skaičius	5	3	5	3	2	4
1 vieta	A	A	(C)	(D)	(D)	(B)
2 vieta	(B)	(D)	E	(C)	(C)	E
3 vieta	(C)	(B)	(D)	(B)	(B)	A
4 vieta	(D)	(C)	A	E	A	(C)
5 vieta	E	E	(B)	A	E	(D)

Sutraukta ji atrodo taip:

Balsavusiųjų skaičius	10	12
1 vieta	A	E
2 vieta	E	A

Tai reiškia, kad dabar nugalėtojas yra E. Iš pradžių dvikovų metodu nugalėtojas buvo A, bet, išbraukus iš sąrašo kelis kandidatus, nugalėtoju tapo E. Tai atrodo neteisinga: kodėl vienas kandidatas turi nukentėti dėl kitų kandidatų elgesio?

Balsavimo teorijoje sakoma, kad dvikovų metodas pažeidžia **pastovumo kriterijų**.

Pastovumo kriterijus. Jeigu kandidatas X nugali rinkimuose ir vienas arba keli kiti kandidatai išbraukiami iš biuletenių, o balsai perskaičiuojami, tai X vėl turi tapti nugalėtoju.

Kitas dvikovų metodo trūkumas pasireiškia tuo, jog juo dažnai iš viso nugalėtojo nustatyti neįmanoma. Panagrinėkime tokį paprastą pavyzdį.

6 pavyzdys.

Balsavusiųjų skaičius	4	2	5
1 vieta	A	B	C
2 vieta	B	C	A
3 vieta	C	A	B

Čia A nugali B (9 : 2), B nugali C (6 : 5) ir C nugali A (7 : 4). Rezultatas – trigubos lygiosios. Kaip jas išspręsti? Universalaus būdo tokioms lygiosioms išspręsti nėra, todėl svarbu iš anksto aptarti lygiųjų sprendimo taisykles. Panagrinėkime toliau, kas gali atsitikti mūsų pavyzdyje. Kandidatas C gali ne be pagrindo tvirtinti, kad lygiosios turėtų būti sprendžiamos atsižvelgiant į pirmąsias vietas. Tokiu atveju kandidatas C laimėtų. Kita vertus, kandidatas A galėtų pateikti ne mažiau įtikinamą argumentą, kad lygiosios turėtų būti sprendžiamos taškų metodu. Tokiu atveju A gautų 24 taškus, B – 19, o C – 23, todėl laimėtų A. Tai turėtų įtikinti skaitytoją, kad dėl lygiųjų sprendimo būdo reikia susitarti dar prieš rinkimus. Lygiosios ir jų sprendimo būdai išsamiau nagrinėjami šio skyriaus pabaigoje esančiame 3 priede.

Dvikovų skaičius

Paskutinis dvikovų metodo trūkumas, kurį aptarsime, yra labiau praktinio pobūdžio: taikant šį metodą, reikia palyginti daugybę porų. Kiek iš tikrųjų porų mes turime palyginti? MMK rinkimuose iš 4 kandidatų mums reikėjo palyginti 6 poras, o 5 pavyzdyje, kur buvo 5 kandidatai, mes lyginome 10 porų. Panagrinėkime pavyzdį, kai turime rinkimus iš 12 kandidatų. Kiek porų galima sudaryti iš jų? Pabandykime nuosekliai suskaičiuoti visas poras, sekdami, kad neįtrauktume nė vienos poros du kartus.

- Lyginame pirmą kandidatą su kiekvienu kitu iš 11 kandidatų – iš viso 11 porų.
- Lyginame antrą kandidatą su kiekvienu kitu, išskyrus pirmąjį (kadangi tai jau buvo padaryta prieš tai) – iš viso 10 porų.
- Lyginame trečią kandidatą su kiekvienu kitu, išskyrus pirmąjį ir antrąjį (kadangi šios poros jau buvo sudarytos) – iš viso 9 poros.

  ⋮

- Lyginame vienuoliktą kandidatą su kiekvienu kitu, išskyrus pirmuosius dešimt – 1 pora.

Matome, kad bendras porų skaičius yra

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66.$$

Kiek galima sudaryti porų iš 100 kandidatų? Samprotaudami panašiai, kaip ir prieš tai, turime sudėti:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99.$$

Bendru atveju, kai turime N kandidatų, porų skaičius yra

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (N - 1).$$

Grįžkime atgal prie pavyzdžio su 100 kandidatų. Kam lygi suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99?$$

Visada galima imti ir sudėti visus šiuos skaičius, bet tai nėra malonus, o greičiau varginantis darbas. Pabandykime tai daryti kiek kitaip. Tarkime, kad, prieš prasidedant porų lyginimui, kiekvienas kandidatas įteikia savo vizitinę kortelę visiems savo konkurentams. Aišku, kad kiekvienas kandidatas turi išdalinti 99 korteles (po vieną kiekvienam savo priešininkui), o kadangi kandidatų yra 100, tai bendra išdalintų kortelių suma yra $99 \times 100 = 9900$. Tada kiekviena pora turi dvi korteles, todėl bendras porų skaičius turėtų būti perpus mažesnis. Gauname, kad

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 = \frac{99 \times 100}{2} = 4950.$$

Panašiai samprotaudami, gauname, kad iš N kandidatų galima sudaryti

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (N - 1) = \frac{(N - 1)N}{2}$$

porų.

Didėjant kandidatų skaičiui, lyginamų porų skaičius auga labai sparčiai, todėl dvikovų metodas tampa gremėzdiškas, „ryja“ laiką ir praktikoje retai tenaudojamas. Tai apmaudu, nes, nepaisant trūkumų, šis metodas yra visai neblogas.

RIKIAVIMAS

Labai dažnai mums svarbu žinoti ne tik rinkimų nugalėtoją, bet ir antrą, trečią ir t.t. vietas užėmusius kandidatus. Vėl nagrinėkime MMK prezidento rinkimus ir tarkime, kad turime išrinkti ne tik prezidentą, bet ir viceprezidentą bei iždininką. Klubo įstatuose pasakyta, kad rinkimų nugalėtojas tampa prezidentu, antroje vietoje atsidūręs kandidatas tampa viceprezidentu, o trečią vietą užėmęs kandidatas tampa iždininku. Aišku, kad mums reikalingas toks metodas, kuris nustatytų ne tik nugalėtoją, bet ir antrą, trečią ir t.t. vietą užėmusius kandidatus, t.y. leistų visus kandidatus surikiuoti. Tokią procedūrą ir vadinsime rikiavimu.

Išplėstiniai rikiavimo metodai

Visus keturis balsavimo metodus, išnagrinėtus šio skyriaus pradžioje, nesunku išplėsti ir pritaikyti kandidatams rikiuoti.

Pradėkime nuo daugumos metodo ir pažiūrėkime, kaip jį reikėtų papildyti, kad galėtume surikiuoti keturis MMK rinkimuose dalyvaujančius kandidatus. Priminsime, kad rinkimų rezultatai daugumos metodu buvo tokie:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*D*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	*D*	*D*
3 vieta	*C*	*D*	*B*	*C*	*B*
4 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*	*A*

A: 14 pirmųjų vietų;
B: 4 pirmosios vietos;
C: 11 pirmųjų vietų;
D: 8 pirmosios vietos.

Žinome, kad *A* yra nugalėtojas skaičiuojant daugumos metodu. Kas turėtų būti viceprezidentu? Atsakymas akivaizdus: toliau daugiausiai pirmųjų vietų (11) turi *C*, todėl jis skelbiamas viceprezidentu. Pagal tą patį požymį *D* užima trečią vietą (8 balsai), o *B* – paskutinę. Taigi, taikant *išplėstinį daugumos metodą*, surikiuotas kandidatų sąrašas atrodys taip:

Nugalėtojas (prezidentas): *A* (14 pirmųjų vietų);
Antroji vieta (viceprezidentas): *C* (11 pirmųjų vietų);
Trečioji vieta (iždininkas): *D* (8 pirmosios vietos);
Paskutinis: *B* (4 pirmosios vietos).

Rikiavimas, taikant *išplėstinį taškų metodą*, yra toks pat paprastas. Pavyzdžiui, MMK rinkimuose taškų metodu rezultatai buvo tokie: *A* surinko 79 taškus, *B* – 106 taškus, *C* – 104 ir *D* – 81 tašką. Pagal surinktų taškų skaičių galutinė rikiuotė būtų tokia:

Nugalėtojas (prezidentas): *B* (106 taškai);
Antroji vieta (viceprezidentas): *C* (104 taškai);
Trečioji vieta (iždininkas): *D* (81 taškas);
Paskutinis: *A* (79 taškai).

Rikiavimas, taikant *išplėstinį eliminavimo metodą*, yra vos įmantresnis – mes turime rikiuoti kandidatus atvirkščia tvarka: pirmasis atmestas kandidatas užima paskutinę vietą, antrasis atmestas kandidatas užima priešpaskutinę

vietą, ir t.t.* Pritaikius šį metodą kandidatams rikiuoti MMK rinkimuose, gausime tokius rezultatus:

Nugalėtojas (prezidentas): D;
Antroji vieta (viceprezidentas): A (atmestas paskutinis);
Trečioji vieta (iždininkas): C (atmestas antras);
Paskutinis: B (atmestas pirmas).

Ir pagaliau mes galime rikiuoti kandidatus *išplėstiniu dvikovų metodu*, atsižvelgdami į kandidatų surinktus taškus (priminsime, kad, esant lygiosioms, duodama 0,5 taško). MMK rinkimų atveju C turėjo 3 taškus, B – 2 taškus, D – 1 tašką ir A – 0 taškų, todėl rezultatai būtų tokie:

Nugalėtojas (prezidentas): C (3 taškai);
Antroji vieta (viceprezidentas): B (2 taškai);
Trečioji vieta (iždininkas): D (1 taškas);
Paskutinis: A (0 taškų).

Rekursiniai metodai

Išnagrinėkime kitą, galbūt kiek sudėtingesnę rikiavimo procedūrą, kurią vadinsime **rekursine****. Ją galima taikyti bet kuriam pasirinktam balsavimo metodui. Tarkime, kad kandidatus rikiuosime balsavimo metodu X ir taikysime rekursinį būdą. Iš pradžių metodu X nustatome rinkimų nugalėtoją. Iki šiol viskas aišku. Tada nugalėtojo pavardę išbraukiame iš vertinimų lentelės ir gauname naują lentelę, kurioje kandidatų yra vienu mažiau. Vėl tuo pačiu metodu X nustatome nugalėtoją iš naujos vertinimų lentelės ir skiriame jam antrąją vietą. (Tai visiškai suprantama: pašalinus iš sąrašo nugalėtoją ir tęsiant varžybas, geriausias tokių varžybų kandidatas yra antrasis pagal gerumą pradinių varžybų kandidatas.) Kartojame šį procesą (išbraukiame nugalėtojo pavardę iš vertinimų lentelės ir metodu X vėl nustatome nugalėtoją, užimsiantį žemesnę vietą), kol surikiuojame reikiamą kandidatų skaičių.

Pademonstruosime pagrindinę šio metodo idėją dviem pavyzdžiais. Grįžkime prie MMK rinkimų.

7 pavyzdys. Matematikos mėgėjų klubo rinkimuose keturis kandidatus surikiuosime *rekursiniu daugumos metodu*. Priminsime, kad vertinimų lentelė yra tokia:

* Net jeigu kuris nors kandidatas iš karto gauna didžiumą balsų, kandidatų eliminavimo procesas turi būti tęsiamas kandidatams surikiuoti.

** Tas žodis matematikoje vartojamas dažnai ir reiškia „grįžtamas“, „kartotinis“.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	A	C	D	B	C
2 vieta	B	B	C	D	D
3 vieta	C	D	B	C	B
4 vieta	D	A	A	A	A

- **1 žingsnis** – nustatome nugalėtoją daugumos metodu. Mes jau žinome iš anksčiau, kad nugalėtojas – tai kandidatas A, surinkęs 14 pirmųjų vietų.

- **2 žingsnis** – nustatome antrąją vietą. Pirmiausia išbraukiame iš lentelės kandidatą A.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	(A)	C	D	B	C
2 vieta	B	B	C	D	D
3 vieta	C	D	B	C	B
4 vieta	D	(A)	(A)	(A)	(A)

Tada gauname naują vertinimų lentelę, kuria remsimės toliau:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	B	C	D	B	C
2 vieta	C	B	C	D	D
3 vieta	D	D	B	C	B

Iš šios lentelės daugumos metodu nustatome nugalėtoją – tai kandidatas B, surinkęs 18 pirmųjų vietų. Todėl B užima antrąją vietą.

- **3 žingsnis** – nustatome trečiąją vietą. Dabar išbraukiame iš paskutinės lentelės kandidatą B.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	(B)	C	D	(B)	C
2 vieta	C	(B)	C	D	D
3 vieta	D	D	(B)	C	(B)

Sutraukę gauname naują vertinimų lentelę:

Balsavusiųjų skaičius	25	12
1 vieta	*C*	*D*
2 vieta	*D*	*C*

Iš šios lentelės daugumos metodu nustatome nugalėtoją – tai kandidatas *B*, surinkęs 18 pirmųjų vietų. Tai reiškia, kad kandidatas *C* yra trečias. Aišku, kad *D* užima paskutinę vietą.

Galutiniai rikiavimo rezultatai yra tokie:

Pirmoji vieta (prezidentas): *A*;
Antroji vieta (viceprezidentas): *B*;
Trečioji vieta (iždininkas): *C*;
Paskutinis: *D*.

Palyginkime rikiavimo rekursiniu daugumos metodu ir rikiavimo išplėstiniu daugumos metodu rezultatus. Matome, kad, išskyrus pirmąją vietą (kurią abiem atvejais užima tas pats kandidatas), visose kitose vietose yra skirtingi kandidatai.

---

8 pavyzdys. Šiame pavyzdyje MMK rinkimų kandidatus rikiuosime *rekursiniu eliminavimo metodu.*

- **1 žingsnis**. Taikydami eliminavimo metodą, iš pradinės vertinimų lentelės nustatome nugalėtoją – tai *D*. (Visą darbą jau atlikome anksčiau.)
- **2 žingsnis**. Iš vertinimų lentelės išbraukiame nugalėtoją *D*.

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	(*D*)	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	(*D*)	(*D*)
3 vieta	*C*	(*D*)	*B*	*C*	*B*
4 vieta	(*D*)	*A*	*A*	*A*	*A*

Tada gauname tokią vertinimų lentelę:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	*A*	*C*	*C*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*B*	*B*	*C*	*B*
3 vieta	*C*	*A*	*A*	*A*	*A*

Lentelę sutraukiame:

Balsavusiųjų skaičius	14	19	4
1 vieta	A	C	B
2 vieta	B	B	C
3 vieta	C	A	A

Gautos vertinimų lentelės duomenis vėl apdorojame eliminavimo metodu. B pašalinamas pirmas, o A – antras (paliekame tai patikrinti skaitytojui), todėl likęs C tampa nugalėtoju. Tai reiškia, kad antra vieta MMK rinkimuose atitenka C.

- **3 žingsnis**. Iš šios vertinimų lentelės išbraukiame nugalėtoją C ir gauname tokią lentelę:

Balsavusiųjų skaičius	14	23
1 vieta	A	B
2 vieta	B	A

Vėl taikome eliminavimo metodą; nugalėtojas čia yra B. Tai reiškia, kad trečioji vieta atitenka B (ir, be abejo, A yra paskutinis).

Galutiniai rikiavimo rezultatai, taikant rekursinį eliminavimo metodą, yra tokie:

Nugalėtojas (prezidentas): D;
Antroji vieta (viceprezidentas): C;
Trečioji vieta (iždininkas): B;
Paskutinis: A.

Pastebėsime, kad šis rikiavimo rezultatas skiriasi nuo to, kurį gavome taikydami išplėstinį eliminavimo metodą.

Nors kandidatų rikiavimo rekursiniai metodai praktikoje taikomi labai retai, vis dėlto verta juos panagrinėti išsamiau. Mes paliekame tai pačiam skaitytojui (žr. 25–30 pratimus).

IŠVADOS. TEISINGUMAS IR EROU NEGALIMUMO TEOREMA

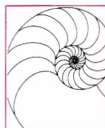
Ar yra koks nors teisingas balsavimo metodas? Šiame skyriuje mes taikėme keletą kriterijų (vadinamųjų **teisingumo kriterijų**) metodo gerumui patikrinti. Priminsime juos dar kartą.

- *Didžiumos kriterijus.* Jeigu yra kandidatas, kuris labiausiai vertinamas didžiumos rinkėjų, tai šis kandidatas turi tapti balsavimo nugalėtoju.
- *Kondorsė kriterijus.* Jeigu kandidatas nugali, lyginant vieną prieš vieną su bet kuriuo kitu kandidatu, tai šis kandidatas turi nugalėti rinkimuose.

- *Monotoniškumo kriterijus.* Jeigu kandidatas nugali rinkimuose, o kartojant balsavimą kai kurie rinkėjai keičia savo vertinimus jo naudai, tai jis vėl turi laimėti rinkimus.
- *Pastovumo kriterijus.* Jeigu kandidatas nugali rinkimuose, ir vienas ar keli kiti kandidatai išbraukiami iš biuletenių, o balsai perskaičiuojami, tai jis vėl turi tapti nugalėtoju.

Visi šie teisingumo kriterijai (taip pat ir kiti, čia nepaminėti – žr., pavyzdžiui, 44 pratimą) yra pakankamai aiškūs, todėl natūralu tikėtis, jog bet kuris geras nugalėtojo nustatymo metodas turėtų juos tenkinti. Tačiau mes matėme, kad kiekvienas iš nagrinėtų keturių metodų netenkina vieno ar kito teisingumo kriterijaus, ir niekas nežino idealaus ar bent jau pakankamai tobulo nugalėtojo nustatymo metodo. Iš pirmo žvilgsnio tai neatrodytų labai baisu – juk yra ir daugiau dalykų, kurių mes dar nežinome, bet tikimės vieną gražią dieną sužinoti. Deja, šiuo atveju taip nėra. 1952 metais K. Erou įrodė garsiąją *negalimumo teoremą*, kuri teigia, kad nors ir kaip mes stengtumės, vis tiek nerasime tobulo būdo nugalėtojui nustatyti: teisingumas ir demokratija ne visada suderinami.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



daugumos metodas
didžiumos kriterijus
dvikovų metodas
eliminavimo metodas
Erou negalimumo teorema
esminės lygiosios
išplėstiniai rikiavimo metodai
Kondorsė kriterijus
Kondorsė nugalėtojas
monotoniškumo kriterijus
pastovumo kriterijus
prioritetinis balsavimas
rekursiniai rikiavimo metodai
rikiavimas
strateginis balsavimas
taškų metodas
vertinimų lentelė
vertinimų tranzityvumas

PRATIMAI

Apšilimas

1. Uždarosios akcinės bendrovės XYZ vadovybė nusprendė savo personalui surengti pietus. Reikia vertinti vieną iš keturių restoranų: Astorija (A), Bokšto restoranas (B), Citadelė (C) ir Dianos svetainė (D). Kiekvienas iš 12 personalo narių turi užpildyti korteles ir nurodyti restoranus jų vertinimo tvarka. Galutiniai prioritetinio balsavimo rezultatai parodyti paveikslėlyje kitame puslapyje.

a) Sudarykite šių rinkimų vertinimų lentelę.

b) Ar yra nugalėtojas pagal didžiumą?

c) Nustatykite rinkimų nugalėtoją daugumos metodu.

d) Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

1	A	1	C	1	B	1	A
2	B	2	D	2	D	2	B
3	C	3	B	3	C	3	C
4	D	4	A	4	A	4	D
1	C	1	C	1	A	1	C
2	B	2	B	2	B	2	D
3	D	3	D	3	C	3	B
4	A	4	A	4	D	4	A
1	A	1	A	1	C	1	A
2	B	2	B	2	B	2	B
3	C	3	C	3	D	3	C
4	D	4	D	4	A	4	D

2. Šachmatų klubas organizuoja prezidento rinkimus. Yra trys kandidatai: A, B ir C. Kaip balsavo 11 klubo narių (kandidatams balsuoti neleista), parodyta lentelėje:

Balsuojantys	Simas	Benas	Tomas	Petras	Tadas	Marytė	Alius	Karolis	Paulius	Katia	Romas
1 vieta	C	A	C	A	B	C	C	A	C	B	A
2 vieta	A	C	B	C	A	B	A	C	A	A	B
3 vieta	B	B	A	B	C	A	B	B	B	C	C

a) Sudarykite šių rinkimų vertinimų lentelę.

b) Ar yra nugalėtojas pagal didžiumą?

c) Nustatykite rinkimų nugalėtoją daugumos metodu.

d) Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

3–6 *pratimuose situacija yra tokia*: *matematikos dėstytojas prašo studentų nurodyti vieną iš keturių galimų matematikos egzamino datų –* A (*gruodžio* 15 *d.* 8 *val.*), B (*gruodžio* 20 *d.* 19 *val.*), C (*gruodžio* 21 *d.* 7 *val.*), D (*gruodžio* 11 *d.* 11 *val.*). *Studentų vertinimų lentelė parodyta kitame puslapyje.*

Balsuojančiųjų skaičius	5	11	6	3	5	9	5	2	5
1 vieta	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*D*
2 vieta	*B*	*B*	*C*	*D*	*A*	*A*	*D*	*B*	*B*
3 vieta	*C*	*D*	*B*	*B*	*C*	*D*	*A*	*A*	*A*
4 vieta	*D*	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*	*C*	*D*	*C*

3. a) Kiek studentų balsavo?
b) Kuri alternatyva nugalėjo daugumos metodu?

4. Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

5. Nustatykite rinkimų nugalėtoją eliminavimo metodu.

6. Nustatykite rinkimų nugalėtoją dvikovų metodu.

7–13 *pratimai remiasi* 5 *pavyzdžiu, kur rinkimuose dalyvauja* 5 *kandidatai* (*A*, *B*, *C*, *D ir E*) *ir* 22 *rinkėjai. Vertinimų lentelė parodyta žemiau.*

Balsuojančiųjų skaičius	5	3	5	3	2	4
1 vieta	*A*	*A*	*C*	*D*	*D*	*B*
2 vieta	*B*	*D*	*E*	*C*	*C*	*E*
3 vieta	*C*	*B*	*D*	*B*	*B*	*A*
4 vieta	*D*	*C*	*A*	*E*	*A*	*C*
5 vieta	*E*	*E*	*B*	*A*	*E*	*D*

7. Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

8. Nustatykite rinkimų nugalėtoją: a) daugumos metodu, b) eliminavimo metodu.

9. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu eliminavimo metodu.

10. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu daugumos metodu.

11. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu dvikovų metodu.

12. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu taškų metodu.

13. Tarkime, kad dėl tam tikrų priežasčių balsus reikia perskaičiuoti, bet prieš tai kandidatas pasitraukia iš varžybų.
a) Kaip atrodo vertinimų lentelė, kandidatui *D* atsiėmus kandidatūrą?
b) Raskite naujų rinkimų nugalėtoją dvikovų metodu.

14–20 *pratimai remiasi* 1 *pavyzdžiu, kur yra* 5 *alternatyvos* (*B*, *P*, *R*, *T ir V*) *ir* 100 *rinkėjų. Vertinimų lentelė duota kitame puslapyje.*

Balsavusiųjų skaičius	49	48	3
1 vieta	*B*	*P*	*T*
2 vieta	*P*	*V*	*P*
3 vieta	*T*	*R*	*V*
4 vieta	*R*	*T*	*R*
5 vieta	*V*	*B*	*B*

14. Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

15. Nustatykite rinkimų nugalėtoją eliminavimo metodu.

16. Nustatykite rinkimų nugalėtoją dvikovų metodu.

17. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu daugumos metodu.

18. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu eliminavimo metodu.

19. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu taškų metodu.

20. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu dvikovų metodu.

21–27 *pratimai remiasi* 3 *pavyzdžiu, kur rinkimuose dalyvauja* 5 *kandidatai* (*A*, *B*, *C*, *D ir E*) *ir* 24 *rinkėjai. Vertinimų lentelė duota žemiau.*

Balsuojančiųjų skaičius	8	6	2	3	5
1 vieta	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
2 vieta	*B*	*D*	*A*	*E*	*A*
3 vieta	*C*	*E*	*E*	*A*	*D*
4 vieta	*D*	*C*	*B*	*C*	*B*
5 vieta	*E*	*A*	*D*	*B*	*C*

21. Nustatykite rinkimų nugalėtoją taškų metodu.

22. Nustatykite rinkimų nugalėtoją dvikovų metodu.

23. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu dvikovų metodu.

24. Surikiuokite kandidatus išplėstiniu daugumos metodu.

25. Surikiuokite kandidatus rekursiniu daugumos metodu.

26. Surikiuokite kandidatus rekursiniu eliminavimo metodu.

27. Surikiuokite kandidatus rekursiniu taškų metodu.

28–30 *pratimai remiasi MMK prezidento rinkimų pavyzdžiu. Vertinimų lentelė yra tokia*:

Balsavusiųjų skaičius	14	10	8	4	1
1 vieta	A	C	D	B	C
2 vieta	B	B	C	D	D
3 vieta	C	D	B	C	B
4 vieta	D	A	A	A	A

28. Surikiuokite kandidatus rekursiniu taškų metodu.

29. Surikiuokite kandidatus rekursiniu dvikovų metodu.

30. Surikiuokite kandidatus rekursiniu daugumos metodu.

Treniruotė

31. a) Tarkime, kad 50 tenisininkų sumanė surengti turnyrą ir jame kiekvienas turi žaisti su kiekvienu. Kiek turėtų įvykti susitikimų?
b) Jeigu salėje yra 50 žmonių ir kiekvienas pabučiuotų visus kitus (žinoma, į skruostą), kiek iš viso būtų bučinių?

32. Įrodykite, kad kai yra tik du kandidatai, tai, taikydami visus keturis šiame skyriuje nagrinėtus metodus, gausime tą patį rezultatą: nugali didžiumą balsų turintis kandidatas.

33. **Uždavinys apie paslaptingus rinkimus**. Jūs turite tik tokią informaciją apie rinkimus: yra 5 kandidatai ir 21 rinkėjas. Vertinimų lentelė kažkur dingo, bet yra žinoma, kad joje buvo du stulpeliai.
a) Paaiškinkite, kodėl šiuose rinkimuose tikrai bus nugalėtojas pagal didžiumą.
b) Kandidatų skaičius keičiamas į bet kokį, didesnį už du, o rinkėjų skaičius – į bet kokį nelyginį. Paaiškinkite, kodėl tebetinka a) punkto samprotavimai.

34. Rinkimuose dalyvauja 4 kandidatai (A, B, C ir D) ir 11 rinkėjų. Rinkimų rezultatai nustatomi taškų metodu. Tarkime, kad balsavimas jau įvyko ir balsai suskaičiuoti. B gavo 32 taškus, C – 29 taškus, D – 18 taškų. Kiek taškų gavo A ir kodėl?

35. Rinkimuose dalyvauja 5 kandidatai ir 21 rinkėjas. Rinkimų rezultatai nustatomi taškų metodu. Deja, rinkimų komitetas blogai susumavo taškus. Gavus vieno kandidato skundą, rinkimų rezultatai buvo perskaičiuoti, bet

jau duodant po 4 taškus už pirmosios vietos balsus, po 3 taškus už antrosios vietos balsus, po 2 taškus už trečiosios vietos balsus, po 1 tašką už ketvirtosios vietos balsus ir po 0 taškų už penktosios vietos balsus. Paaiškinkite, kodėl toks balsavimo rezultatų skaičiavimas duos tuos pačius rezultatus, kokius duotų ir tradicinis taškų metodas.

36. Paaiškinkite, kodėl daugumos metodas tenkina monotoniškumo kriterijų.

37. Paaiškinkite, kodėl eliminavimo metodas tenkina didžiumos kriterijų.

38. Paaiškinkite, kodėl dvikovų metodas tenkina didžiumos kriterijų.

39. Paaiškinkite, kodėl didžiumos kriterijaus netenkinantis metodas netenkina ir Kondorsė kriterijaus.

40. Pateikite tokį rinkimų taškų metodu pavyzdį, kuriame pažeidžiamas Kondorsė kriterijus, tačiau tenkinamas didžiumos kriterijus.

Varžybos

41. Pateikite rinkimų eliminavimo metodu pavyzdį (tik ne iš šios knygos!), kada netenkinamas Kondorsė kriterijus.

42. Įrodykite, kad dvikovų metodas tenkina monotoniškumo kriterijų.

43. Įrodykite, kad jei rinkimuose, kuriuose dalyvauja nelyginis rinkėjų skaičius, nėra Kondorsė nugalėtojo, tai kandidatų rikiavimas išplėstiniu dvikovų metodu duos bent dviejų kandidatų lygiąsias.

44. **Pareto kriterijus**. Šį teisingumo kriterijų pasiūlė italų ekonomistas V. Paretas (Vilfredo Pareto, 1848–1943). Jis skamba taip: „Jei *kiekvienas* rinkėjas kandidatą X vertina labiau negu kandidatą Y, tai Y neturi tapti nugalėtoju“. Įrodykite, kad visi išnagrinėti keturi balsavimo metodai tenkina Pareto kriterijų. (*Nurodymas.* Išanalizuokite kiekvieną metodą atskirai.)

45. Tarkime, kad kažkas pasiūlė tokį teisingumo kriterijų: „Jei *didžiuma* rinkėjų kandidatą X vertina labiau negu kandidatą Y, tai kandidatas X turi būti aukščiau už kandidatą Y“. Duokite pavyzdį, kuris įrodytų, kad visi keturi skyriuje nagrinėti išplėstiniai rikiavimo metodai netenkina šio kriterijaus. (*Nurodymas.* Sugalvokite ir nagrinėkite pavyzdį, kuriame nėra Kondorsė nugalėtojo.)

46. Panagrinėkime tokį teisingumo kriterijų: „Jei didžiuma rinkėjų kiekvieną kitą kandidatą vertina labiau negu X, tai kandidatas X neturi būti nugalėtojas“.

a) Pateikite pavyzdį, įrodantį, kad daugumos metodas pažeidžia šį kriterijų.

b) Pateikite pavyzdį, įrodantį, kad eliminavimo metodas pažeidžia šį kriterijų.
c) Paaiškinkite, kodėl dvikovų metodas visada tenkina šį kriterijų.
d) Įrodykite, kad taškų metodas visada tenkina šį kriterijų.

1 PRIEDAS. Neprioritetinis balsavimas

Erou negalimumo teorema sako, kad ieškoti idealaus balsavimo metodo yra beprasmiška. Tačiau mums nereikėtų šio teiginio pervertinti. Ypač neturėtume daryti klaidingos išvados, kad balsavimo metodų nagrinėjimas yra beprasmis užsiėmimas. Trumpiau sakant, balsavimo metodai gali būti ir labai blogi, ir labai geri, todėl rūpestinga naujų ir senų metodų analizė yra svarbi sritis, kurioje darbuojasi sociologai, ekonomistai ir matematikai.

Mintis, kad rinkėjams nebūtina rikiuoti kandidatų (pirmoje vietoje yra . . . ; antroje vietoje yra . . . ; ir t.t.) ir galima vertinti kandidatus kategoriškiau (patinka – nepatinka), balsavimo teorijoje palyginti nauja. Tokio tipo balsavimo metodai vadinami neprioritetiniais balsavimo metodais (kaip priešingybė prioritetiniams). Mes paminėsime vieną iš geriausiai žinomų neprioritetinių metodų – **pritariamąjį balsavimą**.

Pritariamajame balsavime kiekvienas rinkėjas balsuoja už tiek kandidatų, kiek jis nori. Kiekvienas balsas yra paprasčiausias „taip“ už kandidatą, ir tai reiškia, kad rinkėjas pritaria šiam kandidatui. Balsuojančiojo niekas neprašo kandidatus išrikiuoti vertinimo tvarka. Nugali kandidatai, surinkę daugiausiai balsų „taip“.

Žemiau pateikiama lentelė rodo išgalvotų rinkimų pritariamuoju balsavimu rezultatus.

	Rinkėjai							
Kandidatai	Simas	Benas	Tadas	Pranas	Rasa	Vilius	Daiva	Ilona
A	Taip		Taip	Taip	Taip		Taip	Taip
B			Taip		Taip	Taip		
C	Taip				Taip	Taip	Taip	

Rinkimų rezultatai yra tokie: nugalėtojas *A* (šeši pritariamieji balsai); antroje vietoje *C* (keturi pritariamieji balsai); paskutinėje vietoje *B* (trys pritariamieji balsai). Pastebėsime, kad rinkėjas gali niekam nepritarti (kaip Benas) arba pritarti visiems kandidatams (Rasos atveju). Truputį juokinga, tačiau Rasos balsų įtaka yra tokia pat, kaip ir Beno.

Pastaraisiais metais vis labiau įsitikinama, kad pritariamasis balsavimas yra kur kas geresnis už tradicinius prioritetinius balsavimo metodus. Pritariamasis balsavimas nėra be trūkumų, tačiau jis turi ir keletą ryškių privalumų. Mes paminėsime tris iš jų.

Pirmiausia, pritariamasis balsavimas lengvai suprantamas ir paprastai įgyvendinamas. Antra, pritariamojo balsavimo procesas nepriklauso nuo kandidatų skaičiaus. Atskiru atveju, jei prisideda naujų kandidatų, rinkėjai gali pritarti arba nepritarti jiems, neperžiūrėdami savo ankstesnio balsavimo. Pagaliau, pritariamasis balsavimas skatina rinkėjus dalyvauti balsavime. Čia priežastys psichologinės – rinkėjams labiau patinka toks balsavimas, kai jie gali daryti pagrįstus sprendimus. Be to, rinkėjui kur kas lengviau atsakyti į klausimą „Jūs pritariate ar nepritariate šiam kandidatui?“, negu į klausimą „Kurį kandidatą Jūs vertinate labiausiai, kurį mažiau ir t.t.?“. Pastarasis klausimas reikalauja daugiau žinių apie kandidatą, o sudėtingame šių dienų politiniame gyvenime tokios žinios prieinamos nedaugeliui rinkėjų.

2 PRIEDAS. Rinkimai realiame gyvenime

Olimpinės Žaidynės. Miestą, kuriame vyks kitos Olimpinės Žaidynės, renka Tarptautinio Olimpinio Komiteto nariai. Tai sprendimas, turintis išrinktam miestui didžiules ekonomines ir politines pasekmes, todėl rinkimai vyksta labai audringai. Nugalėtojas nustatomas balsavimo metodu, kuris nelabai skiriasi nuo eliminavimo metodo, tik šiuo atveju rinkėjai savo vertinimus nurodo ne vieną kartą, o daro tai kiekviename etape. Procedūrą su visomis detalėmis pademonstruosime pavyzdžiu, kaip 1996 metų Vasaros Olimpinių Žaidynių vieta buvo išrinktas Atlantos miestas (JAV).

1990 metų rugsėjo 18 dieną 86 Tarptautinio Olimpinio Komiteto nariai susirinko Tokijyje (Japonija) išrinkti 1996 metų Vasaros Olimpiados sostinę. Buvo pasiūlyti šeši miestai: Atėnai (Graikija), Atlanta (JAV), Belgradas (Jugoslavija), Mančesteris (Anglija), Melburnas (Australija) ir Torontas (Kanada). Kiekviename etape delegatai balsavo tik už vieną miestą, o mažiausiai balsų surinkęs miestas buvo išbraukiamas iš sąrašo. Balsavimas vyko taip:

- **1 etapas.**

Miestas	Atėnai	Atlanta	Belgradas	Mančesteris	Melburnas	Torontas
Balsai	23	19	(7)	11	12	14

Išbraukiamas Belgradas.

- **2 etapas.**

Miestas	Atėnai	Atlanta	Mančesteris	Melburnas	Torontas
Balsai	23	20	(5)	21	17

Išbraukiamas Mančesteris.

- **3 etapas.**

Miestas	Atėnai	Atlanta	Melburnas	Torontas
Balsai	26	26	(16)	18

Išbraukiamas Melburnas.

- **4 etapas.**

Miestas	Atėnai	Atlanta	Torontas
Balsai	34	30	(22)

Išbraukiamas Torontas.

- **5 etapas.**

Miestas	Atėnai	Atlanta
Balsai	(35)	51

Išbraukiami Atėnai.

Beje, teoriškai šis metodas būtų lygiavertis eliminavimo metodui, tačiau tai, kad rinkėjai gali vertinti kiekviename etape iš naujo, leidžia tam tikrai jų daliai elgtis nenuosekliai. Kai pirmajame etape buvo pašalintas Belgradas, šeši už Mančesterį balsavę rinkėjai antrame etape atsisakė už jį balsuoti. Galime tik spėlioti, kodėl Mančesteris nebegali būti Olimpiados sostine, pašalinus Belgradą iš kandidatų. (Panašiai ir antrame etape, iškritus Mančesteriui, penki už Melburną balsavę rinkėjai pakeitė savo nuomonę.) Vienas iš prioritetinio balsavimo, kai balsuojama tik vieną kartą, privalumų yra tas, kad tokio pobūdžio nenuoseklumai yra negalimi.

Tokioje procedūroje yra dar vienas nepageidaujamas dalykas – šis balsavimo metodas pažeidžia monotoniškumo kriterijų: miestas gali pralaimėti rinkimus vien dėl to, kad už jį ankstesniuose etapuose balsavo *per daug* rinkėjų.

Panagrinėkime, pavyzdžiui, tokį įmanomą atvejį. Yra trys miestai, besivaržantys dėl kitos Olimpiados sostinės vardo: Antiochija, Babilonas ir Kartagina. Dvi dienos iki balsavimo Antiochija turėjo 33 rėmėjus, Babiloną rėmė 24, Kartaginą – 29 delegatai. Tarkime, kad visi Antiochijos rėmėjai antrąjį nurodė Babiloną, tačiau visi Babilono rėmėjai po jo labiausiai vertino Kartaginą. Jei rinkimai būtų vykę prieš dvi dienas, viskas klostytųsi taip:

- **1 etapas.**

Miestas	Antiochija	Babilonas	Kartagina
Balsai	33	(24)⟶	29

Babilonas išbraukiamas, ir visi jo balsai atitenka Kartaginai.

- **2 etapas.**

Miestas	Antiochija	Kartagina
Balsai	(33)	53

Kartagina laimi rinkimus.

Tačiau per tas dvi dienas Kartaginos atstovai norėjo užsitikrinti dar didesnį pranašumą ir darė viską, kad palenktų savo naudai dar daugiau delegatų. Viskas klostėsi sėkmingai, nes 12 iš 33 Antiochijos rėmėjų buvo įkalbėti balsuoti už Kartaginą. Ir štai kas atsitiko, kai įvyko tikrieji rinkimai.

- **1 etapas.**

Miestas	Antiochija	Babilonas	Kartagina
Balsai	(21)⟶	24	41

Antiochija išbraukiama, ir visi jos balsai atitenka Babilonui.

- **2 etapas.**

Miestas	Babilonas	Kartagina
Balsai	45	(41)

Babilono gatvėse linksminasi minios!

TOP 10 rinkimai. Daugelis radijo stočių kartą per savaitę renka populiariausių dainų dešimtuką. Šiuose rinkimuose dalyvauja tos radijo stoties klausytojai. Kiekvienas rinkėjas rikiuoja 10 savo mėgstamiausių dainų. 10 taškų yra skiriama už pirmoje vietoje nurodytą dainą, 9 – už antroje, . . . , 1 taškas – už dešimtoje vietoje nurodytą dainą. Susumavus visus balsus, pirmą vietą gauna daina, surinkusi daugiausiai taškų, mažiau taškų surinkusi daina atsiduria antroje vietoje ir t.t. Matome, kad šis rikiavimo metodas yra

išplėstinis taškų metodas su nedideliu pakeitimu: kandidatų sąrašas yra atviras (kiekviena daina iš principo gali būti kandidatė). Kaip jau žinome, šio balsavimo metodo silpna vieta yra didžiumos kriterijaus pažeidimas: daina gali turėti didžiumą pirmųjų vietų ir netapti nugalėtoja. Suprantama, tokio įvykio tikimybė yra labai maža.

JAV Kino Akademijos apdovanojimai. Kino meno ir mokslo akademija kasmet skiria Akademijos apdovanojimus („Oskarus“) už įvairią kinematografinę veiklą (geriausias filmas, geriausias scenarijus, geriausias aktorius ir t.t.). Kiekvienos kategorijos nugalėtoją balsavimu renka Akademijos nariai (beje, jie patys taip pat yra renkami). Rinkimų procedūra yra gana sudėtinga ir keičiasi. Trumpumo dėlei aprašysime tik procedūrą, kaip renkamas geriausias filmas. (Visų grupių laureatų nustatymo procedūros yra labai panašios.) Balsavimas vyksta dviem etapais: (1) pretendento iškėlimo etapas, kai pasiūlomi penki geriausi filmai, ir (2) galutinis balsavimas nugalėtojui nustatyti.

Kadangi antrasis etapas labai paprastas, tai iš pradžių jį ir aprašysime: kai tik penki geriausi filmai yra pasiūlyti, kiekvienas tikrasis Akademijos narys balsuoja už kurį nors iš jų, ir nugalėtojas išrenkamas paprasta balsų dauguma. Kadangi rinkėjų skaičius yra didelis (tarp 4000 ir 5000), lygiosios yra beveik neįmanomos. Susidarius lygiosioms, jos nesprendžiamos – tada nugalėtojai dalijasi apdovanojimą.

Penkių kandidatų iškėlimo etapas yra kur kas sudėtingesnis ir vyksta balsuojant vadinamuoju **pertekliaus grąžinimo metodu**. Kiekvienas tikrasis Akademijos narys turi užpildyti vertinimų kortelę ir nurodyti penkis jam labiausiai patikusius filmus jų vertinimo tvarka. Priklausomai nuo to, kiek surinkta tokių galiojančių vertinimų kortelių, apskaičiuojamas minimalus balsų skaičius (vadinamas **kvota**), kurį surinkęs filmas įtraukiamas į kandidatų sąrašą. Tada kiekvienas filmas, surinkęs pakankamai pirmųjų vietų, iš karto yra įtraukiamas į sąrašą.

Kvota yra parenkama taip, kad ji sudarytų truputį daugiau kaip šeštąją dalį (16,67%) ir ne daugiau kaip penktąją dalį (20%) bendro visų galiojančių kortelių skaičiaus. (Toks kvotos dydis užtikrina, kad į galutinį sąrašą nepateks 6 ar daugiau filmų.) Nors teoriškai galimas atvejis, kada iškart net penki filmai surenka kvotą ir yra įtraukiami į sąrašą (tada kandidatų iškėlimo etapas tuo ir baigtųsi), tačiau tikrovėje taip neatsitinka; netgi būna ir taip, kad nė vienas filmas nesurenka kvotos iš karto. Tokiu atveju filmas, surinkęs mažiausiai pirmosios vietos balsų (tarkime, X), yra atmetamas ir išbraukiamas iš visų balsavimo kortelių. Tose kortelėse, kuriose X buvo pirmoje vietoje, visi filmai pakyla viena vieta aukščiau. Tada balsai perskaičiuojami iš naujo. Jei ir

vėl nė vienas filmas nesurenka kvotos, tai atmetimo procesas tęsiamas. Pagaliau atsiranda vienas ar daugiau filmų, kurie surenka kvotą ir yra įtraukiami į kandidatų sąrašą.

Kai tik vienas ar keli filmai patenka į sąrašą, įvykių eiga kinta: įtrauktas į sąrašą filmas atiduoda savo balsų „perteklių“ filmams, kurie dar nėra nei išbraukti, nei kandidatų sąraše. Šį balsų grąžinimo procesą lengviausia pailiustruoti tokiu išgalvotu pavyzdžiu. Tarkime, kad kvota yra 400 (gražus, apvalus skaičius), ir tam tikru momentu filmas Z gauna 500 pirmųjų vietų, kurių pakanka, kad filmas būtų įtrauktas į sąrašą. Perteklius yra $500 - 400 = 100$ balsų, kurie filmui Z yra nebereikalingi. Tada tie 100 balsų paimami iš Z ir *vienodai* paskirstomi tarp filmų, kurie yra antroje vietoje tose 500 kortelių, kuriose pirmoje vietoje buvo nurodytas Z. Tokia procedūra gali atrodyti keista, tačiau ji turi prasmę. Kadangi 100 perteklinių balsų dalijami į 500 lygių dalių, tai kiekvienas antroje vietoje esantis filmas visose 500 kortelių pelno po $\frac{100}{500} = \frac{1}{5}$ balso. Nors viena penktoji balso gali atrodyti niekam verta, tačiau pakankamas kiekis šių trupmeninių balsų gali sukelti didelius pokyčius ir padėti kitiems filmams surinkti kvotą. Jei vėl atsiranda perteklinių balsų, tai jie vėl grąžinami likusiems filmams laikantis tų pačių aukščiau aprašytų taisyklių; priešingu atveju vėl šalinamas filmas. Aišku, kad po kelių pašalinimo, perdavimo, pašalinimo ... ciklų penki filmai surinks pakankamą kvotą ir bus įtraukti į sąrašą. Tuo šis etapas pasibaigia.

Šis balsavimo metodas taikomas ne tik skiriant Kino akademijos apdovanojimus. Juo naudojamasi renkant JAV profesinių sąjungų vadovus, taip pat Airijos senato narius.

3 PRIEDAS. Lygiųjų sprendimas

Prisipažinsime, kad dauguma šiame skyriuje pateiktų pavyzdžių buvo rūpestingai parinkti taip, kad nebūtų lygiųjų. Tačiau gyvenime lygiosios dažnai būna neišvengiamos.

Šiame priede labai trumpai aptarsime, kaip galima išspręsti susidariusias lygiąsias. Sprendžiant lygiąsias, kartais kyla gana sudėtingų problemų, tačiau čia nesistengsime smulkiai išnagrinėti visų lygiųjų sprendimo būdų, o tik aptarsime, kokių kyla sunkumų ir kaip juos galima įveikti.

Iš pradžių panagrinėkime rinkimus iš dviejų kandidatų (A ir B) ir tokią vertinimų lentelę:

Balsavusiųjų skaičius	10	10
1 vieta	A	B
2 vieta	B	A

Visiškai aišku, kad nė vienu anksčiau aptartu balsavimo metodu negalima nustatyti, ar A vertingesnis už B, ar B vertingesnis už A. Jei A ir B

sukeistume vietomis, vertinimų lentelė būtų lygiai tokia pat. Nė vienas iš kandidatų nėra labiau vertinamas už kitą, ir lygiosios neišvengiamos. Šias lygiąsias mes galėtume pavadinti **esminėmis lygiosiomis**.

Dabar nagrinėkime rinkimus iš trijų kandidatų (A, B ir C) ir tokią vertinimų lentelę:

Balsavusiųjų skaičius	7	7	7
1 vieta	*A*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*C*	*A*
3 vieta	*C*	*A*	*B*

Čia taip pat susidarė esminės lygiosios: jokiu balsavimo metodu neįmanoma nustatyti kurio nors kandidato pranašumo. Bet kuriems dviem kandidatams susikeitus vardais, mes nepastebėtume jokių pasikeitimų!

Sprendžiant esmines lygiąsias, negalima sugalvoti jokio pagrįsto būdo, todėl esame priversti arba leisti spręsti atsitiktinumui (mesti monetą, traukti burtus ir pan.), arba pakviesti tarti savo žodį trečiąją šalį (tai galėtų būti klubo prezidentas, komiteto pirmininkas ar mama), arba atsižvelgti į tam tikras tradicijas (pareigas, amžių ir pan.).

Laimei, daugelis lygiųjų nėra esminės ir gali būti išspręstos kokiu nors bešališku būdu, taikant kokias nors lygiųjų sprendimo taisykles arba tokį balsavimo metodą, kuriame lygiosios yra neįmanomos. Tai pailiustruosime pavyzdžiu.

Nagrinėkime rinkimus iš 5 kandidatų (A, B, C, D ir E). Balsavime dalyvauja 22 rinkėjai. Vertinimų lentelė tokia:

Balsavusiųjų skaičius	5	3	5	3	2	4
1 vieta	*A*	*A*	*C*	*D*	*D*	*B*
2 vieta	*B*	*B*	*E*	*C*	*C*	*E*
3 vieta	*C*	*D*	*D*	*B*	*B*	*A*
4 vieta	*D*	*C*	*A*	*E*	*A*	*C*
5 vieta	*E*	*E*	*B*	*A*	*E*	*D*

Taikydami dvikovų metodą, gauname:

A prieš B (13: 9) – A laimi;
A prieš C (12:10) – A laimi;
A prieš D (12:10) – A laimi;
A prieš E (10:12) – E laimi;
B prieš C (12:10) – B laimi;
B prieš D (12:10) – B laimi;
B prieš E (17: 5) – B laimi;

C prieš D (14: 8) – C laimi;
C prieš E (18: 4) – C laimi;
D prieš E (13: 9) – D laimi.

A gavo 3 taškus, B – 3 taškus, C – 2 taškus, D – 1 tašką ir E – 1 tašką. Taigi A ir B turi po lygiai taškų.

Šias lygiąsias galima išspręsti įvairiais būdais. Pavyzdžiui,

1. Remtis nugalėtojų dvikovos rezultatu. Kadangi A laimi prieš B (13:9), tai lygiosios išsprendžiamos A naudai.
2. Remtis bendru taškų skirtumu. Pavyzdžiui, A laimi prieš B santykiu 13:9 (kandidato A taškų skirtumas yra $+4$), A pralaimi prieš E santykiu 10:12 (taškų skirtumas kandidatui A yra -2). Susumavę bendrą kandidato A taškų skirtumą, gauname $4+2+2-2=6$. Panašiai suskaičiuojamas kandidato B bendras taškų skirtumas: $-4+2+2+12=12$. Šį kartą kandidato B taškų skirtumas yra didesnis, todėl jis skelbiamas nugalėtoju.
3. Suskaičiuoti pirmąsias vietas. Šiame pavyzdyje A surinko 8, o B – 4 pirmosios vietos balsus. Todėl šiuo metodu nugalėtojas yra A.
4. Pritaikyti taškų metodą nugalėtojams. Šiame pavyzdyje turime

   Kandidatas A: $5\cdot 8+3\cdot 4+2\cdot 7+1\cdot 3=69$ taškai.

   Kandidatas B: $5\cdot 4+4\cdot 8+3\cdot 5+1\cdot 5=72$ taškai.

   Šiuo metodu lygiosios išsprendžiamos kandidato B naudai.

Dabar mes jau nebesistebime skirtingais lygiųjų sprendimo rezultatais, kai taikomi skirtingi metodai. Nebesistebime, kad nėra vienintelio **teisingo** metodo lygiosioms išspręsti. Iš ką tik pateiktų pavyzdžių galima padaryti išvadą, kad mesti monetą – tai visai nebloga mintis!



2 Svorinės balsavimo sistemos

Pirmasis civilizuotos valstybės principas – valdžia teisėta tik tada, kai dėl jos yra susitarta.
V. LIPMANAS
(WALTER LIPPMANN)

Kas galingesnis?

Daugelyje balsavimo situacijų principas *vienas asmuo – vienas balsas* nėra priimtinas. Visai natūralu, kad visuomenėje skirtingi žmonės ar socialinės grupės yra nevienodai reikšmingos, ir į tai tenka atsižvelgti balsavimo metu – vienų nuomonė yra svaresnė nei kitų. Pats paprasčiausias pavyzdys: kai laikas nuspręsti, kur atostogauti, tėčio ar mamos nuomonė visuomet yra svaresnė, nei vaikų. Kitas pavyzdys: akcinės bendrovės susirinkime kiekvienas akcininkas turi tiek balsų, kokia yra jo akcijų dalis. Daugelyje organizacijų tik valdybos pirmininkas turi lemiamą balsą sprendžiant lygiąsias, ir nė vienas kitas valdybos narys neturi tokios galios.

Šiame skyriuje nagrinėsime tokias balsavimo sistemas, kuriose balsuojantieji nėra lygiaverčiai. Jos vadinamos **svorinėmis balsavimo sistemomis**. Tai reiškia, kad kai kurių balsuojančiųjų nuomonė turi didesnį „svorį“, – jie turi didesnę galią ir įtaką nei kiti balsuojantys. Paprastumo dėlei laikysime, kad balsavimas vyksta tik dėl dviejų alternatyvų ar kandidatų. Kai balsuojant tėra dvi alternatyvos, tokį balsavimą galime vadinti balsavimu „taip – ne“. Tai reiškia, kad pritariama arba nepritariama vadinamajam **pasiūlymui**.

1 skyriuje matėme (žr. 32 pratimą), kad jei balsuojama dėl pasiūlymo, tai galima nesirūpinti dėl balsavimo metodo – bet kuris balsavimo metodas ekvivalentus didžiumos kriterijui. Problema, kurią gvildensime šiame skyriuje, yra valdžios problema: kas balsuojant galingesnis ir kiek valdžios kiekvienas iš tikrųjų turi? (Atkreipkite dėmesį, kad balsavime „vienas asmuo – vienas balsas“ galios problema neiškyla: kai visi balsuojantys lygūs, tai kiekvienas turi lygiai tiek pat galios, kaip ir visi kiti.) Kaip galia pasiskirsto tarp balsuotojų balsavimo metu? Atsakymas į šį klausimą yra svarbus dėl kelių priežasčių. Visų pirma, tai leidžia žmonėms tinkamai orientuotis įvairiose situacijose (juk visada pravartu žinoti, kieno įtaka priimant sprendimus didžiausia). Dar svarbiau, kad tai padeda analizuoti valdžios veiklą ir užkirsti kelią piktnaudžiavimams (ar ne per daug valdžios sutelkta vienose rankose, ar ne per didelę galią turi kai kurie valdžios vyrai?) Vėliau mes dar grįšime prie šio klausimo konkrečiose situacijose.

Šiame skyriuje nuodugniai išsiaiškinsime, kas yra galia ir kaip ją galima išmatuoti, tačiau prieš tai aptarsime kelias naujas sąvokas ir išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

SVORINĖS BALSAVIMO SISTEMOS

Sąvokos

Kiekvieną svorinę balsavimo sistemą sudaro trys pagrindiniai elementai: dalyviai, jų svoriai ir kvota. **Dalyviai** – tai balsavimo procedūroje dalyvaujantys balsuotojai. Aiškumo dėlei terminą „balsuotojas“ paprastai vartosime kalbėdami apie balsavimo sistemą „vienas asmuo – vienas balsas“, o terminą „dalyvis“ – kalbėdami apie svorines balsavimo sistemas. Šiame skyriuje dalyvių vardus žymėsime simboliais $D_1, D_2, \ldots, D_N$ – tai patogiau, negu nurodyti vardus. Kiekvienas dalyvis turi tam tikrą balsų skaičių, kuris vadinamas dalyvio **svoriu**. Simboliais $s_1, s_2, \ldots, s_N$ žymėsime atitinkamų dalyvių $D_1, D_2, \ldots, D_N$ svorius. Ir pagaliau, **kvota** – tai minimalus balsų skaičius, reikalingas pasiūlymui priimti. Kvotą žymėsime raide k.

Svarbu pažymėti, kad balsų didžiuma (daugiau nei 50%) – tai dar nebūtinai kvota. Daugeliu atvejų balsų didžiumos nepakanka pasiūlymui priimti. Pavyzdžiui, pirmalaikiai Seimo rinkimai Lietuvoje gali būti rengiami Seimo nutarimu, jei už tokį nutarimą balsuoja ne mažiau kaip 3/5 visų Seimo narių (Lietuvos Respublikos Konstitucija, 58 str.). Kitose situacijose taisyklės gali numatyti, kad reikia 75% balsų arba 83% balsų (kodėl gi ne?) ar net visų 100% (visuotinis susitarimas, dar vadinamas *konsensusu*). Taigi kvota k gali būti bet kuris skaičius, didesnis už pusę bendro visų balsų skaičiaus, bet ne didesnis už bendrą balsų skaičių. Tai galima užrašyti taip:

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{2} < k \leqslant s_1 + s_2 + \cdots + s_N.$$

Žymėjimai ir pavyzdžiai

Įprasta ir patogu svorines balsavimo sistemas aprašyti taip:

$$[k: \ s_1, s_2, \ldots, s_N].$$

Pirmoje vietoje visada nurodoma kvota, o po dvitaškio – atitinkami atskirų dalyvių svoriai.

---

1 pavyzdys. [25: 8, 6, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1].
Tai svorinė balsavimo sistema iš 12 dalyvių ($D_1, D_2, \ldots, D_{12}$). D_1 turi 8 balsus, D_2 – 6 balsus, D_3 – 5 balsus ir t.t. Bendras balsų skaičius yra 36. Kvotą sudaro 25 balsai.

---

2 pavyzdys. [7: 5, 4, 4, 2].
Ši svorinė balsavimo sistema neturi prasmės, nes kvota (7) yra mažesnė nei pusė bendro balsų skaičiaus (15). Jei D_1 ir D_4 pasisako už pasiūlymą, o D_2 ir D_3 pasisako prieš jį, tai abi grupės laimi. Tai matematinis anarchijos ekvivalentas, todėl mes laikysime šią balsavimo sistemą neteisėta.

---

3 pavyzdys. [17: 5, 4, 4, 2].
Čia kvota yra per didelė. Šioje svorinėje balsavimo sistemoje joks pasiūlymas niekada nebus priimtas. Tokia situacija taip pat neleistina.

---

4 pavyzdys. [11: 4, 4, 4, 4, 4].
Šioje svorinėje balsavimo sistemoje visi 5 dalyviai yra lygūs. Pasiūlymui priimti reikia bent trijų iš penkių dalyvių pritarimo. Pastebėsime, kad, kvotai pasikeitus į 12, situacija liktų ta pati – pasiūlymui priimti reikėtų bent trijų iš penkių dalyvių pritarimo. Iš tikrųjų čia turime balsavimo situaciją „vienas asmuo – vienas balsas", kur galioja didžiumos kriterijus. Šią balsavimo sistemą galėtume aprašyti ir taip: [3: 1, 1, 1, 1, 1].

---

5 pavyzdys. [15: 5, 4, 3, 2, 1].
Čia yra 5 dalyviai, turintys iš viso 15 balsų. Kadangi kvota yra 15, tai pasiūlymas gali būti priimtas tik visuotiniu dalyvių susitarimu. Kuo ši balsavimo sistema skiriasi nuo sistemos [5: 1, 1, 1, 1, 1]? Pastarąją irgi sudaro 5 dalyviai, ir vienintelis būdas pasiūlymą priimti yra visuotinis dalyvių susitarimas. Praktiniu požiūriu abi balsavimo sistemos atspindi tą pačią situaciją.

Taigi iš 5 pavyzdžio išplaukia, kad būtina skirti tokius dalykus, kaip įtaka rinkimų rezultatams ir balsų skaičius: čia dalyviai *turi vienodą įtaką rinkimų rezultatui*, nors visi turi skirtingą *balsų skaičių*. Aišku, kad tai yra ne tas pats!

Galia. Papildomos sąvokos. Nauji pavyzdžiai

Balsavimo dalyvio įtaką priimant pasiūlymą vadinsime dalyvio **galia**. Iš 5 pavyzdžio visiškai aišku, kad dalyvio galios negalima išmatuoti jo turimų balsų skaičiumi. Tai nereiškia, kad nėra jokio ryšio tarp dalyvio turimo balsų kiekio ir jo galios. Jei dalyvis X ir dalyvis Y turi vienodai balsų, tai jie visada turi tą pačią galią. Kita vertus, jei dalyvis X turi, pavyzdžiui, keturis balsus, o dalyvis Y – du balsus, mes negalime daryti išvados, kad dalyvis X turi du kartus didesnę galią negu dalyvis Y. Mes tegalime pasakyti viena – kad X niekada neturės *mažiau* galios negu Y – kitaip tai visiškai neatitiktų mūsų supratimo apie galią. (Žr. 23 ir 24 pratimus.)

Prieš apibrėždami galią matematiškai (iš tikrųjų mes pateiksime du skirtingus apibrėžimus), išnagrinėkime dar kelis svorinių balsavimo sistemų pavyzdžius, stengdamiesi intuityviai suprasti, kas gi yra ta galia.

---

6 pavyzdys. [11: 12, 5, 4].

Šioje situacijoje vienas dalyvis (D_1) turi pakankamai balsų, kad galėtų viską nuspręsti vienas pats. Toks dalyvis pats vienas turi visą sprendimo galią, todėl nenuostabu, kad tokį dalyvį vadinsime **diktatoriumi**.

Diktatorius – tai dalyvis, kurio svoris didesnis arba lygus kvotai. Beje, kai yra diktatorius, visi kiti dalyviai neturi jokios galios. Dalyvis, kuris neturi galios, t.y. neturi jokios įtakos rinkimų rezultatams, vadinamas **beverčiu**.

---

7 pavyzdys. [12: 11, 5, 4, 2].

Šiame pavyzdyje vienas dalyvis (D_1) nors ir nėra diktatorius, tačiau turi pakankamai balsų, kad galėtų sužlugdyti bet kokį jam nepriimtiną pasiūlymą. Net jei kiti dalyviai susivienytų, jiems nepavyktų priimti pasiūlymo prieš jo valią.

Dalyvis, kuris nėra diktatorius, tačiau vienas pats gali užkirsti kelią bet kokiai dalyvių grupei priimti pasiūlymą, vadinamas dalyviu, turinčiu **veto balso galią**.

---

8 pavyzdys. [101: 99, 98, 3].

Kaip galia pasiskirsčiusi šioje balsavimo sistemoje? Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad D_1 ir D_2 turi labai daug galios, tuo tarpu D_3 – visai mažai (jei iš viso jos turi). Tačiau atidžiau pažiūrėję, pastebime, kad pasiūlymui priimti reikia dviejų dalyvių pritarimo, ir tam užtenka bet kurių dviejų dalyvių. Todėl šiuo atveju D_3 su savo menkais trimis balsais turi tiek pat galios, kiek ir kiti du dalyviai. Nors ir sunku patikėti, tačiau taip yra: visi trys dalyviai šioje balsavimo sistemoje turi vienodą galią.

BANŽAFO GALIOS RODIKLIS

Dabar jau esame pasirengę susipažinti su pirmąja svorinių balsavimo sistemų matematine interpretacija. Šį galios apibrėžimą 1965 metais pasiūlė Dž. Banžafas*.

Vėl grįžkime prie svorinės balsavimo sistemos [101: 99, 98, 3] (8 pavyzdys) ir panagrinėkime ją kiek smulkiau. Nors šis pavyzdys yra visiškai paprastas, tačiau jis padės geriau suprasti keletą naujų svarbių sąvokų.

Kokie dalyviai gali taip sutelkti jėgas, kad sudarytų laiminčią grupę? Aišku, kad tokios grupės yra keturios:

- D_1 ir D_2 (ši grupė turi 197 balsus);
- D_1 ir D_3 (ši grupė turi 102 balsus);
- D_2 ir D_3 (ši grupė turi 101 balsą, to irgi pakanka pergalei);
- D_1, D_2 ir D_3 (ši grupė turi visus balsus).

Nuo šiol laikysimės balsavimo teorijoje vartojamų terminų, ir bet kokią dalyvių grupę, kuri balsuoja kartu, vadinsime **koalicija**. Žodį „koalicija“ mes vartosime pačia bendriausia prasme. Laikysime, kad vienas dalyvis taip pat yra koalicija. Bendrą balsų skaičių, kurį turi koalicija, vadinsime **koalicijos svoriu**. Aišku, kai kurios koalicijos turi pakankamai balsų pergalei, kitos – ne. Pirmąsias vadinsime **laiminčiosiomis koalicijomis**, antrąsias – **pralaiminčiosiomis**.

Ypač patogu koalicijas aprašyti matematiškai, naudojantis aibių teorijos žymėjimais ir sąvokomis. Pavyzdžiui, koalicija iš dalyvių D_1 ir D_2 gali būti užrašyta kaip aibė $\{D_1, D_2\}$; koalicija iš vieno dalyvio D_2 gali būti užrašyta kaip aibė $\{D_2\}$ ir t.t. Todėl 8 pavyzdžio visas įmanomas koalicijas galime surašyti taip:

	Koalicija	Koalicijos svoris	Laiminčioji ar pralaiminčioji?
a	$\{D_1\}$	99	Pralaiminčioji
b	$\{D_2\}$	98	Pralaiminčioji
c	$\{D_3\}$	3	Pralaiminčioji
d	$\{D_1, D_2\}$	197	Laiminčioji
e	$\{D_1, D_3\}$	102	Laiminčioji
f	$\{D_2, D_3\}$	101	Laiminčioji
g	$\{D_1, D_2, D_3\}$	200	Laiminčioji

Panagrinėję laiminčiąsias koalicijas, pastebime tokį dalyką: koalicijos d (taip pat e ar f) pergalei pasiekti būtinai reikalingi abu dalyviai (jei kuris nors dalyvis paliktų koaliciją, likęs koalicijoje pralaimėtų); koalicijoje g nei

* Dž. Banžafas (John Banzhaf) buvo teisininkas, o ne matematikas; labiausiai domėjosi centrinės ir vietinės valdžios lygybės ir teisingo paskirstymo klausimais.

vienas atskiras dalyvis nelemia pergalės (jei kuris nors vienas dalyvis paliktų koaliciją, likę koalicijoje vis tiek laimėtų).

Dalyvis, kuriam palikus laiminčiąją koaliciją, ji tampa pralaiminčiąja, turi tam tikrą galios kiekį; tokį dalyvį vadinsime koalicijos **kritiniu dalyviu**. Beje, laiminčioji koalicija dažnai turi daugiau kaip vieną kritinį dalyvį ir retai kada ji neturi nė vieno kritinio dalyvio. Pralaiminčioji koalicija niekada neturi kritinio dalyvio.

Banžafo galios rodiklio apibrėžimas remiasi kritinio dalyvio sąvoka – kuo dažniau dalyvis yra kritinis, tuo didesnę jis turi galią: dalyvio galia yra proporcinga skaičiui, kiek kartų dalyvis yra **kritinis**.

Dabar galime tiksliai apibrėžti kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklį bet kokioje svorinėje balsavimo sistemoje iš N dalyvių.

Dalyvio D Banžafo galios rodiklio nustatymas

- **1 žingsnis.** Sudarome visų galimų koalicijų sąrašą.
- **2 žingsnis.** Nustatome, kurios koalicijos yra laiminčiosios.
- **3 žingsnis.** Nustatome kiekvienos laiminčiosios koalicijos kritinius dalyvius.
- **4 žingsnis.** Suskaičiuojame, kiek kartų dalyvis D yra kritinis. Šį skaičių pažymime P.
- **5 žingsnis.** Suskaičiuojame, kiek kartų visi dalyviai yra kritiniai. Šį skaičių pažymime B.

Tuomet dalyvio D Banžafo galios rodiklis yra P/B.

9 pavyzdys. Rasime kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklį svorinėje balsavimo sistemoje [4: 3, 2, 1].

- **1 žingsnis.** Galimos septynios koalicijos. Tai:

  $\{D_1\}$, $\{D_2\}$, $\{D_3\}$, $\{D_1, D_2\}$, $\{D_1, D_3\}$, $\{D_2, D_3\}$, $\{D_1, D_2, D_3\}$.
- **2 žingsnis.** Laiminčiosios koalicijos yra

  $\{D_1, D_2\}$, $\{D_1, D_3\}$ ir $\{D_1, D_2, D_3\}$.
- **3 žingsnis.**

Laiminčioji koalicija	Kritiniai dalyviai
$\{D_1, D_2\}$	D_1 ir D_2
$\{D_1, D_3\}$	D_1 ir D_3
$\{D_1, D_2, D_3\}$	D_1

- **4 žingsnis.**

  D_1 yra kritinis tris kartus.

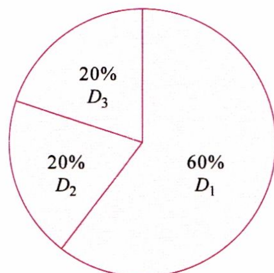
  D_2 yra kritinis vieną kartą.

  D_3 yra kritinis vieną kartą.

- **5 žingsnis.** $B = 5$.

  Dalyvių Banžafo galios rodikliai yra tokie:

$$D_1\colon\ \frac{3}{5};\ D_2\colon\ \frac{1}{5};\ D_3\colon\ \frac{1}{5}.$$



9 pavyzdžio balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinys.

Visą Banžafo galios rodiklių sąrašą mes toliau vadinsime svorinės balsavimo sistemos **Banžafo galios skirstiniu**.

Kai kas labiau mėgsta procentus, o ne trupmenas. 9 pavyzdyje pateiktos svorinės balsavimo sistemos Banžafo galios rodiklių procentinė išraiška atrodytų taip:

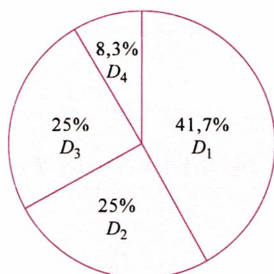
$$D_1\colon\ 60\%;\ D_2\colon\ 20\%;\ D_3\colon\ 20\%.$$

---

10 pavyzdys. Duota svorinė balsavimo sistema [6: 4, 3, 2, 1]. Apskaičiuokime Banžafo galios skirstinį. 2.1 lentelė rodo visas 15 galimų koalicijų ir rezultatus, atlikus pirmus tris žingsnius. (Skaitytojui siūlome viską atlikti nuosekliai.) Kiekvienos koalicijos kritiniai dalyviai yra pažymėti brūkšniu viršuje.

Banžafo galios skirstinys yra:

$$D_1\colon\ \frac{5}{12};\ D_2\colon\ \frac{3}{12};\ D_3\colon\ \frac{3}{12};\ D_4\colon\ \frac{3}{12}.$$



10 pavyzdžio balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinys.

(Pastebėsime, kad visų galios rodiklių suma yra 1. Tai ne atsitiktinumas! Tai praverčia tikrinant, ar skaičiuojant neįsivėlė klaida.)

Koalicija	Koalicijos svoris	Laiminčioji / Pralaiminčioji
$\{D_1\}$	4	L
$\{D_2\}$	3	L
$\{D_3\}$	2	L
$\{D_4\}$	1	L
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\}$	7	P
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_3\}$	6	P
$\{D_1, D_4\}$	5	L
$\{D_2, D_3\}$	5	L
$\{D_2, D_4\}$	4	L
$\{D_3, D_4\}$	3	L
$\{\bar{D}_1, D_2, D_3\}$	9	P
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2, D_4\}$	8	P
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_3, D_4\}$	7	P
$\{\bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_4\}$	6	P
$\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$	10	P

2.1 lentelė. 10 pavyzdžio koalicijos; kritiniai dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

Kiek yra koalicijų?

Dabar nukrypkime kiek į šoną ir panagrinėkime tokį matematinį klausimą: kiek iš duoto dalyvių skaičiaus galima sudaryti skirtingų koalicijų? Čia ypač pravers koalicijų ir aibių panašumas. Mes žinome, kad kiekvienas dalyvių aibės poaibis (išskyrus tuščią poaibį { }) gali sudaryti koaliciją. Taigi radę poaibių skaičių ir atėmę vienetą (kadangi { } nėra koalicija), gausime bendrą koalicijų skaičių. O kiek gi aibė turi poaibių? Pažvelkime į 2.2 lentelę, kur galime greitai rasti atsakymą.

Aibė	Poaibių skaičius	Poaibiai
$\{D_1, D_2\}$	4	$\{\ \}, \{D_1\}, \{D_2\}, \{D_1, D_2\}$
$\{D_1, D_2, D_3\}$	8	$\{\ \}, \{D_1\}, \{D_2\}, \{D_1, D_2\}$, $\{D_3\}, \{D_1, D_3\}, \{D_2, D_3\}, \{D_1, D_2, D_3\}$
$\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$	16	$\{\ \}, \{D_1\}, \{D_2\}, \{D_1, D_2\}, \{D_3\}, \{D_1, D_3\}, \{D_2, D_3\}, \{D_1, D_2, D_3\}$ $\{D_4\}, \{D_1, D_4\}, \{D_2, D_4\}, \{D_1, D_2, D_4\}, \{D_3, D_4\}, \{D_1, D_3, D_4\}, \{D_2, D_3, D_4\}, \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$
$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$	32	Tie patys 16, kaip aukščiau, ir tie patys 16, kaip aukščiau, tik prie kiekvieno pridėta D_5

2.2 lentelė. Aibės poaibiai.

Iš 2.2 lentelės matome, kad kiekvieną kartą, kai atsiranda naujas dalyvis, poaibių skaičius dvigubėja – prie poaibių, kurie buvo prieš atsirandant

naujam dalyviui, prisideda lygiai tie patys poaibiai, tik kiekvienas papildytas nauju dalyviu.

Kadangi kiekvieną kartą, kai atsiranda naujas dalyvis, poaibių skaičius dvigubėja, todėl labai patogu vartoti dvejeto laipsnius. 2.3 lentelėje pateikti mūsų gauti rezultatai.

Dalyviai	Poaibių skaičius	Koalicijų skaičius
$\{D_1, D_2\}$	$2^2 = 4$	$2^2 - 1 = 3$
$\{D_1, D_2, D_3\}$	$2^3 = 8$	$2^3 - 1 = 7$
$\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$	$2^4 = 16$	$2^4 - 1 = 15$
$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$	$2^5 = 32$	$2^5 - 1 = 31$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$	2^N	$2^N - 1$

2.3 lentelė.

11 pavyzdys. Raskime svorinės balsavimo sistemos [15: 9, 6, 3, 3, 3] Banžafo galios skirstinį.

Dabar mes žinome, kad penki dalyviai iš viso gali sudaryti $2^5 - 1 = 31$ koaliciją. Užuot puolę iš karto sudarinėti visų koalicijų sąrašą, pabandykime rasti tik laiminčiąsias koalicijas. Tokių koalicijų nėra labai daug, o iš tikrųjų tik jos ir svarbios. 2.4 lentelėje nurodytos tik laiminčiosios koalicijos, o kiekvienos koalicijos kritiniai dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

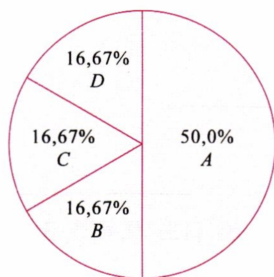
Laiminčiosios koalicijos	
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\}$	Vienintelė laiminčioji dviejų dalyvių koalicija
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2, D_3\}$	Laiminčiosiose trijų dalyvių koalicijose būtinai yra $\bar{D}_1$
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2, D_4\}$	
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_2, D_5\}$	
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_3, \bar{D}_4\}$	
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_3, \bar{D}_5\}$	
$\{\bar{D}_1, \bar{D}_4, \bar{D}_5\}$	
$\{\bar{D}_1, D_2, D_3, D_4\}$	Visos keturių dalyvių koalicijos – laiminčiosios
$\{\bar{D}_1, D_2, D_3, D_5\}$	
$\{\bar{D}_1, D_2, D_4, D_5\}$	
$\{\bar{D}_1, D_3, D_4, D_5\}$	
$\{\bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_4, \bar{D}_5\}$	
$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$	Didžioji koalicija (visi dalyviai)

2.4 lentelė. 11 pavyzdžio laiminčiosios koalicijos; kritiniai dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

Skaitytojui paliekame patikrinti, ar ko nors nepraleidome. Šis pavyzdys rodo, kad kartais galima sutaupyti daug jėgų ir laiko, nagrinėjant tik laiminčiąsias koalicijas.

Svorinės balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinys yra toks:

$$D_1\colon\ \frac{11}{25} = 44\%;\ D_2\colon\ \frac{5}{25} = 20\%;\ D_3\colon\ \frac{3}{25} = 12\%;$$
$$D_4\colon\ \frac{3}{25} = 12\%;\ D_5\colon\ \frac{3}{25} = 12\%.$$



12 pavyzdžio balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinys.

12 pavyzdys. Komitetą sudaro keturi nariai – A, B, C ir D. Šiame komitete kiekvienas narys turi vieną balsą, ir pasiūlymas yra priimamas balsų didžiuma, o lygiųjų 2 : 2 atveju nugali koalicija, kurioje yra komiteto pirmininkas (A). Koks šio komiteto Banžafo galios skirstinys?

Nors dalyvių svoriai nepateikti, tačiau sąlygoje yra visa mums reikalinga informacija. Laiminčiosios koalicijos yra: (1) bet kokia dviejų dalyvių koalicija, kurioje yra pirmininkas, (2) bet kokia trijų dalyvių koalicija, (3) koalicija, kurioje yra visi keturi dalyviai.

2.5 lentelėje nurodytos laiminčiosios koalicijos. Kritiniai dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

Laiminčiosios koalicijos							
$\{\bar{A}, \bar{B}\}$	$\{\bar{A}, \bar{C}\}$	$\{\bar{A}, \bar{D}\}$	$\{\bar{A}, B, C\}$	$\{\bar{A}, B, D\}$	$\{\bar{A}, C, D\}$	$\{\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$	$\{A, B, C, D\}$

2.5 lentelė.

Banžafo galios skirstinys yra:

$$A\colon\ \frac{6}{12} = 50\%;\ B\colon\ \frac{2}{12} \approx 16{,}67\%;\ C\colon\ \frac{2}{12} \approx 16{,}67\%;\ D\colon\ \frac{2}{12} \approx 16{,}67\%.$$

Iš pirmo žvilgsnio visai nekalta lygiųjų sprendimo taisyklė suteikia pirmininkui trigubai didesnę galią negu bet kuriam kitam komiteto nariui. Galbūt, jei komiteto nariai žinotų ir suprastų tai iš anksto, rinktų pirmininku visai kitą žmogų?

13 pavyzdys. Komitetą sudaro penki nariai – pirmininkas (A) ir keturi to paties rango nariai (B, C, D ir E). Šiame komitete pasiūlymas yra priimamas paprasta balsų dauguma, tačiau pirmininkas niekada nebalsuoja, išskyrus tuos

atvejus, kai reikia spręsti lygiąsias. Kaip pasiskirsčiusi galia šioje balsavimo sistemoje?

Ir vėl išrašykime tik laiminčias koalicijas, o kritinius dalyvius pažymėkime brūkšniu viršuje.

Laiminčiosios koalicijos be pirmininko	$\{\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ $\{\bar{B}, \bar{C}, \bar{E}\}$ $\{\bar{B}, \bar{D}, \bar{E}\}$ $\{\bar{C}, \bar{D}, \bar{E}\}$ $\{B, C, D, E\}$	Laiminčiosios koalicijos su pirmininku	$\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}\}$ $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{E}\}$ $\{\bar{A}, \bar{C}, \bar{D}\}$ $\{\bar{A}, \bar{C}, \bar{E}\}$ $\{\bar{A}, \bar{D}, \bar{E}\}$

Banžafo galios skirstinys šiame komitete yra:

$$A\colon \frac{6}{30};\quad B\colon \frac{6}{30};\quad C\colon \frac{6}{30};\quad D\colon \frac{6}{30};\quad E\colon \frac{6}{30}.$$

Tai bent staigmena! Visi nariai (įskaitant pirmininką) turi tą pačią galią.

13 pavyzdyje aprašyta situacija susidaro ir gyvenime: pavyzdžiui, JAV senate balsuoja tik 100 senatorių, o Jungtinių Valstijų viceprezidentas balsuoja tik esant lygiosioms. Panašiai kaip ir 13 pavyzdyje, galima įsitikinti, kad, balsuojant visiems 100 senatorių, viceprezidentas turi tokią pat galią, kaip ir bet kuris kitas senato narys.

Banžafo galios rodiklio taikymas

Jungtinių Tautų Saugumo Taryba. JT Saugumo Taryba yra svarbiausia organizacija, atsakinga už tarptautinio saugumo ir taikos palaikymą. Šiuo metu Saugumo Tarybą sudaro 5 **nuolatiniai nariai** (Didžioji Britanija, JAV, Kinija, Prancūzija ir Rusija) ir 10 papildomų **nenuolatinių narių**, kuriais pagal tam tikras keitimosi taisykles tampa kitos šalys*. Pagal Saugumo Taryboje nustatytas balsavimo taisykles kiekvienas nuolatinis narys turi veto balsą, todėl rezoliucija gali būti nepriimta, nors visi, išskyrus vieną, balsuoja už ją. Be to, kad rezoliucija būtų priimta, už ją turi balsuoti mažiausiai 4 iš 10 nenuolatinių narių. Spręsdami gana sudėtingą (bet įdomų) 36 pratimą, įsitikinsite, kad, esant tokioms taisyklėms, JT Saugumo Taryba gali būti aprašyta kaip svorinė balsavimo sistema [39: 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Kai turime tokį Saugumo Tarybos aprašymą, nesunku apskaičiuoti kiekvienos valstybės Banžafo galios rodiklį. Skaičiavimai nėra sunkūs, ir mes juos praleisime. Trumpai tariant, kiekvieno nuolatinio JT Saugumo Tarybos nario

* Kai Tautų Lyga 1945 metais įsteigė Saugumo Tarybą, nenuolatinių narių buvo tik 6. Jų skaičius 1963 metais buvo padidintas iki 10.

Banžafo galios rodiklis yra $848/5080 = 16,7\%$, tuo tarpu kiekvieno nenuolatinio nario Banžafo galios rodiklis tėra $84/5080 = 1,65\%$. Žvelgiant į praeitį, galima būtų paklausti: ar įkuriant JT Saugumo Tarybą iš tikrųjų buvo siekiama, kad nuolatiniai nariai turėtų 10 kartų daugiau galios negu nenuolatiniai nariai? Greičiausiai – ne, tačiau idealiu atveju galima būtų tikėtis, kad Saugumo Tarybos balsavimo taisyklės bus peržiūrėtos. Tačiau šiuo metu nepanašu, kad 5 nuolatiniai nariai patys sumažintų savo valdžią, todėl mažai tikėtina, jog artimiausiu metu bus priimtos naujos balsavimo taisyklės.

Aukščiau pateiktas pavyzdys rodo bendriausią atvejį, kaip Banžafo galios rodiklis taikomas valdžiai įvertinti. Tokią valdžios įvertinimo procedūrą galima būtų pavadinti aposterioriniu* metodu. Tai reiškia, kad pirmiausia sudaroma svorinė balsavimo sistema ir sutariama, kokiomis taisyklėmis vadovausis organizacija ar įstaiga. Kai taisyklės jau galioja, galima išmatuoti kiekvieno dalyvio valdžią. Dažniausiai dalyvių galios rodikliai neatitinka pirminių ketinimų, ir būtų labai naudinga pakeisti, patobulinti jau nusistovėjusias balsavimo taisykles. Deja, realiame gyvenime tai padaryti yra labai sunku arba neįmanoma.

Yra ir kita valdžios įvertinimo procedūra. Priešingai nei aukščiau aptartu atveju, dalyvių valdžia svorinėje balsavimo sistemoje įvertinama, kai balsavimo taisyklės dar nėra priimtos. Tokiu atveju išeities taškas yra norimas galios skirstinys, o matematinis uždavinys yra atvirkščias – kiek balsų (kokį svorį) turi gauti kiekvienas dalyvis, kad galios skirstinys būtų toks, kokio norima (arba artimas jam)?

Pavyzdys, kurį nagrinėsime dabar, rodo, kaip gali būti įvertinta valdžia svorinėje balsavimo sistemoje, kur balsavimo taisyklės dar nėra priimtos.

Kortlando apygardos atvejis (**Niujorko valstija**). Kortlando apygardą sudaro 19 skirtingų sričių. Iki 1971 metų kiekviena sritis, nepriklausomai nuo gyventojų skaičiaus, apygardos taryboje turėjo lygiai po vieną balsą. 1971 metais valstijos teismas pripažino, kad tokia atstovavimo tvarka pažeidžia JAV Konstituciją. Teismas pareikalavo, kad būtų priimta balsavimo sistema, kuri tenkintų du reikalavimus: (1) kiekvienos srities galia turi būti apytiksliai proporcinga jos gyventojų skaičiui ir (2) galia turi būti matuojama Banžafo galios rodikliu.

Remiantis šiais nurodymais, 1974 metais įsigaliojo naujas įstatymas, pagal kurį Kortlando apygardos Taryba pradėjo veikti kaip svorinė balsavimo sistema, kurioje kiekviena sritis turi vieną atstovą, tačiau skirtingi atstovai turi skirtingą balsų skaičių (mažiausiai 19 ir daugiausiai 32). Faktinis balsų skaičius, kurį gauna kiekvienas tarybos narys, nustatomas pasitelkus kompiuterio programą.

* *a posteriori* (lotyniškai) – paskesnis, po to.

ŠAPLIO–ŠUBIKO GALIOS RODIKLIS

Kitą galios matavimo būdą svorinėje balsavimo sistemoje 1954 metais pasiūlė L. Šaplis ir M. Šubikas*. Jų pateiktas galios apibrėžimas skiriasi nuo Banžafo tuo, kad čia kalbama apie **nuosekliąsias koalicijas**. Šaplio ir Šubiko metodu koalicijos sudaromos nuosekliai: kiekviena koalicija prasideda nuo vieno dalyvio, po to prie jos gali prisijungti antras dalyvis, vėliau – trečias ir taip toliau iki paskutinio dalyvio. Taigi pakankamai sudėtinga situacija yra dar labiau pasunkinama – šiuo atveju svarbu, kokia eilės tvarka dalyviai prisijungia prie koalicijos.

Bandysime paaiškinti šį skirtumą paprastu pavyzdžiu. Remiantis Banžafo metodu, koalicija $\{D_1, D_2, D_3\}$ reiškia tik tai, kad D_1, D_2 ir D_3 sutelkė jėgas ir nori balsuoti kartu. Mums visai nerūpi ir mes net negalvojame apie tai, kas koalicijoje buvo pirmas, kas antras, o kas trečias. Remiantis Šaplio ir Šubiko metodu, tie patys trys dalyviai gali suformuoti *šešias* skirtingas koalicijas: $\langle D_1, D_2, D_3\rangle$ (tai reiškia, kad D_1 įkūrė koaliciją, D_2 prisidėjo antras, o D_3 – trečias); $\langle D_1, D_3, D_2\rangle$; $\langle D_2, D_1, D_3\rangle$; $\langle D_2, D_3, D_1\rangle$; $\langle D_3, D_1, D_2\rangle$; $\langle D_3, D_2, D_1\rangle$. Atkreipiame dėmesį į pasikeitusį žymėjimą – ženklas $\langle\ \rangle$ reikš, kad kalbama apie nuosekliąją koaliciją, ir mums svarbi dalyvių išvardijimo tvarka.

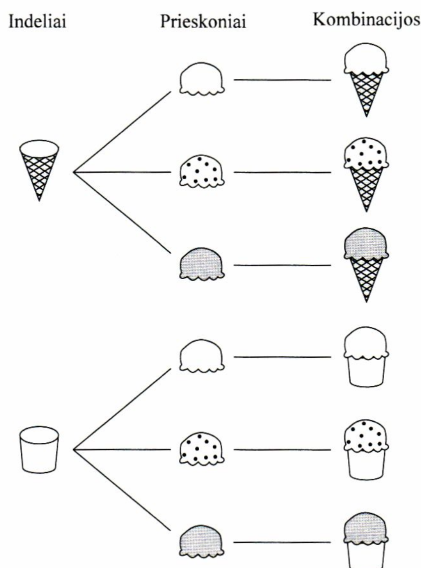
Faktorialai

Dabar išsiaiškinsime vieną matematinį klausimą. Sakykime, kad dalyvių skaičius yra N; kiek iš viso nuosekliųjų koalicijų galima sudaryti iš N dalyvių? Jau matėme, kad trys dalyviai gali sudaryti šešias nuosekliąsias koalicijas: $\langle D_1, D_2, D_3\rangle$, $\langle D_1, D_3, D_2\rangle$, $\langle D_2, D_1, D_3\rangle$, $\langle D_2, D_3, D_1\rangle$, $\langle D_3, D_1, D_2\rangle$ ir $\langle D_3, D_2, D_1\rangle$. Kas atsitiks, jei bus keturi dalyviai? Mes galėtume pabandyti išrašyti visas nuosekliąsias koalicijas – tačiau tai varginanti ir nuobodi užduotis. Geriau svarstykime šitaip: pirmai koalicijos vietai užpildyti yra 4 galimybės (kiekvienas iš keturių dalyvių); antrai koalicijos vietai užpildyti yra 3 galimybės (kiekvienas iš dalyvių, išskyrus tą, kuris jau nurodytas pirmoje vietoje); trečiai koalicijos vietai užpildyti yra tik 2 galimybės; paskutinei vietai užpildyti tėra viena galimybė. Kaip reikia susieti šias galimybes, norint gauti reikalingą atsakymą? Ogi sudauginti! Taigi bendras galimų nuosekliųjų koalicijų iš keturių dalyvių skaičius yra $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Liko neatsakyta į vieną klausimą: kodėl mes sudauginome šiuos skaičius? Atsakymas glūdi fundamentalioje matematikos taisyklėje, vadinamoje **sandaugos taisykle**: *jei darbą X galima atlikti m skirtingų būdų, o darbą Y galima atlikti n skirtingų būdų, tai X ir Y kartu galima atlikti* $m \times n$ *skirtingų būdų.*

* L. Šaplis (Lloyd Shapley) – matematikas, dirbęs Rando korporacijoje (Rand Corporation), o M. Šubikas (Martin Shubik) – ekonomistas iš Jeilio universiteto (Yale University).

Pavyzdžiui, jei parduotuvėje prekiaujama trijų prieskonių ledais dviejų skirtingų formų indeliuose, tai pagal sandaugos taisyklę iš viso yra $3 \times 2 = 6$ skirtingos kombinacijos. Žemiau esantis paveikslėlis rodo, kodėl taip yra.



Sandaugos taisyklę smulkiau nagrinėsime 15 skyriuje. O dabar grįžkime prie mūsų uždavinio.

Dabar mes jau galime atsakyti į klausimą apie nuosekliųjų koalicijų skaičių. Esant 5 žaidėjams, nuosekliųjų koalicijų skaičius yra $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, o bendru atveju

> Nuosekliųjų koalicijų iš N dalyvių skaičius yra $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$

Tarp kitko, šioje knygoje skaičių $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$ rasime dar ne kartą – tai dažnas paukštis matematikos padangėje; jis vadinamas N **faktorialu** ir žymimas $N!$. Pavyzdžiui, 5 faktorialas yra žymimas $5!$ ir lygus 120 (nes $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$), o $10! = 3\,628\,800$ (galite patikrinti!).

> Natūraliojo skaičiaus N **faktorialas** yra $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$

Dar apie Šaplio–Šubiko galios rodiklį

Tarkime, kad turime svorinę balsavimo sistemą iš N dalyvių. Jau išsiaiškinome, kad iš viso yra $N!$ skirtingų nuosekliųjų koalicijų, kurias sudaro *visi* dalyviai. Kiekvienoje iš šių koalicijų yra po vieną dalyvį, kuris „persveria

svarstykles“ – jam prisidėjus prie koalicijos, ji iš pralaiminčiosios pasidaro laiminčiąja. Tokį dalyvį vadinsime nuosekliosios koalicijos **lemiamuoju dalyviu**. Pagrindinis Šaplio–Šubiko metodo principas – lemiamajam dalyviui skiriamas ypatingas dėmesys. Bet kuris kitas dalyvis, prisidėjęs prie koalicijos prieš tai ar po to, nevertas tokio dėmesio (beje, mes galime sakyti „prieš tai“ ir „po to“ todėl, kad nagrinėjame nuosekliąsias koalicijas). Remiantis Šaplio ir Šubiko metodu, dalyvio galią galima išmatuoti suskaičiavus, kiek kartų jis yra lemiamasis dalyvis, lyginant su visais kitais dalyviais.

Dalyvio D Šaplio–Šubiko galios rodiklio nustatymo procedūra aprašoma taip:

Dalyvio *D* Šaplio–Šubiko galios rodiklio nustatymas

- **1 žingsnis**. Sudarome visų nuosekliųjų koalicijų iš N dalyvių sąrašą. Jų yra $N!$.
- **2 žingsnis**. Kiekvienoje nuosekliojoje koalicijoje randame lemiamąjį dalyvį (jis yra vienintelis).
- **3 žingsnis**. Suskaičiuojame, kiek kartų dalyvis D yra lemiamasis, ir šį skaičių pažymime S.

Tada dalyvio D Šaplio–Šubiko galios rodiklis išreiškiamas santykiu $S/N!$.

Visų dalyvių Šaplio–Šubiko galios sąrašas vadinamas svorinės balsavimo sistemos **Šaplio–Šubiko galios skirstiniu**.

14 pavyzdys. Vėl nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [4: 3, 2, 1]. Tai ta pati svorinė balsavimo sistema, kurią nagrinėjome 9 pavyzdyje, tik šį kartą ieškosime Šaplio–Šubiko galios skirstinio.

- **1 žingsnis.** Yra $3! = 6$ trijų dalyvių nuosekliosios koalicijos. Tai:

$$\langle D_1,\ D_2,\ D_3\rangle, \langle D_1,\ D_3,\ D_2\rangle, \langle D_2,\ D_1,\ D_3\rangle,$$
$$\langle D_2,\ D_3,\ D_1\rangle, \langle D_3,\ D_1,\ D_2\rangle, \langle D_3,\ D_2,\ D_1\rangle.$$

- **2 žingsnis.** Laiminčiosios koalicijos yra

Nuoseklioji koalicija	Lemiamasis dalyvis
$\langle D_1, D_2, D_3\rangle$	D_2
$\langle D_1, D_3, D_2\rangle$	D_3
$\langle D_2, D_1, D_3\rangle$	D_1
$\langle D_2, D_3, D_1\rangle$	D_1
$\langle D_3, D_1, D_2\rangle$	D_1
$\langle D_3, D_2, D_1\rangle$	D_1

- **3 žingsnis.**

  D_1 yra lemiamasis keturis kartus.

  D_2 yra lemiamasis vieną kartą.

  D_3 yra lemiamasis vieną kartą.

Dalyvių Šaplio–Šubiko galios skirstinys yra toks:

$$D_1\colon\ \frac{4}{6} \approx 66{,}7\%;\quad D_2\colon\ \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%;\quad D_3\colon\ \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%.$$

Palyginę su 9 pavyzdžiu matome, kad abu metodai tikrai skiriasi.

---

15 pavyzdys. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [6: 4, 3, 2, 1]. Tai ta pati svorinė balsavimo sistema, kurią nagrinėjome 10 pavyzdyje. Dabar nustatysime kiekvieno dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklį.

Yra 24 nuoseklios keturių dalyvių koalicijos. Visos jos išrašytos 2.6 lentelėje; lemiamieji dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

$\langle D_1, \bar{D}_2, D_3, D_4\rangle$	$\langle D_2, \bar{D}_1, D_3, D_4\rangle$	$\langle D_3, \bar{D}_1, D_2, D_4\rangle$	$\langle D_4, D_1, \bar{D}_2, D_3\rangle$
$\langle D_1, \bar{D}_2, D_4, D_3\rangle$	$\langle D_2, \bar{D}_1, D_4, D_3\rangle$	$\langle D_3, \bar{D}_1, D_4, D_2\rangle$	$\langle D_4, D_1, \bar{D}_3, D_2\rangle$
$\langle D_1, \bar{D}_3, D_2, D_4\rangle$	$\langle D_2, D_3, \bar{D}_1, D_4\rangle$	$\langle D_3, D_2, \bar{D}_1, D_4\rangle$	$\langle D_4, D_2, \bar{D}_1, D_3\rangle$
$\langle D_1, \bar{D}_3, D_4, D_2\rangle$	$\langle D_2, D_3, \bar{D}_4, D_1\rangle$	$\langle D_3, D_2, \bar{D}_4, D_1\rangle$	$\langle D_4, D_2, \bar{D}_3, D_1\rangle$
$\langle D_1, D_4, \bar{D}_2, D_3\rangle$	$\langle D_2, D_4, \bar{D}_1, D_3\rangle$	$\langle D_3, D_4, \bar{D}_1, D_2\rangle$	$\langle D_4, D_4, \bar{D}_1, D_2\rangle$
$\langle D_1, D_4, \bar{D}_3, D_2\rangle$	$\langle D_2, D_4, \bar{D}_3, D_1\rangle$	$\langle D_3, D_4, \bar{D}_2, D_1\rangle$	$\langle D_4, D_4, \bar{D}_2, D_1\rangle$

2.6 lentelė. 15 pavyzdžio nuosekliosios koalicijos; lemiamieji dalyviai pažymėti brūkšniu viršuje.

Šaplio–Šubiko galios skirstinys yra toks:

$$D_1\colon\ \frac{10}{24};\quad D_2\colon\ \frac{6}{24};\quad D_3\colon\ \frac{6}{24};\quad D_4\colon\ \frac{6}{24}.$$

Palyginę su 10 pavyzdžiu, mes matome, kad šį kartą abu galios skirstiniai yra visiškai vienodi. Būna ir taip!

---

16 pavyzdys. Komitetą sudaro keturi nariai – A, B, C ir D. Šiame komitete kiekvienas narys turi vieną balsą, išskyrus pirmininką (A), kuris turi veto balso galią. Pasiūlymui priimti reikia mažiausiai dviejų balsų (vienas iš jų turi priklausyti pirmininkui). Koks yra Šaplio–Šubiko galios skirstinys šiame komitete?

Žinome, kad yra $4! = 24$ keturių dalyvių nuosekliosios koalicijos, tačiau mes neketiname jų visų išrašyti. Geriau pažiūrėkime, kada kiekvienas dalyvis gali būti lemiamasis. Pirmininkas (A) yra lemiamasis dalyvis kiekvienoje nuosekliojoje koalicijoje, išskyrus tas koalicijas, kuriose jis yra pirmasis. B gali būti lemiamasis tik tada, kai jis yra antras nuosekliojoje koalicijoje, kurioje pirmas yra pirmininkas. Tokios nuosekliosios koalicijos tėra dvi: $\langle A, B, C, D\rangle$ ir $\langle A, B, D, C\rangle$. Todėl dalyvio B Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra $2/24 \approx 8{,}33\%$. Lygiai tie patys argumentai tinka dalyviams C ir D, todėl kiekvieno iš jų Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra $2/24 \approx 8{,}33\%$. Likusi galios dalis $18/24 = 75\%$ priklauso A. Todėl galios skirstinys šiame komitete yra:

$$A\colon\ \frac{18}{24} = 75\%;\quad B\colon\ \frac{2}{24} \approx 8{,}33\%;\quad C\colon\ \frac{2}{24} \approx 8{,}33\%;\quad D\colon\ \frac{2}{24} \approx 8{,}33\%.$$

Paskutinį pavyzdį, kuriame nagrinėsime Šaplio–Šubiko galios rodiklį, mes pasirinkome ypač sudėtingą. Net tiems skaitytojams, kurie suprato ankstesnę medžiagą, teks ilgėliau pasėdėti prie šio pavyzdžio.

---

17 pavyzdys. Rasime Šaplio–Šubiko galios skirstinį svorinėje balsavimo sistemoje $[15\colon\ 9, 6, 3, 3, 3]$. Tai ta pati 11 pavyzdžio svorinė balsavimo sistema.

Nuosekliųjų koalicijų skaičius yra $5! = 120$. Bandykime rasti trumpesnį kelią Šaplio–Šubiko galios rodikliui nustatyti. Pradėkime nuo dalyvio D_5 ir suskaičiuokime, keliose nuosekliose koalicijose jis bus lemiamasis. Jei D_5 nuoseklioje koalicijoje yra pirmas dalyvis, tai jis negali būti lemiamasis – tai akivaizdu. Jei D_5 yra antras dalyvis koalicijoje, tai net geriausiu atveju (kai pirmas yra D_1) jis negali būti lemiamasis. Jei D_5 yra trečias dalyvis koalicijoje, tai jis gali būti lemiamasis tik tada, kai prieš jį jau yra D_1 ir D_3 arba D_1 ir D_4. (Iš tikrųjų: jei D_1 dar nėra koalicijoje, tai neužtenka balsų; jei joje yra D_1 ir D_2, tai balsų per daug!) Schemiškai šią situaciją galime pavaizduoti taip:

$$\langle \underbrace{\ ___,\ ___\ }_{\text{Vienas iš jų yra } D_1},\ D_5,\ \underbrace{\ ___,\ ___\ }_{\text{Vienas iš jų yra } D_2}\rangle.$$

Iš viso tokios koalicijos yra aštuonios: $\langle D_1, D_4, D_5, D_2, D_3\rangle$, $\langle D_4, D_1, D_5, D_2, D_3\rangle$, ... (paliekame skaitytojui užbaigti šį sąrašą).

Kada D_5 gali tapti lemiamasis, jei jis ateina į koaliciją ketvirtas? Truputį pagalvoję, suvokiame, kad taip bus tik tada, jei prieš tai koalicijoje nebuvo D_1. Kitaip sakant,

$$\langle \underbrace{\quad , \quad , \quad}_{D_2,\ D_3 \text{ ir } D_4}, D_5, D_1 \rangle.$$

Iš viso tokių koalicijų yra šešios. (Nesunku jas išrašyti.) Ir pagaliau penktoje (paskutinėje) koalicijos pozicijoje D_5 niekada negali būti lemiamasis.

Dabar aišku, kad D_5 yra pagrindinis iš viso keturiolikoje koalicijų, todėl jo Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 14/120. O kaip su D_4 ir D_3? Tai jau lengva. Viskas, kas teisinga D_5, teisinga D_4 ir D_3, todėl kiekvienas iš jų lemiamasis yra keturiolikoje nuosekliųjų koalicijų. Dabar imkime D_2 ir leiskime paveikslėliams kalbėti patiems už save.

D_2 yra lemiamasis antroje pozicijoje:

$$\langle D_1, D_2, \underbrace{\quad , \quad , \quad}_{D_3,\ D_4 \text{ ir } D_5} \rangle.$$

Iš viso tokių koalicijų yra šešios. (Yra 6 skirtingi būdai D_3, D_4 ir D_5 perstatyti tarpusavyje.)

D_2 yra lemiamasis trečioje pozicijoje:

$$\langle \underbrace{\quad , \quad}_{\substack{\text{Vienas iš} \\ \text{jų yra } D_1}}, D_2, \quad , \quad \rangle.$$

Iš viso tokių koalicijų yra dvylika. (Patikrinkite!)

D_2 yra lemiamasis ketvirtoje pozicijoje:

$$\langle \underbrace{\quad , \quad , \quad}_{D_3,\ D_4 \text{ ir } D_5}, D_2, D_1 \rangle.$$

Iš viso tokių koalicijų yra šešios.

Kadangi D_2 negali būti lemiamasis nei pirmoje, nei paskutinėje pozicijoje, tai tuo viskas ir baigiasi. D_2 yra lemiamasis iš viso 24 koalicijose, todėl jo Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 24/120.

Liko D_1. Net ir nieko nedarant aišku, kad D_1 turi būti lemiamasis visose nuosekliosiose koalicijose, kurių dar neįskaičiavome. Jų yra

$$120 - 14 - 14 - 14 - 24 = 54.$$

Todėl D_1 Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 54/120.

Taigi gauname, kad Šaplio–Šubiko galios skirstinys yra

$$D_1\colon \frac{54}{120} = 45\%; \quad D_2\colon \frac{24}{120} = 20\%; \quad D_3\colon \frac{14}{120} \approx 11{,}66\%;$$
$$D_4\colon \frac{14}{120} \approx 11{,}66\%; \quad D_5\colon \frac{14}{120} \approx 11{,}66\%.$$

Matome, kad gavome kiek kitokį nei 10 pavyzdyje galios skirstinį.

Šaplio–Šubiko galios rodiklio taikymas

Ir vėl Jungtinių Tautų Saugumo Taryba. Kaip jau buvo sakyta šiame skyriuje, dabartinė JT Saugumo Taryba formaliai gali būti aprašyta kaip svorinė balsavimo sistema [39: 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Jos penkių nuolatinių narių (turinčių po septynis balsus) Banžafo galios rodiklis yra apie 10 kartų didesnis negu nenuolatinių narių (16,7% : 1,65%). Kas bus, jei vietoj Banžafo rodiklio skaičiuosime Šaplio–Šubiko galios rodiklį? Paaiškėja (skaičiavimai yra per daug sudėtingi, kad aprašytume juos smulkiai), jog penkių nuolatinių narių Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 19,6%, tuo tarpu likusių nenuolatinių narių – 0,2%. Pagal Šaplio–Šubiko galios rodiklį kiekvienas nuolatinis narys turi beveik 100 kartų didesnę galią už nenuolatinį narį!

IŠVADOS

Bet kokioje visuomenėje, ar ji būtų demokratiška, ar ne, atskiri žmonės ar grupės nėra lygūs, todėl natūralu, kad vieni turi didesnę valdžią negu kiti. Jei visi žmonės ar žmonių grupės būtų absoliučiai lygūs, visos kalbos apie valdžią būtų beprasmės.

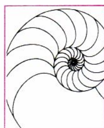
Pati valdžia pasireiškia skirtingomis formomis. Gyvenime girdime sakant „Jėga – tai valdžia“ ar „Vien tik auksas valdo mus“, dabartiniame informacijos amžiuje – „Valdžią turi tas, kas turi informaciją“. Šiame skyriuje nagrinėjome valdžios, arba galios, sąvoką, kiek ji pritaikoma tam tikrose balsavimo situacijose (svorinėse balsavimo sistemose), ir matėme, kaip matematiniai metodai leidžia įvertinti atskirų žmonių ar grupių įtaką *galios rodikliu.* Mes išnagrinėjome skirtingus galios rodiklius – *Banžafo galios rodiklį* ir *Šaplio–Šubiko galios rodiklį.*

Banžafo ir Šaplio–Šubiko galios rodikliai suteikia galimybę įvertinti valdžią dviem skirtingais būdais, ir nors retkarčiais jie sutampa (15 pavyzdys),

tačiau dažniausiai gerokai skiriasi. Kuris gi iš dviejų rodiklių yra arčiau tiesos?

Deja, paprasto atsakymo nėra. Abu šie metodai yra naudingi, ir pasirinkimas, kurį iš jų taikyti, tam tikra prasme yra subjektyvus (t.y. priklauso nuo žmogaus, kuris renkasi). Mes ir neturėtume jų lyginti tiesiogiai, kadangi jie remiasi kiek skirtingomis prielaidomis. Remiantis Banžafo metodu, dalyvis kiekvieną kartą iš naujo gali laisvai tartis su kitais dalyviais dėl koalicijų sudarymo (panašiai kaip nepriklausomi žurnalistai siūlo savo straipsnius įvairiems laikraščiams ar kaip futbolininkas renkasi klubą). Šaplio–Šubiko galios interpretacija remiasi prielaida, kad, prisidėjęs prie koalicijos, dalyvis įsipareigoja joje likti (panašiai kaip tuokdamiesi žmonės įsipareigoja gyventi kartu). Šiuo atveju dalyvio galia priklauso nuo jo sugebėjimo atsirasti *tinkamu laiku tinkamoje vietoje.* Praktikoje pasirinkimą, kuriuo metodu matuoti valdžią, dažniausiai lemia tai, kuri iš šių prielaidų labiau tinka konkrečiai situacijai. Priešingai mūsų lūkesčiams, matematika nepateikia atsakymo, ką daryti ar kaip elgtis, o tik nurodo, kokiomis priemonėmis galima mėginti spręsti problemas.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



Banžafo galios rodiklis
Banžafo galios skirstinys
bevertis dalyvis
dalyviai
diktatorius
faktorialas
koalicija
koalicijos svoris
kritinis dalyvis
kvota
laiminčioji koalicija
lemiamasis dalyvis
nuoseklioji koalicija
pasiūlymas
pralaiminčioji koalicija
svoriai
svorinė balsavimo sistema
Šaplio–Šubiko galios rodiklis
Šaplio–Šubiko galios skirstinys
veto balso galia

PRATIMAI

Apšilimas

1. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [10: 6, 5, 4].

a) Kiek joje yra dalyvių?

b) Kokia yra kvota?

c) Koks svoris koalicijos, kurią sudaro D_1 ir D_2?

d) Išrašykite visas laiminčiąsias koalicijas.

e) Kurie dalyviai yra kritiniai koalicijoje $\{D_1, D_2, D_3\}$?

f) Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinį.

2. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [4: 3, 2, 1, 1].
a) Kiek joje yra dalyvių?
b) Kokia yra kvota?
c) Koks svoris koalicijos, kurią sudaro D_1 ir D_2?
d) Kurie dalyviai yra kritiniai koalicijoje $\{D_2, D_3, D_4\}$?
e) Kurie dalyviai yra kritiniai koalicijoje $\{D_1, D_3, D_4\}$?
d) Išrašykite visas laiminčiąsias koalicijas.
f) Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinį.

3. a) Raskite svorinės balsavimo sistemos [6: 5, 3, 2] Banžafo galios skirstinį.
b) Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 5, 3, 2] Banžafo galios skirstinį.

4. a) Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 5, 4, 3, 2, 1] Banžafo galios skirstinį. (*Nurodymas*. Užtenka išrašyti tik laiminčiąsias koalicijas.)
b) Raskite svorinės balsavimo sistemos [10: 5, 4, 3, 2, 1] Banžafo galios skirstinį. (*Nurodymas*. Atkreipkite dėmesį, kad vienintelis skirtumas tarp punktų a) ir b) – tai kvota. Pasinaudokite šiuo faktu.)

5. Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 5, 5, 3, 1, 1] Banžafo galios skirstinį.

6. Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 5, 5, 2, 1, 1] Banžafo galios skirstinį.

7. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [10: 6, 5, 4].
a) Išrašykite visas nuosekliąsias koalicijas iš trijų dalyvių.
b) Kiekvienoje nuosekliojoje koalicijoje iš punkto a) pažymėkite lemiamąjį dalyvį.
c) Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

8. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [6: 5, 4, 1].
a) Išrašykite visas nuosekliąsias koalicijas iš trijų dalyvių.
b) Kiekvienoje nuosekliojoje koalicijoje iš punkto a) pabraukite lemiamąjį dalyvį.
c) Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

9. a) Raskite svorinės balsavimo sistemos [6: 5, 3, 2] Šaplio–Šubiko galios skirstinį.
b) Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 5, 3, 2] Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

10. Raskite svorinės balsavimo sistemos [8: 4, 3, 2, 1] Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

11. Kiekvienoje svorinėje balsavimo sistemoje nustatykite, kurie dalyviai yra (i) diktatoriai; (ii) turi veto balso galią; (iii) yra beverčiai.
a) [20: 9, 8, 6, 3, 1]; b) [15: 15, 10, 3, 1]; c) [21: 13, 5, 2, 1];
d) [18: 12, 10, 3, 2]; e) [4: 2, 2, 1].

12. Kiekvienoje svorinėje balsavimo sistemoje nustatykite, kurie dalyviai yra (i) diktatoriai; (ii) turi veto balso galią; (iii) yra beverčiai.
a) [19: 9, 8, 6, 3, 1]; b) [25: 25, 10, 10, 4]; c) [10: 6, 5, 2, 1];
d) [18: 9, 6, 2, 1]; e) [10: 5, 5, 5, 2, 1, 1].

13. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 12, 8, 5, 4, 1].
a) Kokia gali būti mažiausia kvota k?
b) Kokia gali būti didžiausia kvota k?
c) Kiek šioje svorinėje balsavimo sistemoje yra koalicijų?
d) Kiek šioje sistemoje yra nuosekliųjų koalicijų, kurioms priklauso visi dalyviai?

14. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 7, 3, 2, 1, 1].
a) Kokia gali būti mažiausia kvota k?
b) Kokia gali būti didžiausia kvota k?
c) Kiek šioje svorinėje balsavimo sistemoje yra koalicijų?
d) Kiek šioje sistemoje yra nuosekliųjų koalicijų, kurioms priklauso visi dalyviai?

15. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 5, 3, 1]. Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Šaplio–Šubiko galios skirstinį, kai a) $k = 5$; b) $k = 6$; c) $k = 7$; d) $k = 8$; e) $k = 9$.

16. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 5, 3, 1]. Raskite šios svorinės balsavimo sistemos Banžafo galios skirstinį, kai a) $k = 5$; b) $k = 6$; c) $k = 7$; d) $k = 8$; e) $k = 9$.

17. Šis pratimas skirtas geriau suprasti faktorialui. Jei jūs net ir turite skaičiuoklį, kuriame yra faktorialo klavišas, naudokitės ne juo, o tik daugybos klavišu. Apskaičiuokite a) 8!; b) 12!; c) 13!; d) 11! (paskutinius du skaičiavimus galima sutrumpinti pasinaudojus punkto b) rezultatu);
e) Raskite x, jei $14x = 14!$ (atsakymo paieškokite aukščiau).

18. Šis pratimas turėtų būti atliktas *be* skaičiuoklio. Skaičiavimo čia nedaug. Atminkite, kad visada geriau pirma prastinti, o po to dauginti. Apskaičiuokite a) 11!/10!; b) 100!/98!; c) 8!/(5!3!); d) 25!/(21!4!).

19. Komercinę bendrovę sudaro keturi partneriai – A, B, C ir D. Priimdami grupinius sprendimus, partneriai turi po vieną balsą ir naudojasi daugumos taisykle. Jei susidaro lygiosios 2 : 2, tada *pralaimi* ta koalicija, kurioje yra D (jauniausias partneris). Koks šioje bendrovėje yra Šaplio–Šubiko galios skirstinys?

20. Koks yra 19 pratimo bendrovės Banžafo galios skirstinys?

Treniruotė

21. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [21: 6, 5, 4, 3, 2, 1]. (Atkreipkite dėmesį, kad čia kvota yra lygi *visų* dalyvių svorių sumai.)

a) Kiek iš viso yra koalicijų?

b) Išrašykite tik laiminčiąsias koalicijas, kritinius žaidėjus pabraukite.

c) Raskite kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklį.

d) Paaiškinkite, kodėl bet kokioje svorinėje balsavimo sistemoje $[k\colon s_1, s_2, \ldots, s_N]$, kai $k = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$, kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklis yra $1/N$.

22. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [21: 6, 5, 4, 3, 2, 1].

a) Kiek iš viso yra skirtingų nuosekliųjų koalicijų?

b) Yra vienintelė galimybė, kada dalyvis yra lemiamasis vienoje iš šių nuosekliųjų koalicijų. Aprašykite ją.

c) Keliose nuosekliosiose koalicijose šeštas dalyvis yra lemiamasis?

d) Koks šešto dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklis?

e) Kokie visų kitų dalyvių Šaplio–Šubiko galios rodikliai?

f) Paaiškinkite, kodėl bet kokioje svorinėje balsavimo sistemoje $[k\colon s_1, s_2, \ldots, s_N]$, kai $k = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$, kiekvieno dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra $1/N$.

23. Pateikite svorinės balsavimo sistemos pavyzdį, kurioje D_1 turi dvigubai daugiau balsų negu D_2, ir dalyvio D_1 Banžafo galios rodiklis yra:

a) didesnis negu dvigubas dalyvio D_2 Banžafo galios rodiklis;

b) mažesnis negu dvigubas dalyvio D_2 Banžafo galios rodiklis;

c) lygus dvigubam dalyvio D_2 Banžafo galios rodikliui;

d) yra lygus dalyvio D_2 Banžafo galios rodikliui.

24. Pateikite svorinės balsavimo sistemos pavyzdį, kurioje D_1 turi dvigubai daugiau balsų negu D_2, ir dalyvio D_1 Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra:

a) didesnis negu dvigubas dalyvio D_2 Šaplio–Šubiko galios rodiklis;

b) mažesnis negu dvigubas dalyvio D_2 Šaplio–Šubiko galios rodiklis;

c) lygus dvigubam dalyvio D_2 Šaplio–Šubiko galios rodikliui;

d) lygus dalyvio D_2 Šaplio–Šubiko galios rodikliui.

25. a) Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [22: 10, 10, 10, 10, 1]. Ar joje yra beverčių dalyvių? Pagrįskite savo atsakymą.

b) Nieko nebedarydami (tik pasinaudoję a) punkto atsakymu), raskite Banžafo ir Šaplio–Šubiko galios skirstinius šioje svorinėje balsavimo sistemoje.

c) Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 10, 10, 10, 10, 1]. Raskite visas galimas k reikšmes, su kuriomis penktas dalyvis yra bevertis.

26. a) Patikrinkite, ar svorinės balsavimo sistemos [12: 7, 4, 3, 2] ir [24: 14, 8, 6, 4] duoda tą patį Banžafo galios skirstinį. (Jei prireiks, skaičiuokite abiem sistemoms lygiagrečiai ir lyginkite.)

b) Remdamiesi a) punkte atliktu darbu, paaiškinkite, kodėl dvi proporcingos svorinės balsavimo sistemos [k: $s_1, s_2, \dots, s_N$] ir [ck: $cs_1, cs_2, \dots, cs_N$] turi tą patį Banžafo galios skirstinį.

27. a) Patikrinkite, ar svorinės balsavimo sistemos [12: 7, 4, 3, 2] ir [24: 14, 8, 6, 4] duoda tą patį Šaplio–Šubiko galios skirstinį. (Jei prireiks, skaičiuokite abiem sistemoms lygiagrečiai ir lyginkite.)

b) Remdamiesi a) punkte atliktu darbu, paaiškinkite, kodėl dvi proporcingos svorinės balsavimo sistemos [k: $s_1, s_2, \dots, s_N$] ir [ck: $cs_1, cs_2, \dots, cs_N$] turi tą patį Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

28. **Bevertis visada bevertis.** Šis pratimas rodo, kad bevertis dalyvis yra bevertis nepriklausomai nuo galios interpretacijos pasirinkimo.

a) Įrodykite, kad jeigu svorinėje balsavimo sistemoje dalyvio Banžafo galios rodiklis yra 0, tai jo Šaplio–Šubiko galios rodiklis taip pat yra 0.

b) Įrodykite, kad jeigu svorinėje balsavimo sistemoje dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 0, tai jo Banžafo galios rodiklis taip pat yra 0.

29. Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [k: 5, 4, 3, 2, 1].

a) Su kokiomis k reikšmėmis balsavimo sistemoje atsiranda beverčių dalyvių?

b) Su kokiomis k reikšmėmis visi dalyviai turi tą pačią galią?

30. Apskaičiuokite a) 4!4!; b) 5!3!; c) 6!2!.

d) Palyginkite a) – c) punktų rezultatus su 8!.

e) Įrodykite, kad bet kokiems dviem teigiamiems sveikiems M ir N teisinga nelygybė $M!N! \leqslant (M+N)!$.

Varžybos

31. a) Pateikite pavyzdį keturių dalyvių svorinės balsavimo sistemos, kurioje dalyvio D_1 Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 3/4.

b) Įrodykite, kad bet kokioje keturių dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje joks dalyvis negali turėti didesnio už 3/4 Šaplio–Šubiko galios rodiklio, net ir būdamas diktatorius.

c) Įrodykite, kad bet kokioje N dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje joks dalyvis negali turėti didesnio už $(N-1)/N$ Šaplio–Šubiko galios rodiklio, net ir būdamas diktatorius.

32. a) Pateikite pavyzdį trijų dalyvių svorinės balsavimo sistemos, kurioje dalyvio D_3 Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 1/3.
b) Įrodykite, kad bet kokioje trijų dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje joks dalyvis negali turėti mažesnio už 1/6 Šaplio–Šubiko galios rodiklio, net ir būdamas bevertis dalyvis.

33. a) Pateikite pavyzdį keturių dalyvių svorinės balsavimo sistemos, kurioje dalyvio D_4 Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra 1/12.
b) Įrodykite, kad bet kokioje keturių dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje joks dalyvis negali turėti mažesnio už 1/2 Šaplio–Šubiko galios rodiklio, net ir būdamas bevertis dalyvis.

34. a) Pateikite pavyzdį N dalyvių svorinės balsavimo sistemos, kurioje veto balso galią turinčio dalyvio Banžafo galios rodiklis yra $1/N$.
b) Įrodykite, kad bet kokioje N dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje veto balso galią turinčio dalyvio Banžafo galios rodiklis ne mažesnis už $1/N$.

35. a) Pateikite pavyzdį N dalyvių svorinės balsavimo sistemos, kurioje veto balso galią turinčio dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklis yra $1/N$.
b) Įrodykite, kad bet kokioje N dalyvių svorinėje balsavimo sistemoje veto balso galią turinčio dalyvio Šaplio–Šubiko galios rodiklis ne mažesnis už $1/N$.

36. Jungtinių Tautų Saugumo Taryba. JT Saugumo Tarybą sudaro 15 šalių – 5 nuolatiniai nariai (Didžioji Britanija, JAV, Kinija, Prancūzija ir Rusija) ir 10 nenuolatinių narių. Kiekvienas iš 5 nuolatinių narių turi veto teisę. Laiminčiąją koaliciją turi sudaryti visi 5 nuolatiniai nariai plius mažiausiai 4 nenuolatiniai nariai. Paaiškinkite, kodėl Saugumo Tarybą galima aprašyti kaip svorinę balsavimo sistemą [39: 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].

37. Pirmoji Jungtinių Tautų Saugumo Taryba. Pirmoji Saugumo Taryba buvo įkurta 1945 metais ir ją sudarė tik 11 valstybių (5 nuolatiniai nariai plius 6 nenuolatiniai nariai). Laiminčiąją koaliciją turėjo sudaryti visi 5 nuolatiniai nariai plius mažiausiai 2 nenuolatiniai nariai. Pateikite pirmosios Saugumo Tarybos kaip svorinės balsavimo sistemos aprašymą.

38. Nepriklausomų masinės informacijos priemonių asociacija (NMIPA). Asociacijai priklauso septyni laikraščiai. Šios asociacijos Tarybą sudaro septyni nariai: asociacijos prezidentas ir dar šeši nariai (laikraščių redaktoriai). Prezidentas turi veto teisę, tačiau koalicija iš penkių tarybos narių pergali prezidento vetavimą.
a) Aprašykite NMIPA Tarybą kaip svorinę balsavimo sistemą.
b) Raskite NMIPA Tarybos Šaplio–Šubiko galios skirstinį.

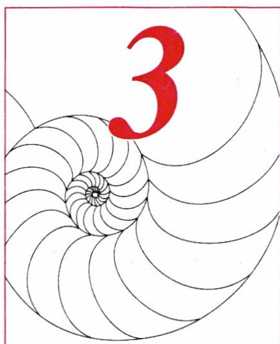
39. Kartais svorinėje balsavimo sistemoje du ar daugiau dalyvių nusprendžia sudaryti sąjungą – susitaria visada balsuoti vienodai. Pavyzdžiui, jei svorinėje balsavimo sistemoje [7: 5, 3, 1] D_2 ir D_3 susivienija, tai svorinė balsavimo sistema pasidaro [7: 5, 4]. Šiame pratime išsiaiškinsime, kokią įtaką galios skirstiniui turi dalyvių susitarimas sudaryti sąjungą ir balsuoti vienodai.

a) Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [4: 3, 2, 1]. 9 pavyzdyje matėme, kad kiekvieno dalyvio D_2 ir D_3 Banžafo galios rodikliai yra 1/5. Tarkime, kad D_2 ir D_3 susivienijo ir tapo vienu dalyviu D. Koks dalyvio D Banžafo galios rodiklis?

b) Nagrinėkime svorinę balsavimo sistemą [5: 3, 2, 1]. Pirmiausia raskite dalyvio D_2 ir D_3 Banžafo galios rodiklius, o po to – dalyvio D (kuris yra D_2 ir D_3 sąjunga) Banžafo galios rodiklį. Palyginkite.

c) Tas pat, kaip b), tik balsavimo sistemai [6: 3, 2, 1].

d) Kokias padarytumėte išvadas iš a), b) ir c)?



Teisingos dalybos

Jūs dar nepažįstate žmogaus, jei nesidalijote su juo palikimo.
B. FRANKLINAS
(BENJAMIN FRANKLIN)

Musę per pusę

Krepšelyje yra penkiasdešimt saldainių. Kaip juos padalyti penkiems vaikams?
UŽDAVINYS IŠ KETVIRTOSIOS KLASĖS MATEMATIKOS UŽDAVINYNO

Visi mes pradinėje mokykloje esame sprendę panašių uždavinių – tai nesudėtingi sveikųjų skaičių dalybos pratimai. Kiek netikėtai šiame skyriuje vėl atgaivinsime šią primirštą temą. Kodėl?

Šiame ketvirtosios klasės uždavinyje neminima savaime suprantama prielaida – visi saldainiai yra vienodi. O jeigu ne? Kaip juos padalyti, jei krepšelyje yra irisų, karamelių, šokoladukų, triufelių ir kitokių saldainių? O ką daryti, jeigu ir vaikų skoniai skiriasi – sakysime, Simas triufelius mėgsta labiau negu karameles ir visai nevalgo irisų, o Eglei irisai patinka labiausiai, bet ji alergiška šokoladui, ir taip toliau ir panašiai. Toks uždavinys dažną galėtų sutrikdyti – padalyti saldainius taip, kad visi vaikai būtų patenkinti, atrodytų, neįmanoma. Tačiau dažniausiai mes tai galėsime padaryti taikydami

gana paprastas procedūras – vadinamąsias teisingų dalybų schemas. Negana to, – tai tiesiog neįtikėtina! – dažniausiai saldainius mums pavyks padalyti taip, kad vaikai bus ne tik patenkinti, bet ir įsitikinę, kad gavo vieną kitą saldainį viršaus.

Šiame skyriuje susipažinsime su keliomis teisingų dalybų schemomis ir aptarsime, kaip ir kada jos taikomos. Tačiau pirmiausia mes turime atsakyti į kertinį klausimą: ar iš tiesų ši tema yra tokia svarbi? Nejaugi kam nors rūpi, kad penki maži vaikai bus laimingesni, sugebėję pasidalyti saldainius? Na, žinoma, vaikai ir saldainiai tėra tik svarbaus ir dažnai iškylančio uždavinio metafora: kaip kokį nors vieną ar keletą daiktų padalyti keliems žmonėms, kad jie visi liktų patenkinti dalybomis?

Palikimo padalijimas įpėdiniams, bendro turto dalybos sutuoktiniams skiriantis, žemės sklypo dalybos ar seimo deputatų vietų skirstymas partijoms – visa tai yra svarbūs to paties *teisingų dalybų* uždavinio atvejai.

TEISINGŲ DALYBŲ UŽDAVINIAI IR SCHEMOS

Šiame skirsnyje išsiaiškinsime įvairių dalybų uždavinių ir jų sprendimo metodų – dalybų schemų – skirtumus.

Bet kurio teisingų dalybų uždavinio elementai yra dalybininkų aibė (D_1, $D_2, \dots, D_N$) ir gėrybių aibė, kurią žymėsime raide G. Dalybų uždavinio sprendimo tikslas – taip padalyti gėrybių aibę į N dalių ($g_1, g_2, \dots, g_N$), kad kiekvienas dalybininkas gautų teisingą aibės G dalį.

Kokia dalis yra teisinga? Teisinga laikysime bet kokią dalį, kuri, ją gaunančio dalybininko nuomone, yra verta bent $1/N$ visos gėrybių aibės G vertės. Pavyzdžiui, jei G dalijasi penki dalybininkai, tai bet kokią dalį, kuri, dalybininko X nuomone, verta bent $1/5$ visos aibės G vertės, laikysime teisinga dalyvio X dalimi.

Formuluodami dalybų uždavinį, nepaminėjome savaime suprantamos prielaidos, kad kiekvienas dalybininkas pats sugeba nuspręsti, ar tam tikra dalis yra teisinga, ar ne. Mes šią prielaidą gerokai praplėsime ir laikysime, kad dalybininkai sugeba nustatyti kiekvienos dalies vertę, išreikštą visos aibės G vertės dalimi („mano nuomone, ši dalis verta $1/3$ visumos, ana – $2/5$“ ir pan.). Nors dažnam ir sunku tiksliai išreikšti skaičiumi savo nuomonę apie daikto vertę, tačiau iš tikrųjų šis sugebėjimas yra labai svarbus mūsų intelekto požymis. Juo remiamės aukcione siūlydami kainą, parduodami važinėtą automobilį ar vertindami merginos ar vaikino išvaizdą. Šis sugebėjimas įgyjamas, todėl savaime kyla tokia visų mūsų dalybų schemų prielaida: laikysime, kad kiekvienas žaidėjas puikiai sugeba įvertinti bet kurį daiktą.

Dalybų schema vadinsime bet kokią nuoseklią procedūrą, kuria išsprendžiamas kurios nors rūšies dalybų uždavinys (toliau nagrinėsime kelių rūšių dalybų uždavinius). Laikysime, kad kiekviena dalybų schema tenkina tokias sąlygas.

- Dalybų procedūra yra *veiksminga*. Tai reiškia, kad, laikantis procedūros taisyklių, gėrybių aibė G tikrai bus padalyta teisingai.
- Dalybų procedūra yra *uždara* dalybininkų atžvilgiu. Tai reiškia, kad dalyboms nereikia jokio pašalinio autoriteto – teisėjo, arbitro ar tėvų – įsikišimo.
- Dalybininkai nežino vienas kito vertinimų. Tai reiškia, kad nė vienas dalybininkas neturi jokios informacijos apie kitų dalybininkų mėgstamus ir nemėgstamus dalykus.
- Dalybininkų veiksmai yra *racionalūs*. Tai reiškia, kad dalybininko vertinimai ir veiksmai pagrįsti logika, o ne emocijomis.

Ir dar viena pastaba apie dalybų schemas – jos negarantuoja, kad kiekvienas dalybininkas gaus teisingą dalį. Dalybininkas gali nukentėti per dalybas ir gauti dalį, kuri jo netenkina (dažniausia to priežastis – godumas). Tačiau griežtai laikantis dalybų schemos, jokie išoriniai veiksniai – nei kelių dalybininkų susimokymas, nei nesėkmė – negali iš dalybininko atimti teisingos dalies.

Dalybų uždavinių rūšys

Pagal gėrybių aibės G sandarą skiriami trijų rūšių – tolydieji, diskretieji ir mišrieji dalybų uždaviniai.

Tolydžiuosiuose dalybų uždaviniuose aibė G gali būti dalijama be galo daugeliu būdų, ir jos dalis galima padidinti ar sumažinti kiek norima mažomis porcijomis. Būdingi tolydžiųjų dalybų uždavinių pavyzdžiai – žemės sklypo, torto, picos, ledų ar limonado butelio dalybos. Didelė pinigų suma, nors teoriškai ir nėra tolydi aibė (cento nepadalysi), tačiau praktiniais sumetimais gali būti taip pat laikoma tolydžia (niekas juk nesiginčija dėl kelių centų).

Diskrečiuosiuose dalybų uždaviniuose aibė G sudaryta iš nedalomų gėrybių – namų, mašinų, laivų, brangenybių ir pan. Beje, nors teoriškai saldainius galima dalyti tolydžiai, tačiau praktiškai saldainių aibę patogiau laikyti diskrečiąja – kietų saldainių lengvai neperlauši jų nesutrupinęs, o minkštus sunku perpjauti nesudarkius. Taigi patogumo dėlei šiame skyriuje laikysime, kad saldainiai yra nedalomi, o jų aibė – diskreti.

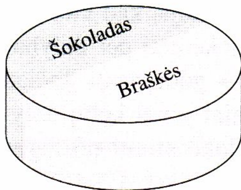
Mišriuosiuose dalybų uždaviniuose vienos gėrybės yra tolydžios, o kitos – diskrečios. Turto, kurį sudaro mašina, namas ir žemės sklypas, dalybos yra mišrusis dalybų uždavinys.

Skirtingų rūšių dalybų uždaviniai sprendžiami skirtingais metodais. Šiame skyriuje pateiksime keletą tolydžiųjų dalybų schemų ir dvi visiškai skirtingas diskrečiųjų dalybų schemas. Mes nenagrinėsime mišriųjų dalybų schemų, nes šiuos uždavinius galima išspręsti, atskyrus tolydžiąją ir diskrečiąją gėrybių aibės G dalį.

Pradėsime nuo neabejotinai geriausiai žinomos dalybų schemos, pagal kurią vienas dalybininkas dalija, o kitas – renkasi.

DALIJANČIOJO IR BESIRENKANČIOJO METODAS

Šia klasikine dalybų schema galima išspręsti bet kurį tolydųjį dalybų uždavinį su dviem dalybininkais. Daugelis iš mūsų esame sąmoningai ar nesąmoningai taikę šį metodą, ir jis yra gerai žinomas vardu „tu lauži — aš renkuosi“. Iš pavadinimo matyti, kad vienas dalybininkas dalija tortą (žodį „tortas“ vartosime kaip bet kurios tolydžiosios aibės G įvaizdį) į du gabalus, o antrasis pasirenka norimą dalį, kitą palikdamas dalytojui. Sąžiningai dalijant tortą šiuo metodu, kiekvienas dalybininkas gaus gabalą, kuris, jo nuomone, vertas *bent pusės* viso torto vertės. Dalijantysis tai sau garantuoja teisingai pjaudamas tortą, o besirenkantysis – paprasčiausiai tuo, kad, padalijus kokį nors daiktą į dvi dalis, viena dalis tikrai bus verta bent pusės to daikto vertės.

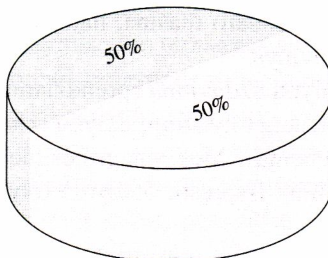


3.1 pav.

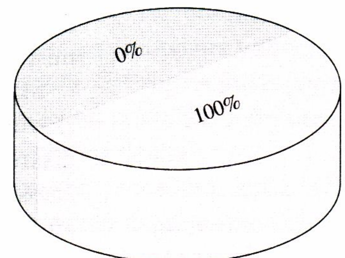
1 pavyzdys. Donatas per pirmąjį pasimatymą su Regina eina į miesto mugę. Už du litus nusipirkę loterijos bilietą, jiedu laimi tortą su šokoladu ir braškėmis, pavaizduotą 3.1 pav. (Iš tiesų jiedu svajojo išlošti raudoną automobilį, tačiau ir trečiasis prizas yra geriau negu nieko.)

Donatui šokoladas taip pat skanu, kaip ir braškės – jis neteikia pirmenybės nė vienam iš šių gardumynų. Taigi Donato akimis žiūrint, abi torto dalys – tiek šokoladinė, tiek braškinė – yra vienodos vertės (žr. 3.2 a) pav.). Tačiau Regina yra alergiška – suvalgius šokolado, jai ima smarkiai skaudėti galvą, todėl šokoladinės dalies ji visai nenori. Taigi Reginos nuomone, visa torto vertė – braškinė dalis (žr. 3.2 b) pav.). Kadangi šis jų pasimatymas – pirmasis, tai nė vienas iš jų nieko nežino apie kito mėgstamus ir nemėgstamus dalykus.

Dabar pažiūrėkime, kaip Donatas ir Regina galėtų pasidalyti šį tortą. Donatas, būdamas džentelmenas, pasisiūlo padalyti tortą. Jo pjūvis parodytas 3.3 a) pav. Prisiminę, ką mes žinome apie Donatą, matysime, kad šis padalijimas atitinka jo vertinimą. Dabar eilė rinktis Reginai, ir jos pasirinkimas taip pat aiškus – ji ima tą dalį, kurioje yra 75% braškių ir 25% šokolado (žr. 3.3 b) pav.). Taigi Donatas gauna dalį, kuri, pagal jo vertinimą, yra verta lygiai pusės, o Reginai atitenka dalis, kuri, jos nuomone, yra verta trijų ketvirtadalių bendros torto vertės.

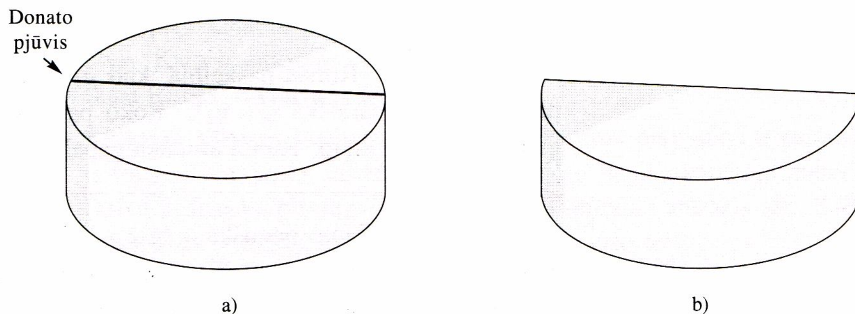


a)



b)

3.2 pav. Donato ir Reginos požiūris į tą patį tortą.



3.3 pav. Donatas pjauna, Regina renkasi.

Iš 1 pavyzdžio aišku, kad šis dalybų metodas tenkina pagrindinį teisingų dalybų reikalavimą – kiekvienas dalybininkas gauna dalį, kuri, jo nuomone, verta bent pusės visumos, tačiau aiškiai matyti, kad rinktis yra naudingiau, negu dalyti. Paprasčiausias būdas pasiskirstyti vaidmenis yra burtai – pavyzdžiui, galima mesti monetą, traukti nevienodo ilgio degtukus ir pan.

Dalijančiojo ir besirenkančiojo metodą didesnio dalybininkų skaičiaus atveju apibendrinti galima keliais būdais. Šiame skyriuje pateiksime tris metodus – vienintelio dalijančiojo, vienintelio besirenkančiojo ir paskutinio mažinusiojo. Pirmuoju metodu vienas dalybininkas dalija, o visi likusieji – renkasi, antruoju metodu – vienas iš dalybininkų renkasi, o visi kiti – dalija, trečiuoju metodu kiekvienas dalybininkas turi galimybę ir dalyti, ir rinktis.

Iš anksto paminėsime dar vieną būtiną dalybų schemų prielaidą – gėrybių aibės G vertė dalijant nemažėja, todėl, pjaustant mūsų teorinius tortus, trupinių nelieka.

VIENINTELIO DALIJANČIOJO METODAS

Paprastumo dėlei šį metodą išdėstysime trijų dalybininkų atveju; vienas iš jų tortą dalys, o kiti du – rinksis. Geriausia dalytoją rinktis atsitiktinai – galima, pavyzdžiui, ridenti kauliuką ar traukti degtukus. Tarkime, kad Daiva tortą dalys, o Rimas ir Rokas – rinksis.

- **1 ėjimas (dalijimas).** Daiva supjausto tortą į tris gabalus (g_1, g_2 ir g_3), kurių kiekvienas, jos manymu, yra vertas trečdalio torto.
- **2 ėjimas (skelbimas).** Rimas ir Rokas nepriklausomai vienas nuo kito paskelbia (pavyzdžiui, parašo ant popieriaus lapelio), kurios dalys, kiekvieno jų nuomone, vertos bent jau trečdalio torto, todėl juos tenkina.
- **3 ėjimas (skirstymas).** Kas ką gauna? Pagal dalybininkų paraiškas galimi keli atvejai.

1 atvejis. Jei bent vienas iš besirenkančiųjų nurodo daugiau kaip vieną priimtiną gabalą, tai tuos tris torto gabalus galima paskirstyti taip, kad kiekvienas dalybininkas gautų priimtiną gabalą.

2 pavyzdys. Rimas paskelbia, kad g_1 ir g_2 yra jam priimtini gabalai; pažymėkim jo paraišką $\{g_1, g_2\}$. Roko paraiška – $\{g_1\}$. Šiuo atveju tortą galima padalyti šitaip: Rimui atitenka gabalas g_2, Rokui – g_1, o Daivai – g_3.

3 pavyzdys. Rimo paraiška – $\{g_1, g_3\}$, Roko irgi – $\{g_1, g_3\}$, taigi Daivai atitenka g_2, o g_1 ir g_3 pasidalija rinkęsi dalybininkai – Rimas ir Rokas. Geriausias būdas – mesti monetą, ir laimėjęs burtus renkasi pirmas. Bet kuriuo atveju kiekvienas iš jųdviejų gauna priimtiną gabalą.

2 atvejis. Ir Rimui, ir Rokui priimtina yra tik viena dalis, bet ne ta pati. Ir šiuo atveju tuos gabalus galima taip paskirstyti, kad kiekvienas dalybininkas gautų jam priimtiną gabalą.

4 pavyzdys. Rimo paraiška – $\{g_3\}$; Roko – $\{g_2\}$. Šiuo atveju visus tenkins toks padalijimas: Daivai – gabalas g_1, Rimui – g_3, o Rokui – g_2.

3 atvejis. Abiems dalybininkams priimtinas vienas ir tas pats gabalas. Šiuo atveju mes atsiduriame aklavietėje, nes ir Rimas, ir Rokas (jie abu renkasi!) nori to paties gabalo. Iš jos galime ištrūkti dalytojai Daivai atidavę vieną iš kitų dviejų gabalų (geriausia leisti jai pasirinkti vieną iš jų). Likusieji du gabalai sujungiami į vieną, ir Rimas su Roku jį pasidalija dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu. Visa tai atrodo painu, tačiau iš tikrųjų taip nėra – iš pavyzdžio jūs pamatysite, koks aiškus šis metodas.

5 pavyzdys. Rimas paskelbia $\{g_1\}$, Rokas – irgi $\{g_1\}$. Daiva turi rinktis iš g_2 ir g_3; tarkime, kad ji pasirenka g_2. Likę du gabalai g_1 ir g_3 sulipdomi į vieną, ir Rimas su Roku jį pasidalija dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu.

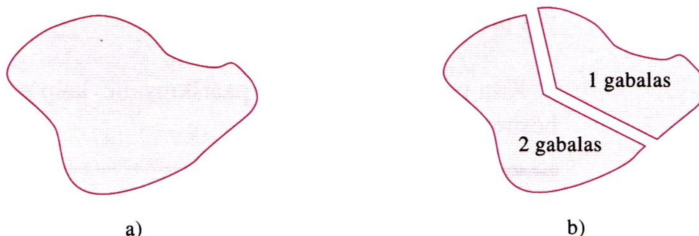
Pažiūrėkime, ar visus dalybininkus tenkina šitokios torto dalybos. Aišku, kad Daiva neturi pagrindo skųstis – ji gauna g_2, t.y. tą gabalą, kuris, jos manymu, sudaro trečdalį torto. Nei Rimas, nei Rokas nemano, kad dalis g_2 verta trečdalio torto (priešingu atveju būtų ją nurodę). Taigi jiedu galvoja, kad g_1 ir g_3 sudaro daugiau negu du trečdalius torto – pasidaliję šitokį sulipdytą torto gabalą, jiedu abu gaus po priimtiną dalį. Kitaip tariant, jei $x > 2/3$ ir $y \geqslant x/2$, tai $y > 1/3$.

Šį metodą galima apibendrinti bet kokiam dalybininkų skaičiui (žr. 8–12 pratimus).

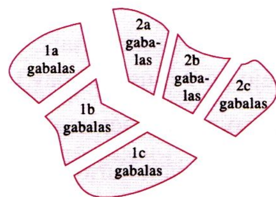
VIENINTELIO BESIRENKANČIOJO METODAS

Ir šį metodą paaiškinsime trijų dalybininkų atveju – vienas iš jų rinksis, o kiti du – dalys. Kaip ir anksčiau, vaidmenis paskirstysime atsitiktinai; tarkime, kad renkasi Rimas, o Daiva ir Darius – dalija.

- **1 ėjimas (pirmas dalijimas).** Daiva su Dariumi perpjauna ir pasidalija tortą (3.4 a) pav.), sakykim, dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu. Daiva pasirenka pirmąjį gabalą, o Dariui atitenka antrasis (žr. 3.4 b) pav.). Abu įsitikinę, kad gavo bent po pusę viso torto.

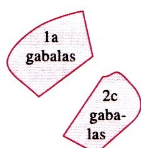


3.4 pav. a) Tortas prieš dalijimą; b) pirmas dalijimas.

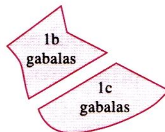


3.5 pav. Antras dalijimas.

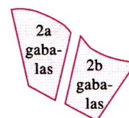
- **2 ėjimas (antras dalijimas).** Daiva padalija pirmąjį gabalą į tris, jos manymu, lygiavertes dalis. Taip pat ir Darius padalija antrąjį gabalą į tris, jo manymu, lygiavertes dalis (3.5 pav.).
- **3 ėjimas (rinkimasis).** Rimas pasirenka vieną iš trijų Daivos dalių ir vieną iš trijų Dariaus dalių. Šie du gabalėliai sudaro Rimo dalį, Daivai atitenka dvi likusios pirmojo gabalo dalys, o Dariui – dvi likusios antrojo gabalo dalys (3.6 pav.).



Rimas renkasi 1a ir 2c gabalus



Daiva gauna 1b ir 1c gabalus



Darius gauna 2a ir 2b gabalus

3.6 pav. Rinkimasis.

Pažiūrėsime, kodėl ir šios torto dalybos tenkina dalybininkus. Pirmasis ėjimas – tai torto dalybos dviem žmonėms, patenkinusios abu dalybininkus, todėl Daivai pirmasis gabalas atrodo vertas bent pusės torto. Kadangi ji gavo du trečdalius to gabalo, tai Daivos dalies vertė yra ne mažesnė už du trečdalius pusės torto vertės, todėl ši dalis ją tenkina $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\right)$.

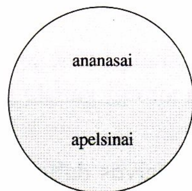
Tie patys argumentai tinka ir Dariui. Išsiaiškinkime, ar Rimo dalis jį tenkina. Pirmasis gabalas yra tam tikra viso torto dalis – pažymėkime ją raide d. Taigi, Rimo nuomone, antrojo gabalo vertė yra $1 - d$, nes pirmasis ir antrasis gabalas kartu sudaro visą tortą. Kadangi Rimas rinkosi ir iš trijų pirmojo gabalo dalių – $1a$, $1b$ ir $1c$ – pasirinko labiausiai patikusią $1a$ dalį, tai ši dalis, jo manymu, verta bent jau trečdalio d vertės. Lygiai taip pat $2c$ dalis verta bent jau trečdalio $1 - d$ vertės. Kadangi $\frac{1}{3}d + \frac{1}{3}(1 - d) = \frac{1}{3}$, tai Rimas gavo ne mažiau kaip trečdalį torto, tai yra priimtiną dalį.

Kitu pavyzdžiu išsamiai paaiškinsime, kaip praktiškai taikomas vienintelio besirenkančiojo metodas.

---

6 pavyzdys. Darius, Paulius ir Kotryna nori pasidalyti apelsinų ir ananasų tortą vienintelio besirenkančiojo metodu. Jie traukia burtus – degtukus, ir paaiškėja, kad rinksis Kotryna, o Darius su Pauliumi pirmieji pasidalys tortą dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu. Darius, ištraukęs trumpiausią degtuką, pjausto tortą.

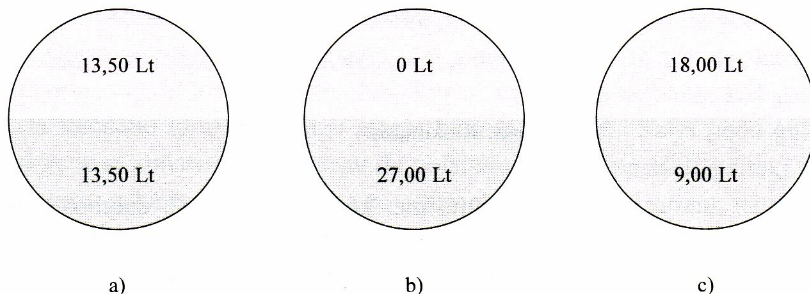
Šio nuostabaus torto viena pusė yra su apelsinais, o kita – su ananasais, ir kainuoja jis 27 litus – Darius, Paulius ir Kotryna susidėjo po 9 litus (3.7 pav.).



3.7 pav.

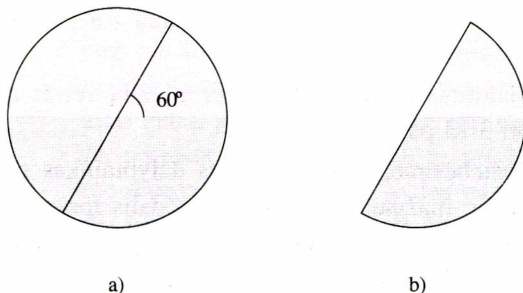
Šiek tiek papasakosime apie Dariaus, Pauliaus ir Kotrynos pomėgius.

- Darius vienodai mėgsta ir apelsinus, ir ananasus, todėl jam kurios nors torto dalies vertė atitinka tos dalies dydį. Jo požiūriu, tortas atrodo taip, kaip pavaizduota 3.8 a) pav.
- Paulius mėgsta apelsinus, bet jam visai nepatinka ananasai. Jo požiūriu, tortas atrodo taip, kaip pavaizduota 3.8 b) pav.
- Kotrynai ananasai patinka dukart labiau negu apelsinai. Jos požiūriu, tortas atrodo taip, kaip pavaizduota 3.8 c) pav.



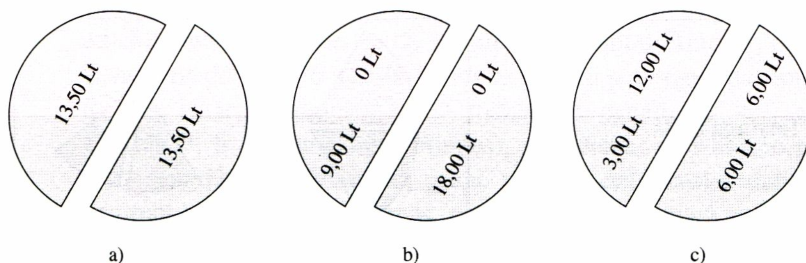
3.8 pav. Tas pats tortas Dariaus, Pauliaus ir Kotrynos požiūriu.

- **1 ėjimas.** Darius pjauna tortą. Jo padalijimas parodytas 3.9 a) pav. Kadangi Paulius nemėgsta ananasų, jis tikrai pasirinks tą dalį, kurioje daugiau apelsinų (3.9 b) pav.).



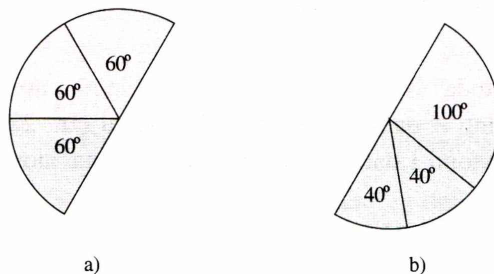
3.9 pav. Darius pjauna, Paulius renkasi.

Mūsų trijulės nuomonė apie torto dalių vertę pavaizduota 3.10 pav.

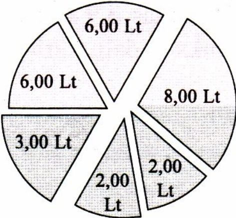


3.10 pav. Šitaip Darius, Paulius ir Kotryna vertina abu torto gabalus.

- **2 ėjimas.** Darius dalija savo gabalą į tris, jo manymu, lygiavertes dalis. Dariui kiekvienos dalies vertė tolygi jos dydžiui, todėl jis supjausto tortą taip, kaip parodyta 3.11 a) pav. Paulius irgi padalija savo gabalą į tris dalis, kurios, jo nuomone, yra lygiavertės. Prisiminę, kad Paulius nemėgsta ananasų, suprasime, kad jis supjaustys tortą taip, kad kiekvienoje dalyje liktų trečdalis apelsinų (3.11 b) pav.).



3.11 pav. a) Darius supjausto savo gabalą; b) Paulius supjausto savo gabalą.



3.12 pav. Kiekvienos iš šešių dalių vertė Kotrynos požiūriu.

- **3 ėjimas.** Dabar Kotrynos eilė išsirinkti po vieną dalį iš trijų Dariaus ir trijų Pauliaus dalių. 3.12 pav. pavaizduota, kaip Kotryna vertina kiekvieną iš šių dalių. Aišku, kad Kotryna iš Dariaus dalių pasirinks 6 Lt vertės, o iš Pauliaus dalių – 8 Lt vertės dalį.

Galutinis torto pasidalijimas ir dalių vertės dalybininkų požiūriu pavaizduoti 3.13 pav.

Pastebėsime, kad kiekvienas dalybininkas gavo dalį, kuri, jo nuomone, verta ne mažiau kaip 9 litai (trečdalis torto vertės). Be to, Darius mano, jog Kotryna gavo didesnę dalį negu jis. Prisiminkime – dalybų metodai garantuoja, kad kiekvienas dalybininkas gaus jį tenkinančią dalį, bet nebūtinai geriausią.

Teisinga dalis			
	Darius	Paulius	Kotryna
Vertė Dariaus požiūriu	9,00 Lt	6,00 Lt	12,00 Lt
Vertė Pauliaus požiūriu	9,00 Lt	12,00 Lt	6,00 Lt
Vertė Kotrynos požiūriu	9,00 Lt	4,00 Lt	14,00 Lt

3.13 pav. Galutinis torto pasidalijimas.

PASKUTINIOJO MAŽINUSIO METODAS

Šį metodą* išaiškinsime penkių dalybininkų atveju. Jį galima tiesiogiai apibendrinti ir daugelio dalybininkų atveju (žr. 22 pratimą). Čia dalybininkai neskirstomi į dalijančiuosius ir besirenkančiuosius, o atsitiktinai surašomi į

* Šį metodą pirmą kartą 1948 metais aprašė lenkų matematikas H. Šteinhauzas (Hugo Steinhaus), bet jis nurodo kitus du šio metodo pirmtakus – lenkų matematikus S. Banachą ir B. Knasterį.

eilę: D_1 – pirmas, D_2 – antras, ..., D_5 – penktas. Per visas dalybas jie darys ėjimus būtent šia tvarka, o dalybos vyks ratais.

- **I ratas.** D_1 atpjauna torto gabalą, kuris, jo nuomone, yra viena penktoji torto dalis. Šis gabalas yra pirmo dalybininko paraiška, galiojanti bent jau šiuo momentu. Skelbdamas D_1 turi būti atsargus ir pasirinkti nei per mažą (nes jis gali jam ir atitekti), nei per didelį gabalą (kas nors kitas gali jį pasiimti). Dabar D_2 turi teisę arba nemažinti, arba mažinti D_1 atpjautą gabalą. Jeigu D_2 mano, kad D_1 paraiška nėra per didelė (ne didesnė už 1/5 torto), jis tos paraiškos nemažina ir lieka varžytis dėl likusios torto dalies – ši, jo nuomone, verta ne mažiau kaip 4/5 viso torto. Jei, priešingai, D_2 mano, kad D_1 atpjautas gabalas per didelis (galbūt D_2 netgi mano, kad D_1 godokas), tai jis gali nesutikti su D_1 paraiška ir sumažinti ją. Jei jis taip ir padaro, tai sakome, kad D_2 **mažina**. Vėlgi – D_2 turi būti atsargus ir skelbti naują paraišką apgalvotai – ne per mažą (nes ji gali jam ir atitekti) ir ne per didelę (ji gali atitekti kam kitam). Be to, D_2 negali vienu metu mažinti D_1 paraiškos ir varžytis dėl likusio gabalo (žinoma, jis taip pat negali pasiimti savo dalies ir iškart suvalgyti!). Jei D_2 mažina, tai gabaliukas, kurį nupjovė D_2 (tai D_1 ir D_2 paraiškų skirtumas), pridedamas prie likusio gabalo, ir D_1 sugrįžta į dalybininkų grupę varžytis dėl likusios dalies. D_1 neturėtų būti tuo nepatenkintas, nes likusi dalis, jo manymu, yra verta daugiau kaip 4/5 viso torto. Dabar atėjo eilė įsiterpti į dalybas D_3; jis gali nuspręsti nemažinti galiojančios paraiškos (ją paskelbė D_1 arba D_2) ir likti varžytis dėl likusio gabalo arba jį mažinti. Lygiai taip pat D_4 ir D_5 gali mažinti galiojančią paraišką arba dalytis likusį gabalą. Po to, kai visi dalybininkai turėjo galimybę padaryti ėjimą (pareikšti savo nuomonę), tas dalybininkas, kuris mažino paskutinis (iš čia ir pavadinimas – **paskutiniojo mažinusio metodas**), gauna tą gabalą ir pasitraukia iš tolimesnių dalybų.

- **II ratas.** Tortas vėl sulipdomas, sudėjus likusius po visų pjaustymų gabaliukus. Dalybas tęsia keturi likę dalybininkai. Rato pabaigoje paskutinis mažinęs gauna savo gabalą ir baigia dalybas.

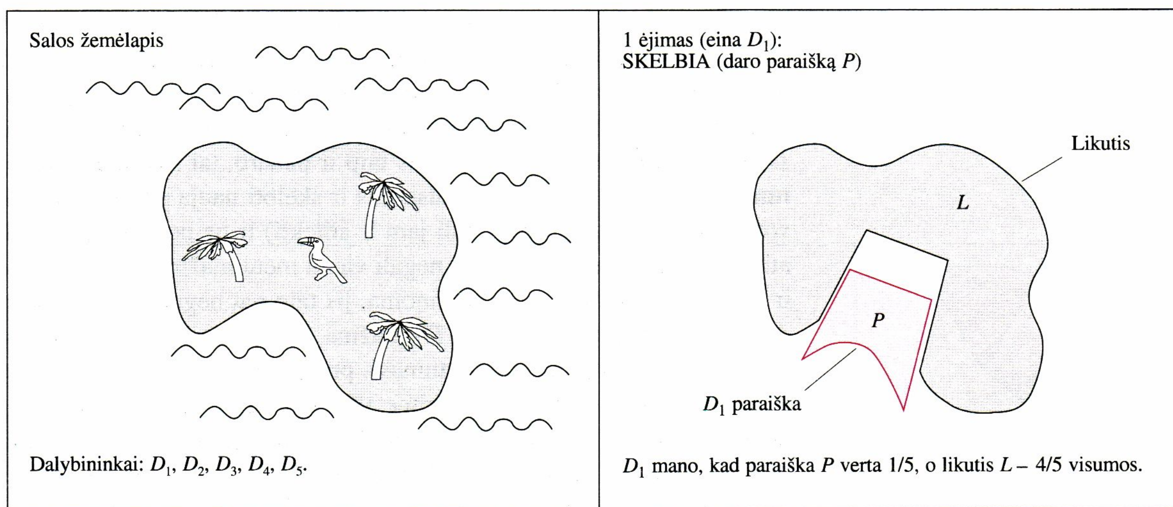
- **III ratas.** Liko trys dalybininkai, kurie dalijasi likusį torto gabalą. Paskutinis mažinęs gauna savo gabalą ir taip pat baigia dalybas.

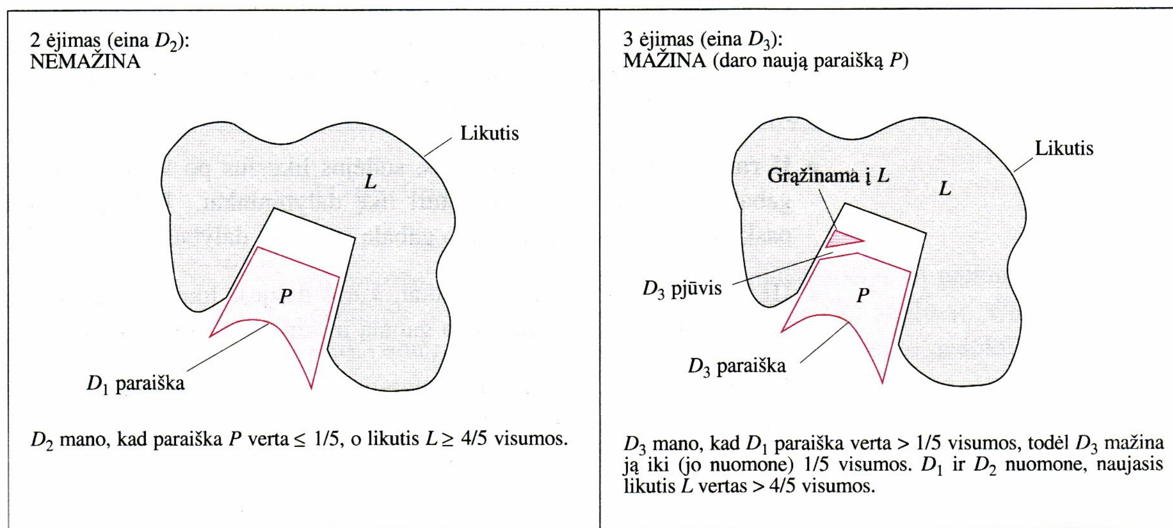
- **IV ratas.** Šiame rate liko du dalybininkai, kurie pasidalija likusį gabalą dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu.

7 pavyzdys. Penki jūreiviai ištremiami į negyvenamą tropikų salą. Bet nėra to bloga, kas neišeitų į gera – jie nusprendžia salą pasidalyti ir likti joje visiems laikams. Kiek pasvarstę, jūreiviai nutaria salą dalytis paskutiniojo mažinusio metodu.

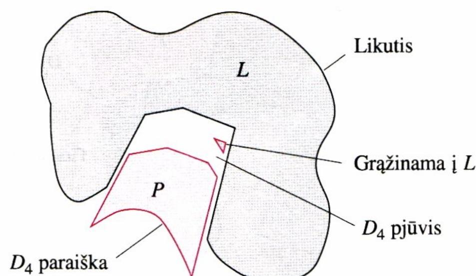
- **I ratas.**

3.14 pav.



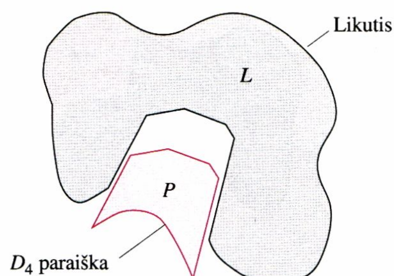


4 ėjimas (eina D_4):
MAŽINA (daro naują paraišką P)



D_4 mano, kad D_3 paraiška verta > 1/5 visumos, todėl mažina ją iki (jo nuomone) 1/5 visumos. D_1, D_2 ir D_3 nuomone naujasis likutis L vertas > 4/5 visumos.

5 ėjimas (eina D_5):
NEMAŽINA

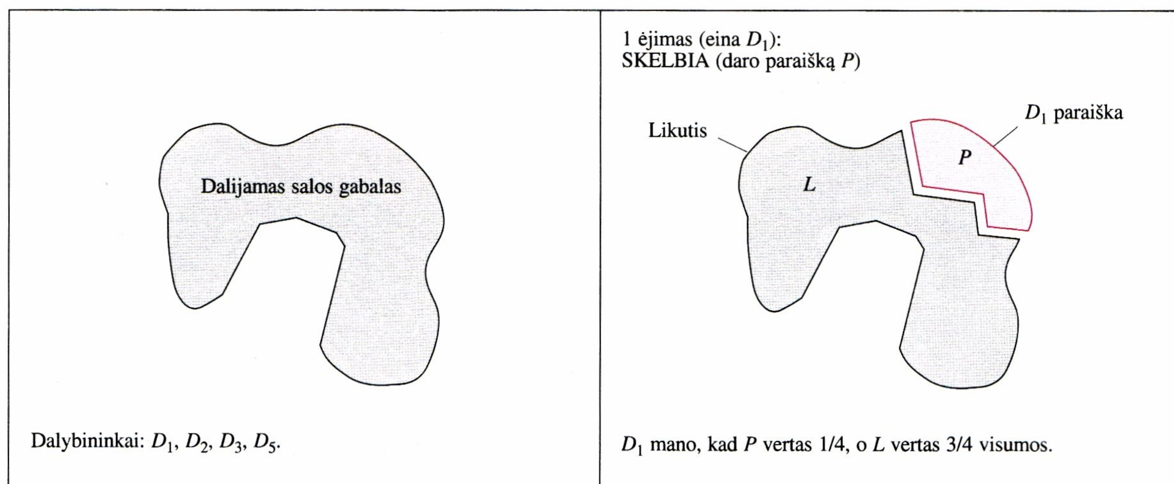


D_5 mano, kad gabalas P vertas ≤ 1/5, o gabalas vertas $L \geq 4/5$ visumos.

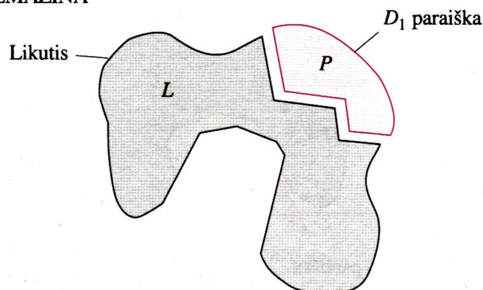
I ratas baigtas – kiekvienas dalybininkas padarė ėjimą (skelbė, mažino arba nemažino). I rato rezultatas – paskutinis mažinęs dalybininkas (D_4) gavo savo pareikštą dalį P. Likusią salos dalį L pasidalys kiti keturi dalybininkai D_1, D_2, D_3 ir D_5.

- **II ratas.**

3.15 pav.

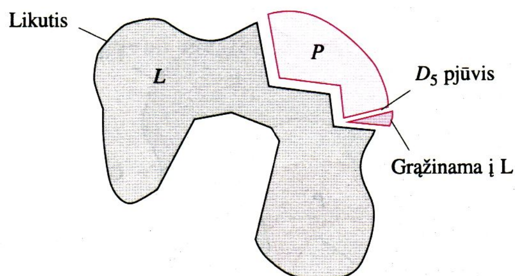


2 ėjimas (eina D_2):
NEMAŽINA
3 ėjimas (eina D_3):
NEMAŽINA



D_2 ir D_3 mano, kad P vertas ≤ 1/4, o L vertas ≥ 3/4 visumos.

4 ėjimas (eina D_5):
MAŽINA (daro naują paraišką P)

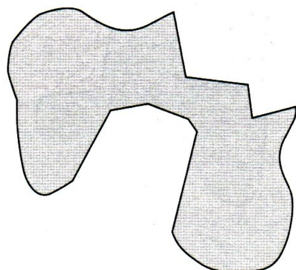


D_5 mano, kad D_1 paraiška yra verta > 1/4 visumos. D_5 mažina senąją paraišką iki naujos P, vertos (jo nuomone) 1/4 visumos. D_1, D_2 ir D_3 nuomone, naujasis likutis L vertas > 3/4 visumos.

II ratas baigtas – visi dalybininkai padarė ėjimą. II rato rezultatas – paskutinis mažinęs dalybininkas (D_5) gavo savo dalį P. Likusią salos dalį L pasidalys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3.

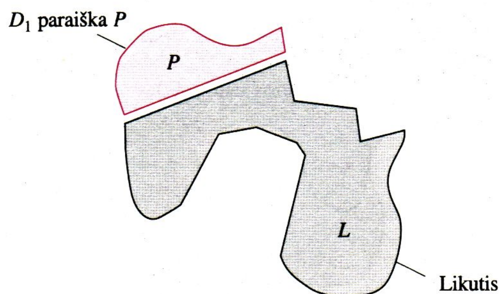
- **III ratas.**

3.16 pav.

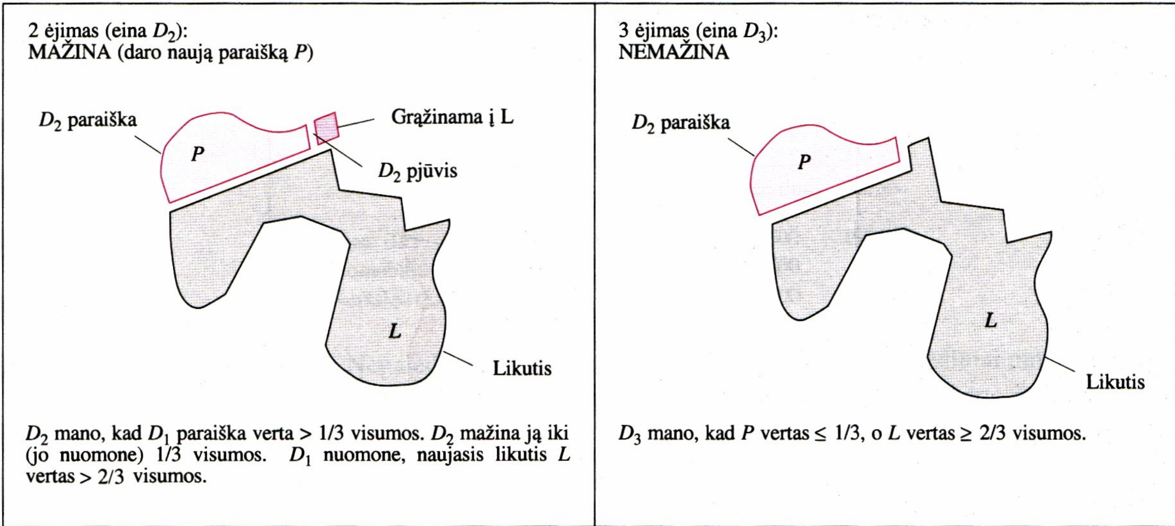


Dalybininkai: D_1, D_2, D_3.

1 ėjimas (eina D_1):
SKELBIA (daro paraišką P)



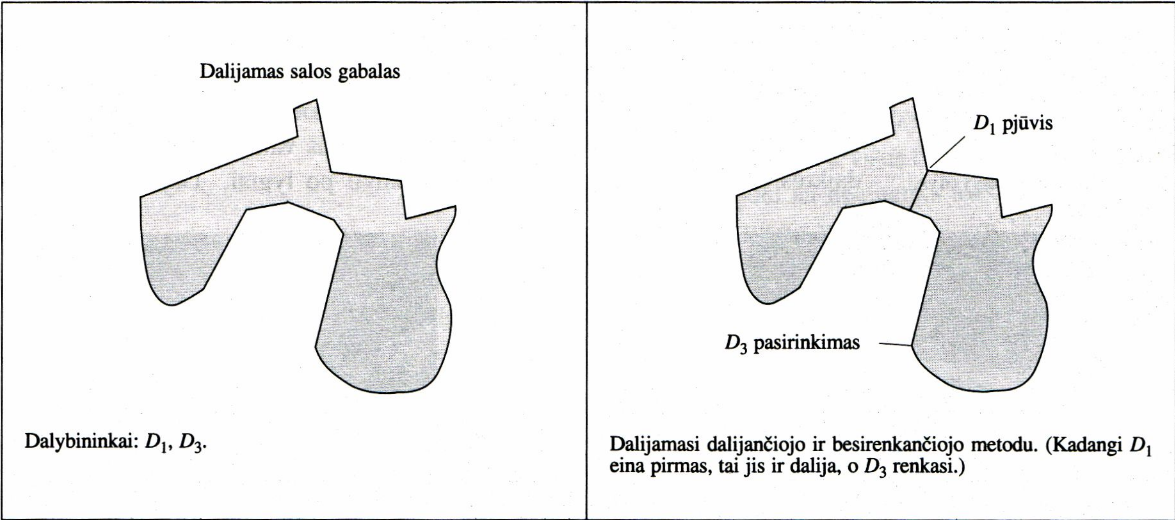
D_1 mano, kad P vertas 1/3, o gabalas L vertas 2/3 visumos.



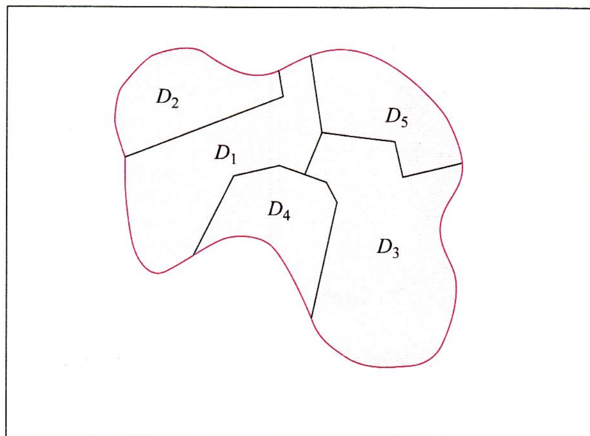
III ratas baigtas – kiekvienas dalybininkas padarė ėjimą. III rato rezultatas – paskutinis mažinęs dalybininkas (D_2) gavo savo dalį P. Likusią salos dalį L pasidalys D_1 ir D_3.

- **IV ratas.**

3.17 pav.



Galų gale sala pasidalijama taip, kaip pavaizduota 3.18 pav.



3.18 pav.

Kituose dviejuose skirsniuose nagrinėsime diskrečiųjų dalybų schemas. Tokiose dalybose gėrybių aibę G sudaro vienas arba keli nedalomi daiktai (namai, automobiliai, paveikslai, saldainiai ir pan.).

ĮKAINIŲ METODAS

Iš diskrečiųjų dalybų schemų labiausiai žinomas įkainių metodas, kurį pasiūlė lenkų matematikas Hugo Šteinhauzas. Lengviausia šį metodą paaiškinti pavyzdžiu.

Kaip šį turtą padalyti keturiems įpėdiniams? Tai klasikinis diskrečiojo dalybų uždavinio pavyzdys.

8 pavyzdys. Rašydama testamentą, senelė pasielgė kiek neapgalvotai ir paliko savo vaikaičiams – Algiui, Birutei, Celestinai ir Dariui – po lygiai pasidalyti tris nedalomus daiktus – namą, automobilį ir labai brangų paveikslą. Svarstant, kaip pasidalyti palikimą, vienas iš vaikaičių pasiūlė visus tris daiktus parduoti ir gautus pinigus pasidalyti po lygiai. Deja, visų keturių







įpėdinių nuomonės apie daiktų vertę skiriasi (įkainiai surašyti lentelėje), todėl jie negali susitarti dėl priimtinos daiktų pardavimo kainos. (Tarp kitko, laikysime, kad visi keturi vaikaičiai yra garbingi žmonės, ir skaičiai lentelėje rodo jų nuoširdų palikimo įvertinimą.)

	Algis	Birutė	Celestina	Darius
Namas (Lt)	220 000	250 000	211 000	198 000
Automobilis (Lt)	40 000	30 000	47 000	52 000
Paveikslas (Lt)	280 000	240 000	234 000	190 000

Negalėdami rasti išeities iš šios keblios padėties, įpėdiniai nutarė kreiptis į matematiką, kuris patartų, ką daryti. Štai kaip padalijo turtą ir argumentavo matematikas.

- Algis visą palikimą įvertina 540 000 litų; šis skaičius gaunamas sudėjus skaičius, kuriais Algis įvertino kiekvieną iš trijų daiktų. Kadangi jis turi teisę gauti ketvirtadalį turto, tai jį tenkinanti dalis yra šios sumos ketvirtadalis, t.y. 135 000 Lt. Kadangi jis didžiausia suma, palyginus su kitais, įvertino paveikslą, jam šis ir atitenka. Tačiau paveikslas vertas daugiau negu Algis turi paveldėti, todėl skirtumą jis privalo grąžinti pinigais. Taigi Algis įmoka 145 000 litų (280 000 Lt – 135 000 Lt), ir jam atitenka paveikslas. Kadangi Algis sąžiningai įkainojo palikimą, tai jį šis rezultatas visiškai tenkina.
- Birutės manymu, visa turto vertė yra 520 000 litų, iš kurių jai priklauso lygiai ketvirtadalis, t.y. 130 000 Lt. Birutė namą įvertino didesne suma negu kiti paveldėtojai, todėl jį ir gauna, tačiau turi sumokėti skirtumą tarp jos nustatytos namo vertės (250 000 Lt) ir jai priklausančios dalies (130 000 Lt). Taigi Birutė gauna namą, bet grąžina 120 000 litų.
- Celestinos manymu, visas turtas vertas 492 000 litų, o jai priklausantis ketvirtadalis yra 123 000 litų. Celestina visus daiktus įvertino mažesne suma negu kiti paveldėtojai, todėl jai neatitenka joks daiktas, tačiau ji gauna jai priklausiančią dalį grynais pinigais, tai yra 123 000 litų.
- Darius visą turtą įvertina 440 000 litų, todėl jo dalis yra 110 000 litų. Kadangi jis labiausiai iš visų vertina automobilį (52 000 litų), tai jį ir gauna, tačiau iki teisėtos dalies jam dar trūksta 58 000 litų (skirtumas tarp jo dalies ir mašinos įkainio), kuriuos jis gauna grynais.

Taigi visi paveldėtojai jau turi būti patenkinti – šiaip ar taip kiekvienas juk gavo jį tenkinančią dalį. O dabar prasideda įdomiausia. Sudėję Algio ir Birutės įmokėtus pinigus ir atėmę sumą, sumokėtą Celestinai ir Dariui,

pastebime netikėtą dalyką – lieka 84 000 litų perteklius! Tai gerai matyti iš lentelės.

	Paveldėtas daiktas	Grynieji pinigai
Algis	Paveikslas	Grąžina 145 000 Lt
Birutė	Namas	Grąžina 120 000 Lt
Celestina	–	Gauna 123 000 Lt
Darius	Automobilis	Gauna 58 000 Lt
		84 000 Lt perteklius

Žinoma, geriausia būtų šį perteklių atiduoti matematikui, nurodžiusiam tokį puikų dalybų būdą. Tačiau kuklusis matematikas pinigų atsisako ir pataria įpėdiniams pasidalyti juos po lygiai. Taip ir padaroma, todėl kiekvienas gauna dar po 21 000 litų.

Visą 8 pavyzdžio procedūrą, kurią vadinsime **įkainių metodu**, galima aprašyti taip.

- **1 ėjimas (įkainojimas).** Kiekvienas dalybininkas sąžiningai įvertina kiekvieną daiktą ir surašo įkainius. Dalybininko teisinga dalis apskaičiuojama, jo įkainių sumą padalijus iš dalybininkų skaičiaus.
- **2 ėjimas (skirstymas).** Kiekvienas daiktas atitenka didžiausia suma jį įkainojusiam dalybininkui. Jei kurį nors daiktą vienodai įkainoja keli dalybininkai, tai to daikto savininkas nustatomas kokiu nors iš anksto sutartu būdu (pavyzdžiui, metant kauliuką). Beje, vienam dalybininkui gali atitekti ir daugiau kaip vienas daiktas – ir netgi visi. Kiekvienas dalybininkas įmoka ar gauna pinigais skirtumą tarp jam atitekusių daiktų įkainių ir jo teisingos dalies.
- **3 ėjimas (pertekliaus dalijimas).** Paskirsčius daiktus ir pinigus, gali likti grynųjų pinigų perteklius. Jis padalijamas visiems dalybininkams po lygiai.

Taikant įkainių metodą, turi būti išlaikytos tam tikros sąlygos.

1. Kiekvienas dalybininkas privalo turėti pakankamai pinigų. Jei dalybininkas žada sąžiningai įvertinti daiktus, jis turi būti pasirengęs paimti dalį jų ar net visus daiktus, o tai reiškia – mokėti tam tikrą pinigų sumą. Dalybininkui, turinčiam per mažai pinigų, tokios dalybos netinka.
2. Kiekvienas dalybininkas privalo sutikti imti pinigus (jei siūloma suma pakankama) kaip bet kurio daikto pakaitalą; kitaip tariant, nė vienas dalybininkas negali manyti, kad daiktai yra neįkainojami. („Aš trokštu mamos deimantinio žiedo, ir jokie pasaulio pinigai man jo neatstos!“ – su tokiu požiūriu palikimo nepasidalysi.)

3. Nė vienas dalybininkas neturi turėti išankstinės informacijos apie kitų dalybininkų vertinimus. Ypač svarbu, kad įkainiai nebesikeistų dalybų metu ir būtų slapti – nė vienas dalybininkas nepamatytų kitų dalybininkų įkainių iš anksto. Kad ši sąlyga yra esminė, matyti iš tokio pavyzdžio. Dalybininkas A mano, kad reali daikto X vertė yra 1 500 litų, tačiau prieš rašydamas šią sumą jis pamato, kad dalybininkas B šį daiktą įvertino 2 000 litų. Tada dalybininkas A gali įkainoti X 1 999 litais, jau žinodamas, kad jam neprisieis imti daikto X už šią kainą, o savo dalies vertę jis pakels.

Įkainių metodas ypač paprastas, kai vieną daiktą dalijasi du žmonės. Imkime tokį pavyzdį.

9 pavyzdys. Alius ir Donata nusprendė išsiskirti. Vienintelis jų vertingas bendras turtas yra namas. Kadangi sutuoktiniai skiriasi gražiuoju ir visiškai nenori kreiptis į teismą ar samdyti advokatą, jie nusprendžia pasidalyti namą patys įkainių metodu. Namą jie įvertina taip:

Alius	130 000 Lt
Donata	142 000 Lt

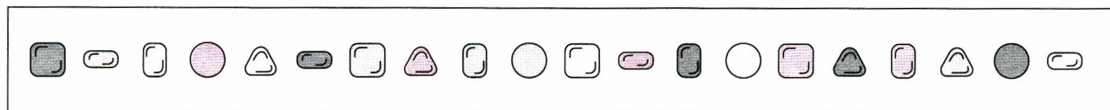
Donata įvertina namą didesne suma negu Alius, todėl jį ir gauna, tačiau Aliui ji turi sumokėti 71 000 Lt (jai priklauso turto tik už pusę jos nurodytos sumos). Aliui priklausanti dalis lygi pusei jo nurodytos namo kainos, t.y. 65 000 Lt. 6 000 litų perteklius padalijamas po lygiai Aliui ir Donatai. Taigi Donatai atitenka namas, ir ji sumoka Aliui 68 000 Lt. Pastebėsime, kad šis rezultatas sutampa su tuo, kurį gautume, namą įvertinę kaip abiejų įkainių vidurkį (136 000 Lt), padaliję šią sumą po lygiai Aliui ir Donatai, namą skyrę daugiausia jį įvertinusiam, o pinigus – kitam iš jų (žr. 31 pratimą).

ŽYMEKLIŲ METODAS

Šioje diskrečiųjų dalybų schemoje dalybininkams nereikia turėti pinigų. Šia prasme jis pranašesnis už įkainių metodą. Kita vertus, priešingai įkainių metodui, jis veiksmingas tik mažam dalybininkų skaičiui dalijantis daug daiktų. Pagal šį metodą pirmiausia visi daiktai išdėstomi viena eile (ją vadinsime **rikiuote**). Po to kiekvienas dalybininkas ją suskaido į tiek atkarpų, kiek yra dalybininkų, o suskaidyti reikia taip, kad daiktų rikiuotės atkarpos būtų, skaidančiojo nuomone, lygiavertės ir todėl būtų jam priimtinos. Skaidoma žymekliais – kekvienas žymeklis žymi vienos atkarpos pabaigą ir kitos pradžią. Žymeklius dalybininkai išdėsto nepriklausomai ir slaptai – kad joks dalybininkas nematytų kitų dalybininkų išdėstytų žymeklių. Kai visi dalybininkai išdėsto savo žymeklius, daiktai išsidalijami. Kaip tai daroma, pamatysime iš šio pavyzdžio.

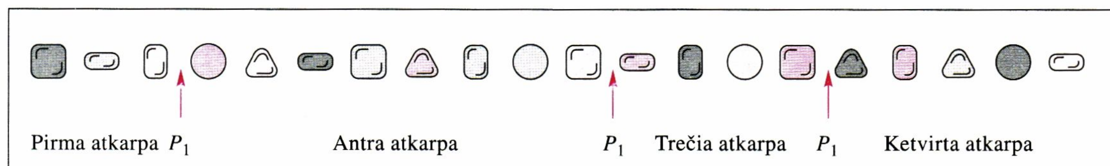
10 pavyzdys. Keturi paveldėtojai (P_1, P_2, P_3 ir P_4) dalijasi 20 daiktų, kurių rikiuotė matyti 3.19 pav.

3.19 pav.



P_1 pradeda pirmas ir išdėsto žymeklius taip, kaip pavaizduota 3.20 pav.

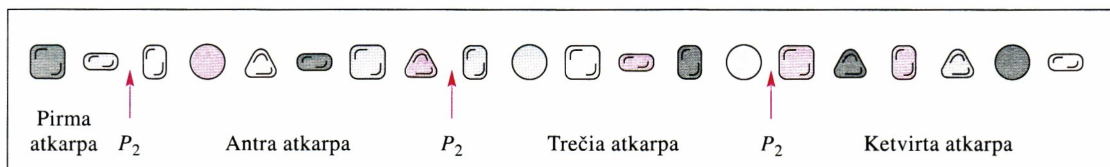
3.20 pav.



Jo žymeklių išdėstymas reiškia, kad P_1 vertina daiktus, patekusius į pirmą atkarpą, taip pat, kaip daiktus, patekusius į antrą, trečią ir ketvirtą atkarpą.

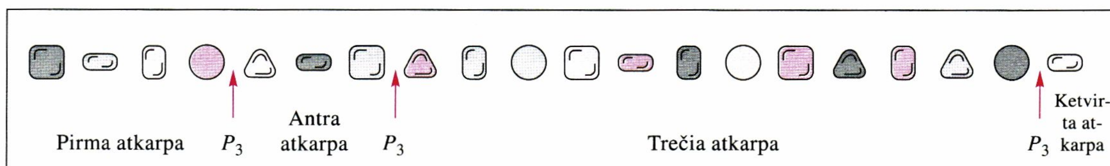
Nematydamas P_1 išdėstytų žymeklių (jų padėtį pasižymi neutralus asmuo, o žymeklius pašalina), P_2 taip pat išdėsto žymeklius, kaip pavaizduota 3.21 pav.

3.21 pav.

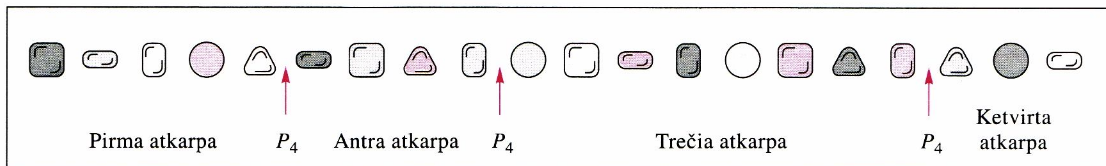


Pagaliau ateina eilė ir dalybininkams P_3 bei P_4 – jie išdėsto žymeklius taip, kaip pavaizduota 3.22 ir 3.23 pav.

3.22 pav.

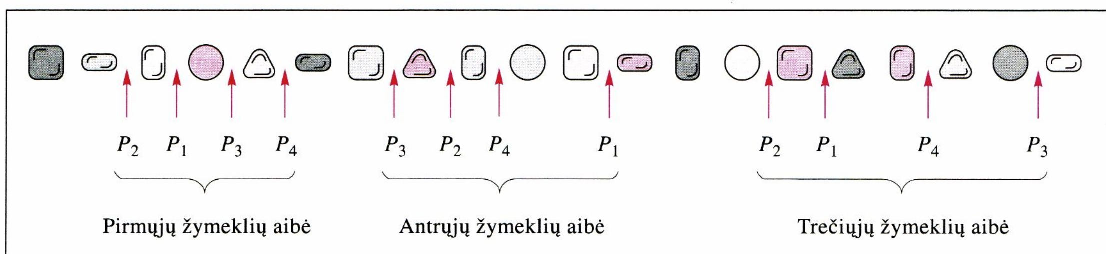


3.23 pav.



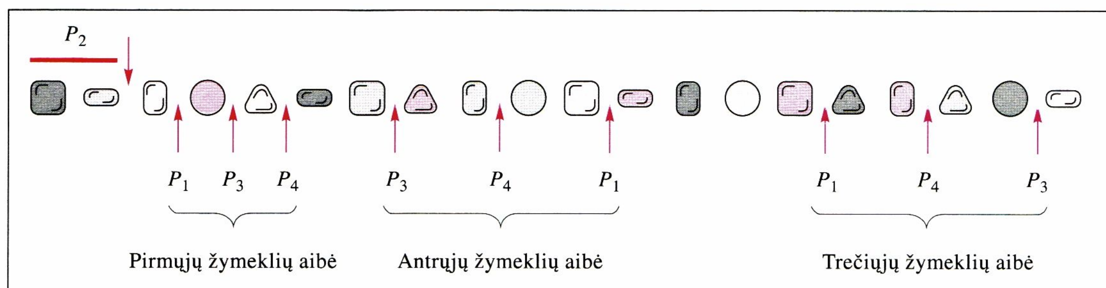
Dabar jau esame pasirengę išdalyti daiktus paveldėtojams, bet pirmiausia turime pamatyti daiktų rikiuotę su jų išdėstytais žymekliais (3.24 pav.).

3.24 pav.



Peržvelgiame rikiuotę iš kairės į dešinę ir skiriame pirmąją atkarpą tam paveldėtojui, kurio žymeklis yra pirmas; todėl P_2 gauna pirmuosius du daiktus. Mes žinome, kad šie daiktai, P_2 manymu, yra teisinga dalis. P_2 baigia dalybas, ir visi jo žymekliai nuimami; naujas rikiuotės vaizdas matyti 3.25 pav.

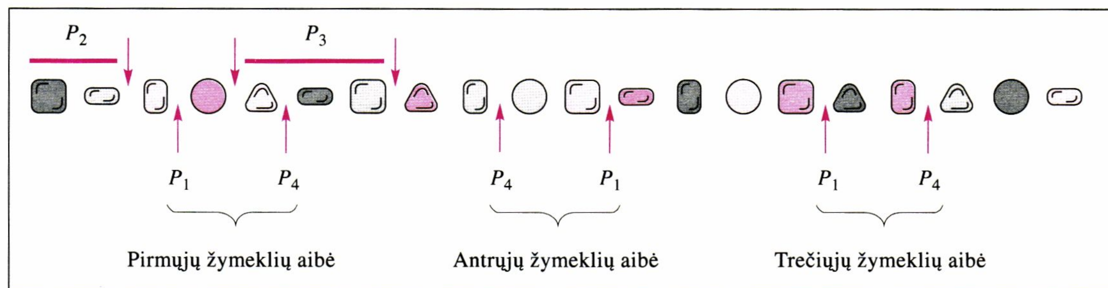
3.25 pav.



Vėl peržvelgiame rikiuotę iš kairės į dešinę iki antrųjų žymeklių aibės pirmo žymeklio (pirmo iš visų paveldėtojų antrųjų žymeklių). Jis priklauso P_3 ir yra už septinto daikto. Dabar grįžtame atgal iki pirmojo P_3 žymeklio (jis

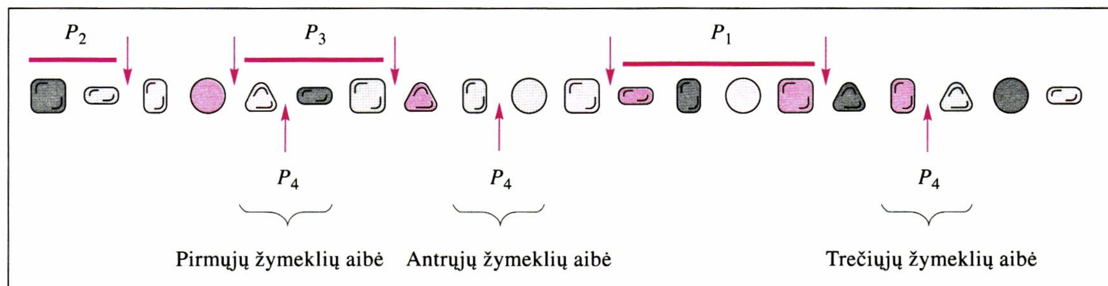
yra už ketvirto daikto), ir paveldėtojui P_3 skiriame daiktus, esančius tarp jo žymeklių (3.26 pav.).

3.26 pav.



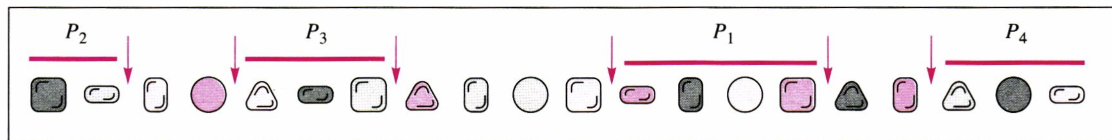
Lygiai taip pat peržiūrime rikiuotę iki trečiųjų žymeklių aibės pirmo žymeklio (pirmo iš visų trečiųjų žymeklių). Jis priklauso P_1 (priminsime, kad P_2 ir P_3 jau nedalyvauja dalybose). Tada grįžtame atgal iki paveldėtojo P_1 antrojo žymeklio. Daiktai tarp šių žymeklių atitenka P_1 (3.27 pav.).

3.27 pav.



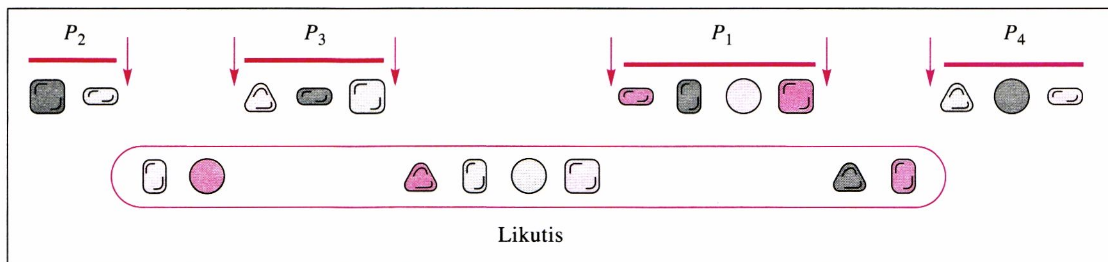
Pagaliau lieka paskutinis paveldėtojas, kuriam atitenka daiktai, esantys nuo jo paskutinio žymeklio iki rikiuotės galo (3.28 pav.).

3.28 pav.



Ir šį kartą matome, kad, visiems paveldėtojams gavus savo teisingą dalį, rikiuotėje liko keletas niekam nepaskirtų daiktų (3.29 pav.). Su šiuo likučiu galima elgtis visaip – išdalyti kaip labdarą, pasidalyti burtų keliu, o jei daiktų liko daug – vėl dalytis žymeklių metodu.

3.29 pav.



Žymeklių metodą bendruoju atveju galima aprašyti taip. N dalybininkų (D_1, D_2, $D_3, \ldots,$ D_N) dalijasi M daiktų, surikiuotų į eilę. (Šiuo atveju $M > N$ – tai nebūtina įkainių metodui.)

- **1 ėjimas (žymėjimas).** Kiekvienas dalybininkas nepriklausomai ir slaptai padalija daiktų rikiuotę į N atkarpų; visos jos, šio dalybininko nuomone, yra lygiavertės.

- **2 ėjimas (skirstymas).** Tam dalybininkui, kurio žymeklis pirmųjų žymeklių aibėje yra pirmas (peržvelgiant rikiuotę iš kairės į dešinę), skiriame jo nurodytą pirmąją rikiuotės atkarpą ir nuimame visus šio dalybininko žymeklius. Tam dalybininkui, kurio žymeklis antrųjų žymeklių aibėje yra pirmas, skiriame antrąją iš jo nurodytų atkarpų ir nuimame visus šio dalybininko žymeklius. Šį procesą tęsiame tol, kol visi dalybininkai gauna savo teisingą dalį. Paskutinis dalybininkas gauna daiktus, priklausančius jo paskutinei atkarpai.

- **3 ėjimas (likučio skirstymas).** Jei rikiuotėje liko daiktų, juos galima paskirstyti burtų keliu; jei daiktų liko daugiau, negu yra dalybininkų – galima vėl skirstyti žymeklių metodu.

Nepaisant žymeklių metodo grakštumo ir malonių likučio skirstymo akimirkų, šį metodą galima taikyti tik tada, kai patenkintos tam tikros griežtos sąlygos. Ypač svarbu, kad kiekvienas dalybininkas galėtų suskirstyti daiktų rikiuotę į, jo nuomone, lygiavertes dalis. Dėl šios sąlygos, pavyzdžiui, negalima dalytis tokių daiktų, kurių vertė smarkiai skiriasi. Jei, sakykime, rikiuotėje būtų 20 auksinių laikrodžių ir 19 įvairių rūšių saldainių, tai keturi žmonės jų niekaip nepasidalytų, nes nė vienas iš jų (nebent tik besaikis saldainių mėgėjas) nesugebėtų šių daiktų suskirstyti į keturias lygiavertes atkarpas.

IŠVADOS

Vieno ar kelių daiktų dalybos yra praktinis, kasdieniniame mūsų gyvenime nuolat pasitaikantis uždavinys. Jei dalijamės picą, tortą ar maišelį saldainių, tai dažniausiai nekreipiame dėmesio į dalybų teisingumą. Bet jei kalbama apie turto, žemės sklypo ar kokios kitos didelės vertybės dalybas, teisingumas pasidaro svarbiausias dalykas.

Paviršutiniškai žiūrint, teisingumas ir matematika atrodo visiškai nesusiję dalykai – su dalybomis mes dažniau siejame etiką ar teisę. Todėl nuostabu, kad dažniausiai matematika gali pateikti tokius dalybų metodus, kurie ne tik laiduoja teisingumą, bet ir yra gerokai veiksmingesni negu kiti (teisiniai ar etiniai) dalybų būdai.

Šiame skyriuje išnagrinėjome kelis tokius metodus, kuriuos pavadinome teisingų dalybų schemomis. Išsirinkti labiausiai tinkamą dalybų metodą konkrečiam atvejui yra nelengva. Iš tikro yra daug situacijų, kuriose matematinės dalybos neįmanomos (vieną tokį svarbų pavyzdį nagrinėsime 4 skyriuje). Tačiau daugelyje kasdieninių situacijų šiame skyriuje nagrinėtos (arba vos pakeistos) dalybų schemos bus veiksmingos. Prisiminkite šiuos metodus tada, kai jums reikės pasidalyti palikimą, namą ar tiesiog gerų saldainių dėžutę – jie jums puikiai padės.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

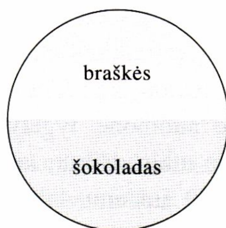


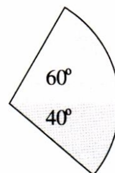
dalijančiojo ir besirenkančiojo metodas
diskrečiosios dalybos
įkainių metodas
paskutiniojo mažinusio metodas
teisinga dalis
teisingų dalybų schema
teisingų dalybų uždavinys
tolydžiosios dalybos
vienintelio besirenkančiojo metodas
vienintelio dalijančiojo metodas
žymeklių metodas

PRATIMAI

Apšilimas

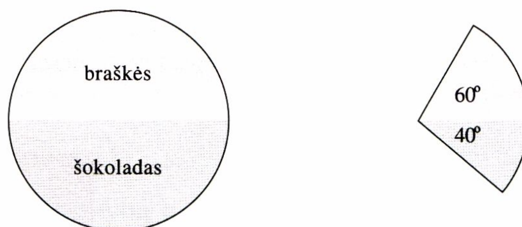
1. Aleksas nusipirko šokolado ir braškių tortą už 12 litų. Aleksui šokoladas patinka triskart labiau negu braškės. Atpjautas torto gabalas pavaizduotas paveikslėlyje.





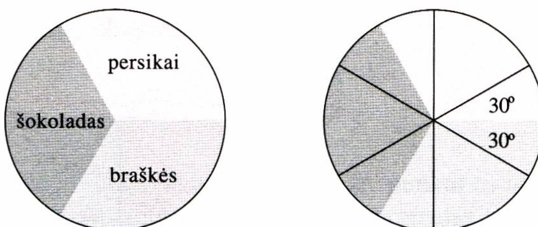
Kokia pinigų suma Aleksas įvertintų a) šokoladinę torto pusę?; b) braškinę torto pusę?; c) atpjautą torto dalį?

2. Jonas nusipirko šokolado ir braškių tortą už 9 litus. Jonui braškės patinka keturis kartus labiau negu šokoladas. Atpjautas torto gabalas pavaizduotas paveikslėlyje.



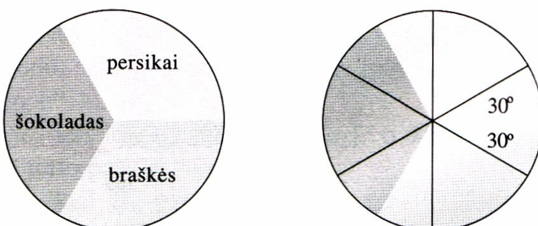
Kokia pinigų suma Jonas įvertintų a) šokoladinę torto pusę?; b) braškinę torto pusę?; c) atpjautą torto dalį?

3. Kęstutis nusipirko šokolado, braškių ir persikų tortą už 18 litų. Jam patinka ir šokoladas, ir braškės, ir persikai, bet braškės – du kartus labiau už persikus, o šokoladas – tris kartus labiau už persikus. Tortas supjaustomas į šešias vienodo dydžio dalis taip, kaip pavaizduota paveikslėlyje.



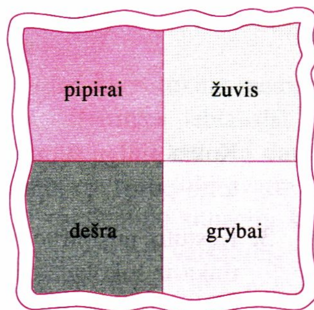
Kokia pinigų suma Kęstutis įvertintų a) šokoladinę torto dalį?; b) braškinę torto dalį?; c) persikinę torto dalį?; d) kiekvieną iš šešių torto gabalų?

4. Marytė nusipirko šokolado, braškių ir persikų tortą už 14 litų. Jai patinka ir šokoladas, ir braškės, ir persikai, bet braškės – du kartus labiau negu šokoladas, o šokoladas – du kartus labiau negu persikai. Tortas supjaustomas į šešias vienodo dydžio dalis taip, kaip pavaizduota paveikslėlyje.

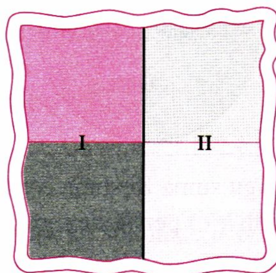


Kokia pinigų suma Marytė įvertintų a) šokoladinę torto dalį?; b) braškinę torto dalį?; c) persikinę torto dalį?; d) kiekvieną iš šešių torto gabalų?

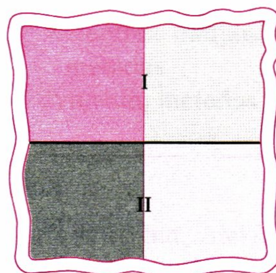
5. Du draugai, Dovydas ir Paulius, nusprendė pasidalyti picą, parodytą paveikslėlyje, dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu. Dovydas pipirus, dešrą ir grybus mėgsta vienodai, tačiau visiškai nevalgo žuvies. Paulius vienodai mėgsta žuvį, dešrą ir pipirus, tačiau nevalgo grybų.



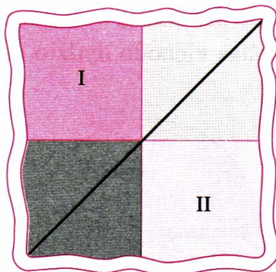
a) Tarkime, kad picą dalija Dovydas; i)–iv) paveikslėliuose matome keturiopai supjaustytą picą. Kuriuose paveikslėliuose picos dalys yra lygiavertės Dovydo požiūriu?



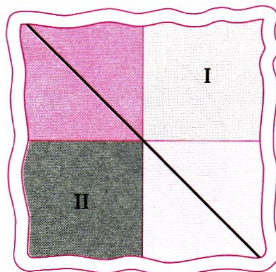
i)



ii)



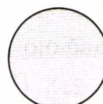
iii)



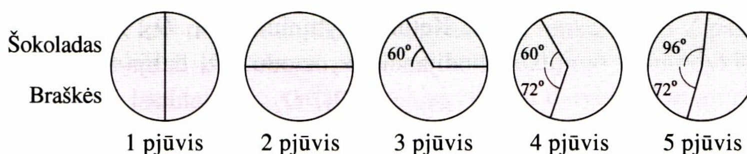
iv)

b) Kurį gabalą kiekvienu iš 4 atvejų pasirinktų Paulius?

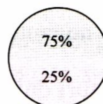
6. Rolandas ir Tadas nori pasidalyti šokolado ir braškių tortą. Rolandas mėgsta šokoladą tris kartus labiau negu braškes, o Tadas braškes – keturis kartus labiau negu šokoladą.



a) Tarkime, kad tortą pjausto Rolandas. Kuriuose paveikslėliuose pavaizduotas supjaustytas tortas atitinka Rolando vertinimą?



Pastaba. Rolando požiūriu tortas (pagal vertę) atrodo taip.

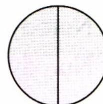


b) Kaip atrodo tortas Tado požiūriu? (žr. punkto a) nurodymą).

c) Punkte a) pavaizduotas penkeriopai perpjautas tortas. Kurie gabalai labiausiai patiktų Tadui?

d) Sakykime, kad Tadas dalija. Trimis skirtingais būdais nubraižykite pagal Tado vertinimą padalytą tortą.

e) Paaiškinkite, kodėl šitaip padalytas tortas atitinka bet kurį vertinimą?



7. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_3 dalija ir supjausto tortą į tris gabalus (g_1, g_2, g_3); renkasi D_1 ir D_2.

a) Tarkime, kad D_1 pasirenka $\{g_2, g_3\}$, o D_2 – $\{g_1, g_2\}$. Nurodykite galimą torto pasidalijimo variantą.

b) Tarkime, kad D_1 pasirenka $\{g_1, g_2, g_3\}$, o D_2 – $\{g_3\}$. Nurodykite galimą torto pasidalijimo variantą.

c) Tarkime, kad D_1 pasirenka $\{g_1\}$, o D_2 – $\{g_3\}$. Nurodykite galimą torto pasidalijimo variantą.

d) Tarkime, kad D_1 pasirenka $\{g_2\}$, o D_2 – taip pat $\{g_2\}$. Paaiškinkite, kaip šiuo atveju pasidalyti tortą.

8. Keturi dalybininkai D_1, D_2, D_3 ir D_4 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_4 dalija ir supjausto tortą į keturis gabalus (g_1, g_2, g_3, g_4); D_1, D_2, D_3 renkasi ir nurodo tokias torto dalis: $D_1 - \{g_2, g_3\}$, $D_2 - \{g_1, g_3\}$, $D_3 - \{g_1\}$.

a) Paaiškinkite, kaip pasidalyti tortą.

b) Paaiškinkite, kodėl šiuo atveju įmanomas tik vienas pasidalijimo variantas?

9. Keturi dalybininkai D_1, D_2, D_3 ir D_4 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_4 dalija ir supjausto tortą į keturis gabalus (g_1, g_2, g_3, g_4); D_1, D_2, D_3 renkasi ir nurodo tokias torto dalis: $D_1 - \{g_2, g_4\}$, $D_2 - \{g_1, g_4\}$, $D_3 - \{g_1, g_2\}$.

a) Nurodykite kokį nors torto pasidalijimo variantą.

b) Raskite kitą torto pasidalijimo variantą.

c) Ar galima tortą pasidalyti taip, kad dalybininkas D_4, pjaustęs tortą, negautų gabalo g_3? Kodėl?

10. Keturi dalybininkai D_1, D_2, D_3 ir D_4 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_4 dalija ir supjausto tortą į keturis gabalus (g_1, g_2, g_3, g_4); D_1, D_2, D_3 renkasi ir nurodo tokias torto dalis: $D_1 - \{g_3, g_4\}$, $D_2 - \{g_3, g_4\}$, $D_3 - \{g_3\}$. Paaiškinkite, kaip pasidalyti tortą.

11. Penki dalybininkai D_1, D_2, D_3, D_4 ir D_5 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_5 dalija ir supjausto tortą į penkis gabalus (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5); D_1, D_2, D_3, D_4 renkasi ir nurodo tokius torto gabalus: $D_1 - \{g_3, g_4\}$, $D_2 - \{g_3, g_4\}$, $D_3 - \{g_2, g_3, g_4\}$, $D_4 - \{g_2, g_3, g_5\}$.

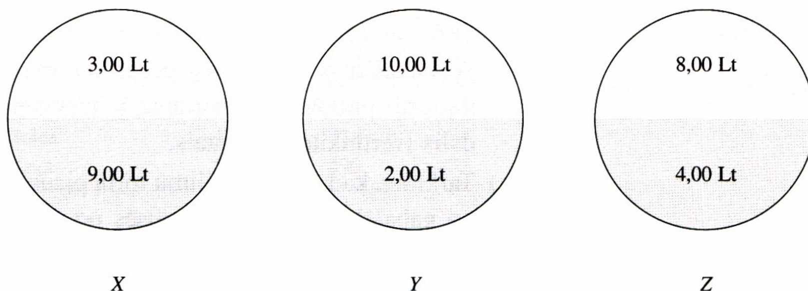
a) Nurodykite kokį nors torto pasidalijimo variantą.

b) Nurodykite dar vieną pasidalijimo variantą.

c) Ar galima tortą padalyti taip, kad tortą dalijęs dalybininkas D_5 negautų gabalo g_1? Kodėl?

12. Šeši dalybininkai D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 ir D_6 nori pasidalyti tortą vienintelio dalijančiojo metodu. D_6 dalija ir supjausto tortą į šešis gabalus (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6); D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 renkasi ir nurodo tokius torto gabalus: $D_1 - \{g_1, g_3\}$, $D_2 - \{g_2\}$, $D_3 - \{g_4, g_5\}$, $D_4 - \{g_4, g_5\}$, $D_5 - \{g_2\}$. Paaiškinkite, kaip pasidalyti tortą.

13. Trys dalybininkai X, Y ir Z nusprendė pasidalyti 12 litų vertės šokolado ir persikų tortą vienintelio besirenkančiojo metodu. Kiekvieno dalybininko vertinimai pavaizduoti paveikslėlyje.

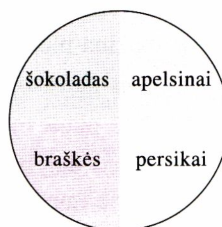


a) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna X, renkasi Y, o Z pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Nurodykite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite litais.

b) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna Z, renkasi X, o Y pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Nurodykite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite litais.

c) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna Y, renkasi Z, o X pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Nurodykite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite litais.

14. Trys dalybininkai X, Y ir Z nusprendė pasidalyti paveikslėlyje pavaizduotą tortą vienintelio besirenkančiojo metodu.



X vienodai mėgsta šokoladą ir apelsinus, bet visiškai nemėgsta braškių ir persikų;
Y vienodai mėgsta šokoladą ir braškes, bet visiškai nemėgsta apelsinų ir persikų;
Z vienodai mėgsta šokoladą ir persikus, bet visiškai nemėgsta braškių ir apelsinų.

a) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna X, renkasi Y, o Z pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Sugalvokite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite procentais.

b) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna Z, renkasi X, o Y pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Sugalvokite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite procentais.

c) Tarkime, kad pirmu dalijimu tortą pjauna Y, renkasi Z, o X pasirenka po gabalėlį iš kiekvienos pusės po antro dalijimo. Sugalvokite vieną torto pasidalijimo variantą ir kiekvienam dalybininkui atitekusias dalis įvertinkite procentais.

15. Keturi dalybininkai dalijasi tortą paskutiniojo mažinusio metodu. Visus keturis dalybininkus atsitiktine tvarka surašykime į eilę ir pavadinkime D_1, D_2, D_3 ir D_4. Pirmame rate D_1 atpjauna torto gabalą, D_2 ir D_3 mano, kad šis gabalas nėra per didelis ir jo nemažina, o D_4 – sumažina.

a) Ar gali D_2 gauti šį gabalą arba jo dalį?

b) Kam atiteks šis gabalas pasibaigus pirmam ratui?

c) Kas pjaus tortą antro rato pradžioje?

d) Kuris dalybininkas turi galimybę paskutinis sumažinti torto gabalą antrame rate?

e) Per kiek ratų keturi žmonės gali pasidalyti tortą?

16. 15 dalybininkų dalijasi tortą paskutiniojo mažinusio metodu. Visus penkiolika dalybininkų atsitiktine tvarka surašykime į eilę ir pavadinkime D_1, D_2, D_3, ..., D_{15}. Pirmame rate D_1 atpjauna torto dalį, o D_3, D_7 ir D_{15} šiame rate mažina. Antrame rate mažina tik D_3, o trečiame rate nemažina niekas.

a) Kas gaus torto gabalą pasibaigus pirmam ratui?

b) Kas pjaus tortą antro rato pradžioje?

c) Kuris dalybininkas turi galimybę paskutinis mažinti torto gabalą antrame rate?

d) Kam atiteks torto gabalas pasibaigus antram ratui?

e) Kas pjaus tortą trečio rato pradžioje?

f) Kuris dalybininkas turi galimybę paskutinis mažinti torto gabalą trečiame rate?

g) Kam atiteks torto gabalas pasibaigus trečiam ratui?

h) Per kiek ratų penkiolika žmonių gali pasidalyti tortą?

17. Trys seserys (A, B ir C) nori pasidalyti vaikystėje buvusius bendrus baldus įkainių metodu ir įkainoja kiekvieną baldą. Jų įkainiai litais surašyti lentelėje.

	A	*B*	*C*
Spinta	250	310	265
Stalas	195	150	185
Krėslas	175	215	235
Kilimas	510	490	475

Išspręskite šį dalybų uždavinį.

18. Benas, Ona ir Jonas nori pertvarkyti savo bendrovę į personalinę įmonę įkainių metodu (įmonė atitenka vienam iš jų, o kiti du gauna atitinkamą pinigų sumą). Benas įvertina bendrovės turtą 240 000 litų, Ona – 210 000, Jonas – 270 000 litų.

a) Kam atiteks įmonė ir už kiek?

b) Kiek gaus kiti du?

19. Trys žmonės A, B ir C nori pasidalyti keturis daiktus įkainių metodu. Jų įkainiai litais surašyti lentelėje.

Daiktai	*A*	*B*	*C*
Pirmas	250	310	265
Antras	195	150	185
Trečias	175	215	235
Ketvirtas	510	490	475

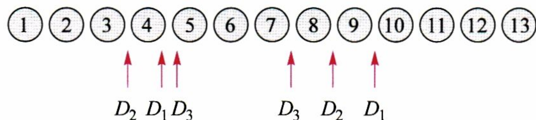
Išspręskite šį dalybų uždavinį.

20. Penki įpėdiniai A, B, C, D ir E nori įkainių metodu pasidalyti palikimą, kurį sudaro šeši daiktai. Jų įkainiai litais surašyti lentelėje.

Daiktai	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Pirmas	352	295	400	368	324
Antras	93	102	98	95	105
Trečias	461	449	510	501	476
Ketvirtas	852	825	832	817	843
Penktas	512	501	505	515	491
Šeštas	725	738	750	744	761

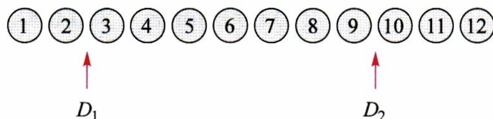
Išspręskite šį dalybų uždavinį.

21. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 sutarė pasidalyti 13 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



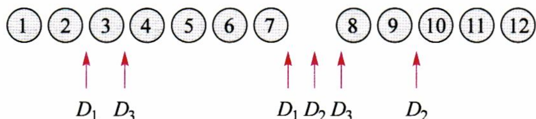
a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

22. Du dalybininkai D_1 ir D_2 sutarė pasidalyti 12 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



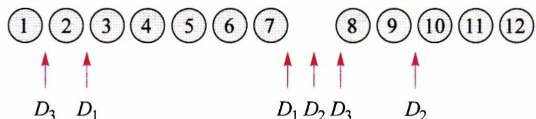
a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

23. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 sutarė pasidalyti 12 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



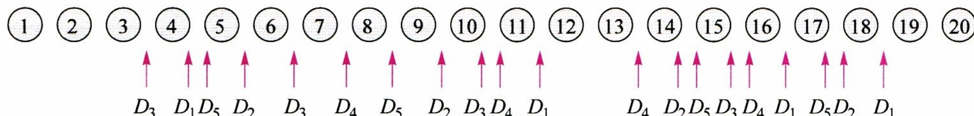
a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

24. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 sutarė pasidalyti 12 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



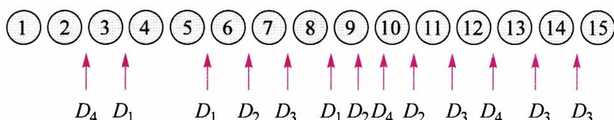
a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

25. Penki dalybininkai D_1, D_2, D_3, D_4 ir D_5 sutarė pasidalyti 20 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

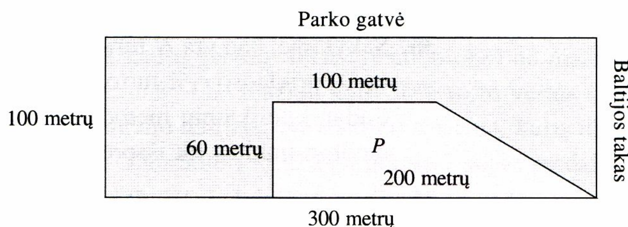
26. Keturi dalybininkai D_1, D_2, D_3 ir D_4 sutarė pasidalyti 15 daiktų žymeklių metodu. Daiktų rikiuotė ir dalybininkų sudėlioti žymekliai pavaizduoti paveikslėlyje.



a) Pasakykite, kas ir kam atiteko? b) Kurie daiktai liko?

Treniruotė

27. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 sutarė pasidalyti žemės sklypą paskutiniojo mažinusio metodu. Dalybininkų eilė – D_1, D_2 ir D_3. Pirmasis dalybininkas D_1 nurodo sklypo gabalą P, pavaizduotą paveikslėlyje.



Žinoma, kad dalybininkų D_2 ir D_3 vertinimai sutampa, ir visą žemę jie vertina vienodai.

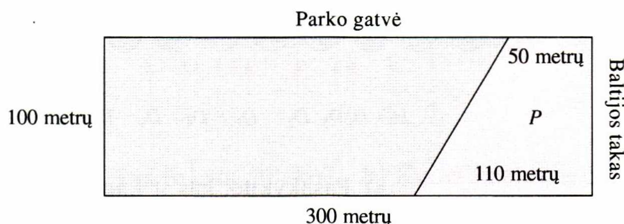
a) Geometriškai pagrįskite, kodėl D_2 ir D_3 nemažins pirmame rate, taigi gabalas P atiteks D_1.

b) Nurodykite, kokį pjūvį galėtų padaryti antrame rate dalijantysis.

c) Tarkime, kad, pasibaigus pirmam ratui D_2 ir D_3 sužino, jog savivaldybė reikalauja kitą pjūvį padaryti lygiagrečiai Parko gatvei. Nurodykite, kokį pjūvį galėtų padaryti antrame rate dalijantysis šiuo atveju.

d) Atlikite punkto c) užduotį, jei pjūvis turi eiti lygiagrečiai Baltijos takui.

28. Trys dalybininkai D_1, D_2 ir D_3 sutarė pasidalyti žemės sklypą paskutiniojo mažinusio metodu. Dalybininkų eilė – D_1, D_2 ir D_3. Pirmasis dalybininkas D_1 nurodo sklypo gabalą P, pavaizduotą paveikslėlyje.



Žinoma, kad dalybininkų D_2 ir D_3 vertinimai sutampa, ir visą žemę jie vertina vienodai.

a) Geometriškai pagrįskite, kodėl D_2 ir D_3 nemažins pirmame rate, taigi gabalas P atiteks D_1.
b) Nurodykite, kokį pjūvį galėtų padaryti dalijantis antrame rate.
c) Tarkime, kad, pasibaigus pirmam ratui, D_2 ir D_3 sužino, kad savivaldybė reikalauja kitą pjūvį padaryti lygiagrečiai Parko gatvei. Nurodykite, kokį pjūvį šiuo atveju galėtų padaryti dalijantis antrame rate.
d) Atlikite punkto c) užduotį, jei pjūvis turi eiti lygiagrečiai Baltijos takui.

29. Šis uždavinys remiasi 8 pavyzdžiu. Tarkime, kad senelė testamentu Algiui paliko 25%, Birutei – 35%, Celestinai – 30%, Dariui – 10% turto. Pritaikykite įkainių metodą šiuo atveju (galite drąsiai imti skaičiuoklį).

30. Sakykime, kad yra N turto paveldėtojų $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Pagal testamentą D_1 priklauso $r_1\%$ turto, D_2 – $r_2\%$ turto ir t.t. $(r_1+r_2+\cdots+r_N = 100)$. Sudarykite įkainių metodą šiuo bendruoju atveju. (*Nurodymas.* Šio uždavinio imkitės tik išsprendę 29 uždavinį.)

31. Du dalybininkai A ir B nori pertvarkyti savo bendrovę į vieno kurio nors personalinę įmonę įkainių metodu. A bendrovės turtą įkainoja x Lt, o B – y Lt $(x < y)$.

a) Kokia yra A ir B teisingų dalių vertė?
b) Kam lygus perteklius po pradinio turto padalijimo?
c) Kiek faktiškai sumokės dalybininkas B dalybininkui A už jam priklausančią bendrovės dalį?

32. Trys vaikai D_1, D_2 ir D_3 nusprendė pasidalyti penkiolika saldainių žymeklių metodu; iš viso yra trys ledinukai (L), šešios karamelės (K) ir šeši triufeliai (T). Dalybininkų vertinimai yra tokie: D_1 mėgsta ledinukus, bet visiškai nemėgsta karamelių ir triufelių; D_2 vienodai mėgsta

karameles ir ledinukus (t.y. 1 karamelė = 1 ledinukui), bet visai nemėgsta triufelių; D_3 vienodai mėgsta karameles ir triufelius (t.y. 1 karamelė = 1 triufeliui), bet visiškai nemėgsta ledinukų.

Saldainių rikiuotė pavaizduota šiame brėžinyje.



a) Kaip žymeklius turi išdėstyti D_1, kad gautų teisingą (jo vertinimu) dalį?
b) Kaip žymeklius turi išdėstyti D_2, kad gautų teisingą (jo vertinimu) dalį?
c) Kaip žymeklius turi išdėstyti D_3, kad gautų teisingą (jo vertinimu) dalį?
d) Kas atiteks kiekvienam dalybininkui?
e) Kokie saldainiai liks?

33. Išspręskite 32 uždavinį, jei saldainiai išrikiuoti šitaip.



34. Tarkime, kad du žmonės A ir B nusipirko šokolado ir braškių tortą už 10 litų. Kadangi A skyrė 7 Lt, o B – tik 3 Lt, tai jiedu abu nutarė pasidalyti tortą taip, kad A gautų gabalą, vertą (A nuomone) ne mažiau kaip 70% viso torto vertės, o B – ne mažiau kaip 30% torto vertės (B nuomone). Sudarykite vienintelio dalijančiojo metodo variantą, kuris tiktų šiuo atveju. (*Nurodymas.* Žiūrėkite į šį uždavinį kaip į paprastą dalybų uždavinį su daugeliu dalybininkų.)

35. Išspręskite panašų į 34 uždavinį su trimis dalybininkais – A, B ir C: A tortui pirkti skyrė 2,50 Lt, B – 3,50 Lt, o C – 4,00 Lt. Sudarykite dalybų schemą šiam uždaviniui.

36. Nagrinėkime tokį dalijančiojo ir besirenkančiojo metodo variantą su dviem dalybininkais. Dalijantysis perpjauna tortą į du gabalus, besirenkantysis, nematydamas perpjauto torto, renkasi dalį atsitiktinai – mesdamas monetą; dalijantysis, aišku, gauna likusią dalį.
a) Ar atitinka ši dalybų schema mūsų pateiktą dalybų schemos apibrėžimą? Kodėl?
b) Kas šiose dalybose geriau – dalyti ar rinktis? Kodėl?

Varžybos

37. **Kitas teisingos dalies apibrėžimas**. Apibrėšime keletą naujų sąvokų. Sakysime, kad dalybininkas *visiškai patenkintas*, jei jis gavo dalį, kuri (jo nuomone) yra verta ne mažiau kaip $1/N$ gėrybių aibės vertės (šią dalį iki šiol vadinome teisinga dalimi). Sakysime, kad dalybininkas yra *laimingas*, jei jo gautoji dalis yra (jo nuomone) verta ne mažiau negu bet kurio kito dalybininko dalis – kitaip sakant, ta dalimi šis dalybininkas su niekuo nenorėtų keistis. Šiame skyriuje nagrinėtos dalybų schemos laiduoja, kad visi dalybininkai bus visiškai patenkinti, bet ne visi – laimingi. Tokia jau žmogaus prigimtis – matydamas, kad kaimynas yra laimingas, o jis pats – tik visiškai patenkintas, dažnas jaučiasi nuskriaustas. Šio ir kito uždavinio tikslas yra panagrinėti naująją teisingumo interpretaciją.

a) Paaiškinkite, kodėl dalijančiojo ir besirenkančiojo metodas su dviem dalybininkais laiduoja, kad abu dalybininkai bus laimingi.

b) Pateikite dalybų vienintelio dalijančiojo metodu pavyzdį, kuriame iš trijų dalybininkų bent vienas baigtų dalybas visiškai patenkintas, bet nebūtų laimingas.

c) Pateikite dalybų vienintelio dalijančiojo metodu pavyzdį, kuriame visi trys dalybininkai baigtų dalybas laimingi.

38. Aprašykite tokį tolydžiųjų dalybų su trimis dalybininkais metodą, kad visi dalybininkai dalybas baigtų laimingi.

39. a) Paaiškinkite, kodėl, dalijantis daiktus įkainių metodu, lieka perteklius (jis būna ir nulinis, bet neigiamas – niekada).

b) Kada perteklius bus nulinis?

40. Šio uždavinio tikslas – vienintelio dalijančiojo metodą trims dalybininkams praplėsti bet kokio dalybininkų skaičiaus atveju.

a) Aprašykite vienintelio dalijančiojo metodą keturių dalybininkų atveju. (*Nurodymas*. Nagrinėkite galimas situacijas panašiai kaip trijų dalybininkų schemoje. Atkreipkite dėmesį į 8–10 pratimus.)

b) Aprašykite vienintelio dalijančiojo metodą su N dalybininkų.



4 Skirstymas

Jokio žmogaus gyvybė, laisvė ar turtas nėra saugūs, kol valdžia posėdžiauja.

NEŽINOMAS AUTORIUS

Apvalinimo paradoksai

Krepšelyje yra penkiasdešimt saldainių. Kaip juos padalyti penkiems vaikams?

UŽDAVINYS IŠ KETVIRTOSIOS KLASĖS MATEMATIKOS UŽDAVINYNO

Sunku patikėti, tačiau tik dabar mes tarsime paskutinį žodį apie šį uždavinį. Šiame skyriuje atskleisime dar vieną nepaprastos dalybų istorijos puslapį, ir po to tikrai pažadame palikti dalybų problemą ramybėje: kas būna, kai visi dalijami daiktai yra vienodi ir nedalomi, tačiau kiekvienas dalybininkas pretenduoja į skirtingą visumos dalį? Tolesni du pavyzdžiai iliustruoja, kas turima galvoje.

1a pavyzdys. (**Kapitalizmo pamoka namie**.) Penkiasdešimt vienodų saldainių (sakykime, ledinukų) mama ruošiasi padalyti penkiems vaikams. Užuot dalijusi visus saldainius vaikams po lygiai, mama nusprendžia padaryti ki-

taip: padalyti saldainius vaikams proporcingai jų sugaištam namų ruošos laikui. Laikydama rankoje chronometrą, mama ryžtingai pradeda kapitalizmo pamoką. Užbaigus visus darbus ir užpildžius lentelę, rezultatai buvo tokie:

Vaikas	Alius	Birutė	Celestinas	Darius	Eglė	Iš viso
Ruošos trukmė (min)	150	78	173	204	295	900

4.1a lentelė. Namų ruošos trukmė.

Dabar jau laikas dalyti saldainius. Laikantis sumanymo taisyklių, Aliui priklauso $16\frac{2}{3}\%$ saldainių $\left(\frac{150}{900} \cdot 100\% = 16\frac{2}{3}\%\right)$, t.y. $8\frac{1}{3}$ saldainio. Deja, atskiras saldainis nėra dalomas – ar bandėte padalyti ledinuką į tris dalis? Tai reiškia, kad Alius negali gauti lygiai tiek, kiek jam priklauso: jis gali gauti arba 8 saldainius (sumažintą dalį), arba 9 saldainius (tada kitas vaikas gaus sumažintą dalį), tačiau jis negali gauti lygiai tiek, kiek užsidirbo! Taip bus ir kitiems vaikams: Birutės tiksli dalis turėtų būti $4\frac{1}{3}$ saldainio, Celestino – $9\frac{11}{18}$ saldainio, Dariaus – $11\frac{1}{3}$ saldainio ir Eglės – $16\frac{7}{18}$ saldainio (paliekame skaitytojui patikrinti šiuos skaičius). Aišku, kad nė vienam iš vaikų mama negali duoti lygiai tiek, kiek jis užsidirbo, todėl mamai reikės tam tikros pagalbos.

Jeigu jūs nematote nieko ypatinga tokiose saldainių maišelio dalybose tarp kelių vaikų, štai jums kitas pavyzdys.

1b pavyzdys. (**Galaktikos kongresas.**) Dabar 2525 metai, ir visos galaktikos planetos po ilgalaikių konfliktų pagaliau pasirašė taikos sutartį. Penkios planetos (Alanas, Beta, Ceras, Dugas ir Elis) nusprendė susivienyti ir įkurti galaktikos federaciją. Federaciją valdys 50 delegatų kongresas. Nuspręsta, kad kiekvienos planetos delegatų skaičius bus proporcingas planetos gyventojų skaičiui. Duomenys apie planetų gyventojų skaičių yra tokie:

Planeta	Alanas	Beta	Ceras	Dugas	Elis	Iš viso
Gyventojų skaičius (milijardais)	150	78	173	204	295	900

4.1b lentelė. Galaktikos federacijos gyventojų skaičius 2525 metais.

Kiek delegatų bus iš Alano planetos? O iš Betos, Cero, Dugo ir Elio planetų?

Iš šio pavyzdžio irgi matyti, kad nėra tobulo būdo padalyti Galaktikos kongreso vietas penkioms planetoms taip, kad kiekvienai planetai skirtas vietų skaičius būtų tiksliai proporcingas jos gyventojų skaičiui. Ir vėl susiduriame su ta pačia bėda – tikslus teisingas kiekvienos planetos vietų skaičius

yra trupmeninis, tuo tarpu mums reikia sveikųjų skaičių, todėl kai kurios planetos gaus daugiau vietų, nei joms priklauso, o likusios – mažiau. Tam tikra neteisybė yra neišvengiama.

SKIRSTYMO UŽDAVINIAI

Nors 1a pavyzdyje dalijami saldainiai, o 1b – Galaktikos kongreso vietos, tačiau nesunku pastebėti, kad abu šie pavyzdžiai reiškia vieną ir tą patį matematinį uždavinį: kaip *teisingai* paskirstyti dalybininkams tam tikrą kiekį *vienodų* ir *nedalomų* objektų, jei kiekvienam priklauso skirtinga visumos dalis? 1a pavyzdžio uždavinys apie saldainių dalybas yra daugeliui gerai suprantamas (kas turi brolį ar seserį, su kuriais teko kovoti už savo dalį, gali tai paliudyti), jis aprašo paprastą ir palyginti nereikšmingą situaciją. 1b pavyzdyje mes matome rimtą ir svarbų to paties uždavinio variantą.

Tokie uždaviniai, kaip 1a ir 1b pavyzdžiuose, vadinami **skirstymo uždaviniais**. Jau turėjome progos įsitikinti, kad tam tikra neteisybė slypi kiekviename skirstymo uždavinyje, nes nėra visiškai teisingo būdo paskirstyti nedalomus objektus dalyviams, jei jiems priklauso ir trupmeninės dalys.

Šiame skyriuje išsamiai nagrinėsime kompromisų ieškojimo metodus. Mes bandysime rasti atsakymą į klausimą: „Kaip geriausiai (su mažiausia skriauda) **paskirstyti**?“

Kada atsirado ši problema? Data yra tiksliai žinoma: tai 1787 metai, kai buvo priimama JAV konstitucija, pirmoji konstitucija pasaulyje. Joje buvo numatyta, kad vietos Jungtinių Valstijų Atstovų rūmuose turi būti paskirstytos tarp valstijų proporcingai jų gyventojų skaičiui.

Nuo to laiko JAV matematikai (ir ne tik jie) siūlė daugybę įmantriausių būdų, kaip spręsti skirstymo uždavinius, o gyvenimas iškeldavo vis naujų reikalavimų ir atskleisdavo netikėtų dalykų. Ir šiame skyriuje, nagrinėdami **skirstymo metodus**, vis grįšime prie JAV istorijos. Europos pavyzdžiais negalime remtis, nes čia valdžios problemos sprendžiamos kitais principais.

Šiame skyriuje išnagrinėsime keletą reikšmingiausių skirstymo metodų.

SKIRSTYMO MATEMATIKA: PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Dabar esame pasirengę nuosekliai išnagrinėti skirstymo metodus, ir šiame skyriuje ne kartą remsimės šiuo išgalvotu, tačiau labai svarbiu pavyzdžiu.

2 pavyzdys. (**Paradoro parlamentas.**) Paradoras yra nauja Centrinės Amerikos respublika, kurią sudaro šešios valstijos: Azira, Bolija, Celija, Dimanta, Esmeralda ir Felija (trumpiau – A, B, C, D, E ir F). Paradoro parlamente yra 250 vietų, kurios turi būti padalytos šešioms valstijoms pagal jų gyventojų skaičių. Remiantis naujausio gyventojų surašymo duomenimis, kiekvienos valstijos gyventojų skaičius yra toks:

Valstija	A	B	C	D	E	F	Iš viso
Gyventojų skaičius	1 646 000	6 936 000	154 000	2 091 000	685 000	988 000	12 500 000

4.2 lentelė. Paradoro gyventojų skaičius.

Kiek vietų turėtų gauti kiekviena valstija?

Greitai įsitikinsime, kad šiame pavyzdyje slypi kai kas daugiau, nei matoma plika akimi, tačiau pirmiausia apibrėžkime keletą svarbių sąvokų.

Iš pradžių apskaičiuokime, keliems žmonėms atstovauja vienas parlamento narys. Kadangi Paradore yra 12 500 000 gyventojų, o parlamente – 250 vietų, tai vienas parlamento narys atstovauja $12\,500\,000/250 = 50\,000$ žmonių. Apskritai, jei bendras šalies gyventojų skaičius yra P, o atstovaujamų vietų skaičius yra M, tai santykis P/M rodo, keliems žmonėms atstovauja vienas parlamento narys. Skaičių P/M vadinsime **standartiniu dalikliu**. (Pastebėsime, kad standartinis daliklis apibrėžtas remiantis 2 pavyzdžiu, tačiau šis apibrėžimas tinka bet kuriam kitam skirstymo uždaviniui.) Paties pirmo pavyzdžio (su saldainiais) standartinis daliklis buvo $P/M = 900/50 = 18$, ir jis rodo vidutinį dirbtų minučių skaičių, vertą vieno ledinuko.

Pasitelkę standartinį daliklį, galime apskaičiuoti tą parlamento vietų skaičių, kuris priklausytų kiekvienai valstijai, jei vietos būtų dalios. Šis skaičius, kurį vadinsime valstijos **standartine kvota**, gaunamas dalijant valstijos gyventojų skaičių iš standartinio daliklio. Kitaip tariant,

$$\text{valstijos standartinė kvota} = \frac{\text{valstijos gyventojų skaičius}}{\text{standartinis daliklis}}.$$

Paradoro parlamento standartinė kvota nustatoma, kiekvienos valstijos gyventojų skaičių padalijus iš 50 000 (žr. 4.3 lentelę).

Valstija	A	B	C	D	E	F	Iš viso
Gyventojų skaičius	1 646 000	6 936 000	154 000	2 091 000	685 000	988 000	12 500 000
Standartinė kvota	32,92	138,72	3,08	41,82	13,70	19,76	250

4.3 lentelė. Paradoro valstijų standartinės kvotos.

Kadangi valstijos A standartinė kvota yra 32,92, tai jai turėtume skirti 32,92 parlamento vietos, jei tik tos vietos būtų dalomos į trupmenines dalis. Deja, to padaryti neįmanoma. Tas pats tinka likusioms valstijoms. Žinoma, visų standartinių kvotų suma turi būti lygi bendram skirstomų vietų skaičiui, kurį žymėsime raide M. Dėl apvalinimo paklaidų ši suma gali būti tik apytiksliai lygi M.

Kiekvienos valstijos standartinė kvota susijusi su dviem sveikaisiais skaičiais: valstijos **mažesniąja kvota** (standartinė kvota, suapvalinta iki mažesnio sveikojo skaičiaus) ir valstijos **didesniąja kvota** (standartinė kvota, suapvalinta iki didesnio sveikojo skaičiaus). Pavyzdžiui, valstijos *A*, kurios standartinė kvota yra 32,92, mažesnioji kvota lygi 32, o didesnioji – 33. (Tuo retu atveju, kai valstijos standartinė kvota yra sveikasis skaičius, mažesnioji ir didesnioji kvotos sutampa.)

Vėl grįžkime prie 2 pavyzdžio. Kaip geriausiai paskirstyti 250 vietų Paradoro parlamente, atsižvelgiant į gyventojų skaičių? Atrodo, kad suprantamiausia ir logiškiausia būtų suapvalinti standartines kvotas taip, kaip mokėmės apvalinti mokykloje – kvotą padidinti, jei jos trupmeninė dalis yra didesnė už 0,5, ir sumažinti priešingu atveju. Deja, šis būdas ne visada geras. Norėdami tuo įsitikinti, vėl pažvelkime į 2 pavyzdį.

Valstija	Gyventojų skaičius	Standartinė kvota	Suapvalintas vietų skaičius
A	1 646 000	32,92	33
B	6 936 000	138,72	139
C	154 000	3,08	3
D	2 091 000	41,82	42
E	685 000	13,70	14
F	988 000	19,76	20
Iš viso	12 500 000	250	251

4.4 lentelė.

Še tau! Nedidelis sunkumas: Paradoro parlamento vietų gavome viena daugiau, negu sutarta – 251 (visai panašu į padėtį, kai bilietų į lėktuvą parduota daugiau, negu jame yra vietų!).

Todėl ir negalima kvotų apvalinti įprastiniu būdu: sudėjus šitaip suapvalintus skaičius, nesueina galai. Vienąkart, kaip šiame pavyzdyje, gauname daugiau vietų, negu leista, kitąkart – mažiau, ir tik retkarčiais, dideliam mūsų džiaugsmui, viskas išeina gerai – tačiau toks atvejis pasitaiko pernelyg retai.

Taigi įprastinis standartinių kvotų apvalinimas netinka skirstymo metodui; tai liūdina, tačiau visai nestebina. Juk jei šis natūralus ir paprastas metodas visada tiktų, tai nebūtų skirstymo uždavinių ir šio skyriaus. Todėl likusioje skyriaus dalyje nagrinėsime sudėtingesnius skirstymo metodus ir jų privalumus bei trūkumus.

HAMILTONO METODAS

Pradėkime nuo matematiškai paties paprasčiausio – Hamiltono metodo*.

* Hamiltono metodas taip pat vadinamas *didžiausiojo likučio metodu*, o kartais – *Vintono metodu.*

Hamiltono metodas

- **1 žingsnis.** Apskaičiuojame kiekvienos valstijos standartinę kvotą. (Iš pradžių apskaičiuojame standartinį daliklį, tada kiekvienos valstijos gyventojų skaičių dalijame iš standartinio daliklio.)
- **2 žingsnis.** Kiekvienai valstijai skiriame mažesniąją kvotą.
- **3 žingsnis.** Jei susidaro vietų perteklius (taip dažniausiai ir atsitinka), išdalijame po vieną vietą iš eilės toms valstijoms, kurių standartinės kvotos trupmeninė dalis yra didžiausia.

3 pavyzdys. (**Hamiltonas imasi spręsti Paradoro uždavinį.**) Pabandykime sudaryti Paradoro parlamentą Hamiltono metodu. 4.5 lentelėje matome skaičiavimų rezultatus. (Priminsime, kad šiame pavyzdyje standartinis daliklis yra 50 000.)

Valstija	Gyventojų skaičius	Standartinė kvota (1 žingsnis)	Mažesnioji kvota (2 žingsnis)	Vietų perteklius (3 žingsnis)	Galutinis vietų paskirstymas
A	1 646 000	32,92	32	1 (pirmoji)	33
B	6 936 000	138,72	138	1 (ketvirtoji)	139
C	154 000	3,08	3		3
D	2 091 000	41,82	41	1 (antroji)	42
E	685 000	13,70	13		13
F	988 000	19,76	19	1 (trečioji)	20
Iš viso	12 500 000	250	246	4	250

4.5 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas Hamiltono metodu.

Hamiltono metodą galima aprašyti taip: kiekviena valstija gauna bent jau mažesniąją kvotą. Po to valstijos gauna didesniąją kvotą tokia tvarka: didžiausią trupmeninę dalį turinti valstija papildomąją vietą gauna pirmoji, antrąją didžiausią trupmeninę dalį turinti – antroji ir t.t.

Ar Hamiltono metodas yra pagrįstas skirstymo metodas? Hamiltonas, ko gero, buvo įsitikinęs jo pagrįstumu, tačiau 3 pavyzdys rodo, kad ne viskas yra taip gerai, kaip galima tikėtis. Valstija *E* turėjo didelę trupmeninę dalį 0,70 ir pretendavo į perteklinę vietą, tačiau jos negavo. Ar valstija *B*, kurios trupmeninė dalis 0,72, yra labiau verta perteklinės vietos nei valstija *E*? Atsakymas nėra visai aiškus. Jei žiūrėsime į trupmenines dalis kaip į absoliučius skaičius, atsakymas bus teigiamas (0,72 yra daugiau už 0,70). Tačiau jei į trupmeninę dalį žiūrėsime kaip į santykinę visos šalies gyventojų dalį, tai 0,70 sudaro kur kas didesnę valstijos *E* standartinės kvotos (13,70) dalį, negu 0,72 – valstijos *B* standartinės kvotos (138,72) dalį. Taigi kai kas gali

sakyti, kad labiau pagrįsta būtų perteklinę vietą atiduoti valstijai E, o ne valstijai $B^\star$.

Taigi tik paviršutiniškai žiūrint, Hamiltono skirstymo metodas atrodo nepriekaištingas – pasirodo, kad Hamiltono metodas yra palankus didžiosioms valstijoms ir nenaudingas mažosioms.

KVOTŲ TAISYKLĖ

Jei skirstymo metodas kiekvienai valstijai visada skiria jos mažesniąją arba didesniąją kvotą, tai sakoma, kad jis tenkina **kvotų taisyklę**. Jei kuriai nors valstijai skiriamas vietų skaičius, kuris yra arba mažesnis už mažesniąją kvotą, arba didesnis už didesniąją kvotą, tai sakoma, kad kvotų taisyklė pažeidžiama. Apie skirstymo metodus, kuriems gali taip atsitikti (nesvarbu, kaip dažnai), yra sakoma, kad jie pažeidžia kvotų taisyklę.

Ar galima taikyti tokį skirstymo metodą, kuris pažeidžia kvotų taisyklę? Be abejo, sunku įsivaizduoti, kad koks nors nešališkas žmogus laikytų pagrįstu paskirstymą, kai valstijai, kurios standartinė kvota, tarkime, 38,59, skirta 40 vietų. Taigi kvotų taisyklės pažeidimas yra didelis metodo trūkumas, ir galima paklausti: nejaugi yra „rimtų“ skirstymo metodų, kurie pažeidžia šį esminį principą? Atsakymas visiškai netikėtas: tokių metodų yra.

Visiškai aišku, kad Hamiltono metodui nekyla jokių sunkumų dėl kvotų taisyklės. Juo valstijos gauna arba didesniąją kvotą (tai tos laimingosios, kurios, dalijant perteklines vietas, yra pirmosios), arba mažesniąją kvotą (visos likusios). Tai yra vienas iš didžiausių Hamiltono metodo privalumų – jis *tenkina kvotų taisyklę*. Galima pasakyti, kad tai menka paguoda, tačiau vėliau įsitikinsime, kad ne taip jau daug yra skirstymo metodų, kurie šią taisyklę tenkintų. Keletas svarbiausių skirstymo metodų, kuriuos kiek vėliau nagrinėsime šiame skyriuje, taip pat pažeidžia ją.

Taigi Hamiltono metodas, atrodo, turi daug privalumų. Jis tenkina kvotų taisyklę, ir, išskyrus palankumą didelėms valstijoms ir nepalankumą mažosioms, atrodo pakankamai teisingas. Tad kodėl Hamiltono metodu negalima išspręsti visų uždavinių? Ko gero jau nujaučiate, kad dabar ketiname atskleisti blogąsias Hamiltono metodo puses.

Hamiltono metodo trūkumai. Alabamos paradoksas

Rimčiausią (tiesą sakant – lemtingą) Hamiltono metodo trūkumą atskleis štai toks pavyzdys.

4 pavyzdys. Mažą šalį sudaro trys valstijos – A, B ir C. 4.6 lentelėje pateiktas kiekvienos valstijos gyventojų skaičius ir standartinė kvota, kai

* Metodas, kai perteklinių vietų skirstymas prasideda ne nuo valstijos, turinčios absoliučiai didžiausią trupmeninę kvotos dalį, o nuo valstijos, turinčios santykinai didžiausią standartinės kvotos dalį, yra vadinamas *Laundeso metodu*. Šis metodas detaliau nagrinėjamas 29 pratime.

$M = 200$ ir $M = 201$. (Skaitytojui siūlome skaičiuoti pačiam. Čia galime truputį pagelbėti. Jei $M = 200$, tai standartinis daliklis lygus 100; jei $M = 201$, jis lygus 99,5.)

Valstija	Gyventojų skaičius	Standartinė kvota, kai $M = 200$	Standartinė kvota, kai $M = 201$
A	940	9,4	9,45
B	9 030	90,3	90,75
C	10 030	100,3	100,80
Iš viso	20 000	200	201

4.6 lentelė.

Skirstant vietas Hamiltono metodu, galima pastebėti, kad kai $M = 200$, vienintelei valstijai *A* atitenka perteklinė vieta (pažiūrėkite į trečią lentelės stulpelį), ir galutinis paskirstymas yra toks: *A* – 10 vietų, *B* – 90 vietų, *C* – 100 vietų.

Kas atsitiks, jei parlamento vietų skaičius padidės vienetu, t.y. $M = 201$? Tuomet bus dvi perteklinės vietos, kurios atiteks *B* ir *C* (pažiūrėkite į ketvirtą lentelės stulpelį), todėl galutinis paskirstymas bus toks: *A* – 9 vietos, *B* – 91 vieta, *C* – 101 vieta.

- **Išvada.** Valstija *A* praras vieną vietą (vietoje 10 vietų ji tegauna 9 vietas).
- **Kodėl?** Todėl, kad atsirado papildomų vietų!

Ši kebli situacija yra žinoma Alabamos paradokso vardu. Pirmą kartą tokia problema iškilo 1880 metais JAV. Buvo pastebėta, jog, skirstant Hamiltono metodu, Alabamos valstija būtų galėjusi gauti 8 vietas Atstovų rūmuose, jei juose būtų buvusios 299 vietos, ir tik 7 vietas jei Atstovų rūmuose būtų buvę 300 vietų. Taip atsirado Alabamos paradokso pavadinimas.

Tokios situacijos priežastys yra matematinio pobūdžio. Padidėjus skirstomų vietų skaičiui, valstijų standartinė kvota didėja nevienodu mastu, todėl pakinta perteklinių vietų skyrimo tvarka – kai kurios valstijos, buvusios pirmos, nustumiamos į galą, ir atvirkščiai. Tokioje situacijoje kuri nors valstija (ar net kelios valstijos) gali prarasti turėtas vietas. Taip ir atsitiko 4 pavyzdyje.

Alabamos paradoksas 1880 metais tapo mirties nuosprendžiu Hamiltono metodui. Įdomu, kad dar du rimti Hamiltono metodo trūkumai paaiškėjo tik vėliau, kai metodas jau nebuvo vartojamas.

Toliau šiame skyrelyje trumpai aptarsime tuos trūkumus, kadangi tai įdomu ir iš matematinės pusės.

Gyventojų skaičiaus paradoksas

Apie 1900 metus buvo pastebėta, kad, naudojantis Hamiltono metodu, valstija gali prarasti vietas paprasčiausiai dėl to, kad per daug išaugo jos gyventojų skaičius! Tai atrodo absurdiška, tačiau, pažiūrėję į pavyzdį, pamatysime, kad taip tikrai gali atsitikti.

5 pavyzdys. Ar prisimenate 2525 metų Galaktikos federaciją (1b pavyzdys)? Dar kartą pateikiame jos gyventojų skaičių:

Planeta	Alanas	Beta	Ceras	Dugas	Elis	Iš viso
Gyventojų skaičius (milijardais)	150	78	173	204	295	900

4.7 lentelė. Galaktikos federacijos gyventojų skaičius 2525 metais.

Paskirstykime visas 50 vietų Galaktikos kongrese Hamiltono metodu. Bendras penkių planetų gyventojų skaičius yra 900 milijardų. Padaliję šį skaičių iš 50, gausime, kad standartinis daliklis yra 18 milijardų. Su šiuo standartiniu dalikliu gausime standartines kvotas (antrasis stulpelis 4.8 lentelėje). Rezultatai, gauti po antro ir trečio Hamiltono metodo žingsnių, parodyti atitinkamai 4.8 lentelės trečiajame ir ketvirtajame stulpeliuose. Galutinis vietų paskirstymas parodytas 5 stulpelyje. Atkreipiame skaitytojo dėmesį į dvi planetas, kurios šiome pavyzdyje svarbiausios: Beta (4 delegatai) ir Elis (17 delegatų).

Planeta	Gyventojų skaičius (milijardais)	Standartinė kvota (Gyventojų skaičius/18)	Mažesnioji kvota (2 žingsnis)	Vietų perteklius (3 žingsnis)	Galutinis paskirstymas
Alanas	150	8,(3)*	8		8
Beta	78	4,(3)	4		4
Ceras	173	9,6(1)	9	1	10
Dugas	204	11,(3)	11		11
Elis	295	16,3(8)	16	1	17
Iš viso	900	50	48	2	50

4.8 lentelė. Galaktikos kongreso vietų paskirstymas 2525 metais Hamiltono metodu.

Galaktikos kongresas. 2535 metai. Praėjo dešimt metų, ir pats laikas peržiūrėti vietų paskirstymą galaktikos kongrese. Tiesą sakant, niekas Federacijoje labai nepasikeitė (gyventojų skaičiaus prasme). Cero gyventojų padaugėjo 8 milijardais (ceriečiai labai gyvybingi), o Elio – 1 milijardu. Visų kitų planetų gyventojų skaičius nepakito (žr. 4.9 lentelę).

* Skaičius skliausteliuose, kaip visada, reiškia periodą, t.y. $0,(3) = 0,3333\ldots$.

Planeta	Alanas	Beta	Ceras	Dugas	Elis	Iš viso
Gyventojų skaičius (milijardais)	150	78	181	204	296	909

4.9 lentelė. Galaktikos federacijos gyventojų skaičius 2535 metais.

Kadangi iš viso gyventojų dabar yra 909 milijardai, o delegatų skaičius tebėra 50, tai standartinis daliklis lygus $909/50 = 18,18$. 4.10 lentelėje pateikti paskirstymo Hamiltono metodu rezultatai, esant naujam standartiniam dalikliui. Galutinis vietų paskirstymas parodytas penktajame stulpelyje. Ar matote, kas labai neteisinga šiame paskirstyme? Elis, kurio gyventojų padaugėjo 1 milijardu, atidavė vieną vietą Betai, kurioje gyventojų skaičius visai nepadidėjo.

Planeta	Gyventojų skaičius (milijardais)	Standartinė kvota (Gyventojų skaičius / 18,18)	Mažesnioji kvota (2 žingsnis)	Vietų perteklius (3 žingsnis)	Galutinis paskirstymas	
Alanas	150	8,25	8		8	
Beta	78	4,29	4	1	5	←!!!
Ceras	181	9,96	9	1	10	
Dugas	204	11,22	11		11	
Elis	296	16,28	16		16	←!!!
Iš viso	909	50	48	2	50	

4.10 lentelė. Galaktikos kongreso vietų paskirstymas 2535 metais Hamiltono metodu.

Tai – **gyventojų skaičiaus paradoksas**: valstijos X gyventojų skaičius augo greičiau negu valstijos Y, tačiau, perskaičiavus atstovų vietas atsižvelgiant į naują gyventojų skaičių, valstijos X vieta atitenka valstijai Y.

Naujųjų valstijų paradoksas

Šis Hamiltono metodo trūkumas išaiškėjo 1907 metais, kai Oklahoma tapo JAV valstija. Iki tol Atstovų rūmuose buvo 386 vietos. Pagal Oklahomos valstijos gyventojų skaičių jai buvo suteiktos 5 vietos, todėl Atstovų rūmų vietų skaičius padidėjo nuo 386 vietų iki 391 vietos. Žinoma, pridedant papildomas 5 vietas, buvo siekiama nekeisti kitų valstijų turimų vietų skaičiaus. Pagaliau lyg ir akivaizdu, kad, atsiradus naujai valstijai, vietų paskirstymas kitoms valstijoms neturėtų pasikeisti ir atitinkamai padidinus vietų skaičių Atstovų rūmuose. Tačiau Hamiltono metodu iš naujo skirstant 391 Atstovų rūmų vietą (vietoje buvusių 386), paaiškėjo keistas dalykas: Meino atstovų padaugėja (nuo 3 iki 4), o Niujorko atstovų sumažėja (nuo 38 iki 37). Vadinasi, Oklahomos valstijai prisijungus prie JAV (su proporcinga vietų dalimi), Niujorko valstija turėtų atiduoti vieną vietą Meino valstijai! Būtent todėl šis Hamiltono metodo trūkumas ir vadinamas **naujųjų valstijų paradoksu**.

Naujųjų valstijų paradoksas
Prisijungus naujai valstijai ir jai suteikus atitinkamą vietų skaičių, gali pasikeisti ir kitų valstijų vietų pasiskirstymas.

Atitolkime kiek nuo politikos ir naujųjų valstijų paradoksą pailiustruokime tokiu pavyzdžiu.

6 pavyzdys. Mieste yra dvi aukštosios mokyklos: Pedagogikos universitetas (PU), kuriame mokosi 1045 studentai, ir Technikos universitetas (TU), kuriame mokosi 8955 studentai. Aukštųjų mokyklų tarybą sudaro 100 narių. Tarybos narių skaičius paskirstomas dviem universitetams Hamiltono metodu, ir Pedagogikos universitetui skiriama 10 vietų Taryboje, o Technikos universitetui – 90. Skaičiavimų rezultatai pateikti 4.11 lentelėje.

Aukštoji mokykla	Studentų skaičius	Standartinė kvota (standartinis daliklis = 100)	Galutinis paskirstymas
PU	1045	10,45	10
TU	8955	89,55	90
Iš viso	10000	100	100

4.11 lentelė. Aukštųjų mokyklų tarybos vietų paskirstymas dviem aukštosioms mokykloms Hamiltono metodu.

Šiame mieste įsikuria nauja aukštoji mokykla – Meno akademija (MA). Joje mokosi 525 studentai, todėl Aukštųjų mokyklų taryba (remdamasi tuo pačiu standartiniu dalikliu – viena tarybos vieta 100-ui studentų) nusprendžia padidinti tarybos narių skaičių 5 naujais nariais, kurie atstovaus MA. Kai tai buvo padaryta, kažkam šovė į galvą perskirstyti tarybos vietas iš naujo (tuo pačiu Hamiltono metodu). Rezultatas netikėtas! Pažvelkite į 4.12 lentelę.

Aukštoji mokykla	Studentų skaičius	Standartinė kvota (standartinis daliklis = 100,238)	Galutinis paskirstymas
PU	1 045	10,40	11
TU	8 955	89,34	89
MA	525	5,24	5
Iš viso	10 525	105	105

4.12 lentelė. Aukštųjų mokyklų tarybos vietų paskirstymas trims aukštosioms mokykloms Hamiltono metodu.

Matome, kad, perskaičiavus Aukštųjų mokyklų tarybos vietas, viena Technikos universiteto vieta atitenka Pedagogikos universitetui.

DŽEFERSONO METODAS

Dabar panagrinėsime kitą skirstymo metodą, svarbų tiek istoriškai, tiek matematiškai – **Džefersono metodą***. Džefersono metodo idėją paprasčiausia paaiškinti lyginant jį su Hamiltono metodu. Priminsime, kad skirstymas Hamiltono metodu pradedamas dalijant *kiekvienos* valstijos gyventojų skaičių iš tam tikro standartinio daliklio. Taip gaunamos standartinės valstijų kvotos. Antruoju žingsniu *kiekvienos* valstijos kvotą suapvaliname mažyn. Pastebėsime, kad iki šios vietos pagal Hamiltono metodą visoms valstijoms taikoma ta pati procedūra, ir kol kas ji visiškai pagrįsta. Tačiau toliau, trečiajame žingsnyje, prasideda sunkumai: yra kelių vietų perteklius, ir tas vietas reikia paskirstyti. Perteklinių vietų yra mažiau nei valstijų, todėl tos vietos klius tik kelioms iš jų. Kad ir kaip išmintingai tai bedarytume, kai kurios valstijos gaus papildomas vietas, tuo tarpu kitos – nieko. (Su tam tikra išlyga galima teigti, kad Hamiltono metodas vadovaujasi taisykle „kas daugiau turi, tas daugiau ir gauna“.) Teisingumo požiūriu tai yra pati silpniausia Hamiltono metodo vieta.

Taip pasvarsčius kyla mintis: ar nebūtų puiku, jei iš Hamiltono metodo trečiąjį žingsnį galėtume išmesti? Kitaip tariant, ar nebūtų puiku, jei galėtume rasti tokį skaičių, iš kurio padaliję kiekvienos valstijos gyventojų skaičių ir gautą kvotą suapvalinę mažyn, *negautume perteklinių vietų*?

Kaip šiai minčiai įkvėpti gyvybės? Teoriškai atsakymas yra paprastas: mes turime rasti kitą **daliklį**. Naudodamiesi tuo modifikuotuoju dalikliu, gausime kitas, modifikuotąsias, kvotas. Šios kvotos turėtų būti tokios, kad, jas visas suapvalinę mažyn ir sudėję, gautume skaičių, lygų skirstomų vietų skaičiui. Iš esmės mes jau ir aprašėme **Džefersono metodą**. Prieš išdėstydami jį nuosekliai, išnagrinėkime vieną pavyzdį.

---

7 pavyzdys. Dar kartą grįžkime prie Paradoro pavyzdžio. (Priminsime, kad šio pavyzdžio standartinis daliklis yra 50 000.)

4.13 lentelėje matome skaičiavimus, atliktus su standartiniu dalikliu. Mes juos jau esame atlikę, kalbėdami apie Hamiltono metodą (1 ir 2 žingsniai).

4.14 lentelėje matome panašius skaičiavimus, atliktus naudojantis **modifikuotuoju dalikliu** $D = 49\,500$. (Dabar nesigilinkime, iš kur atsirado skaičius 49 500 – tarkime, jis tiesiog nukrito iš dangaus.) Pastebėsime, kad, imant šį, mažesnį, daliklį, visos **modifikuotosios kvotos** yra didesnės už standartinę kvotą, o modifikuotųjų mažesniųjų kvotų suma yra lygi skirstomųjų vietų skaičiui. Paskutiniame 4.14 lentelės stulpelyje pateiktas galutinis vietų paskirstymas Džefersono metodu.

* Džefersono metodas vadinamas ir *didžiausiojo daliklio metodu.*

Valstija	Gyventojų skaičius	Standartinė kvota (gyventojų skaičius / 50 000)	Mažesnioji kvota (2 žingsnis)
A	1 646 000	32,92	32
B	6 936 000	138,72	138
C	154 000	3,08	3
D	2 091 000	41,82	41
E	685 000	13,70	13
F	988 000	19,76	19
Iš viso	12 500 000	250	246 ← Nepaskirtos net 4 vietos! Blogai!

4.13 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas. Skaičiuota su standartiniu dalikliu $D = 50\,000$.

Valstija	Gyventojų skaičius	Modifikuotoji kvota (gyventojų skaičius / 49 500)	Modifikuotoji mažesnioji kvota (2 žingsnis)
A	1 646 000	33,25	33
B	6 936 000	140,12	140
C	154 000	3,11	3
D	2 091 000	42,24	42
E	685 000	13,84	13
F	988 000	19,96	19
Iš viso	12 500 000	252,52	250 ← Nėra perteklinių vietų! Valio!

4.14 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas. Skaičiuota su modifikuotuoju dalikliu $D = 49\,500$.

Džefersono metodas

- **1 žingsnis.** Randame tokį skaičių D, kad kiekvienos valstijos modifikuotąsias kvotas (valstijos gyventojų skaičius / D) suapvalinę mažyn ir visas jas sudėję, gautume tikslų skirstomų vietų skaičių.
- **2 žingsnis.** Kiekvienai valstijai skiriame jos modifikuotąją mažesniąją kvotą.

Prieš tęsdami Džefersono metodo analizę, patikslinkime sąvokas, kuriomis iš tikro jau naudojomės. Skaičių D vadinsime **modifikuotuoju dalikliu**, o valstijos gyventojų skaičiaus ir daliklio D santykį – valstijos **modifikuotąja kvota**.

Mums teliko išspręsti paskutinį uždavinį – rasti tą magiškąjį daliklį D, kuriuo grindžiamas Džefersono metodas. Kaip 7 pavyzdyje surastas skaičius

$D = 49\,500$? Pasirodo, tą galima padaryti išmėgintu metodu. Pradėkime nuo to, kad modifikuotasis daliklis turi būti mažesnis už standartinį (nepamirškime – norime, kad modifikuotosios kvotos būtų didesnės už standartines, todėl turime dalyti iš mažesnio skaičiaus). Taigi pasirinkime skaičių D, kuris, mūsų spėjimu, galėtų tikti, ir atlikime visus reikiamus skaičiavimus (padalykime gyventojų skaičių iš D, rezultatą suapvalinkime mažyn, viską susumuokime). Jei mums pasiseks, tai šiuo pirmuoju spėjimu gausime reikiamą sumą ir skaičiavimus baigsime. Priešingu atveju teks imti naują daliklį (didesnį D, jei gauta suma per didelė, arba mažesnį, jei per maža) ir skaičiuoti iš naujo. Dažniausiai pakanka spėti du tris kartus, kol randame tinkamą daliklį D (iš tikrųjų jis yra ne vienintelis). Beje, geras skaičiuoklis čia labai praverstų.

Grįžkime prie 7 pavyzdžio ir pabandykime šiuo būdu rasti skaičių D. Aišku, kad ieškomas modifikuotasis daliklis turi būti mažesnis už 50 000. Spėjame, kad $D = 49\,000$. Skaitytojui siūlome skaičiuoti pačiam (žr. 27 a) pratimą) ir įsitikinti, kad šis daliklis netinka – sudėję gauname 251 skirstomą vietą, o tai truputį per daug. Vadinasi, skaičius D turėtų būti šiek tiek didesnis. Bandykime $D = 49\,500$. Tinka! Beje, daliklis $D = 49\,450$ irgi tinka, ir tokių tinkamų daliklių yra dar daugiau (žr. 27 b) pratimą).

Džefersono metodo trūkumai

Džefersono metodas turi vieną didžiulį trūkumą: *jis pažeidžia kvotų taisyklę*. Grįžkime prie 7 pavyzdžio ir pažvelkime į galutinį vietų paskirstymą: valstija B gavo 140 vietų. Na ir kas? – paklausite jūs. Bet pažvelkime į jos standartinę kvotą (138,72). Pagal kvotų taisyklę valstijai B turėtų priklausyti arba 138, arba 139 vietos. Kad ir kaip žiūrėtume, suteikę valstijai B 140 vietų, pažeidžiame proporcingumo principą (nepamirškime, kad valstijai B paskyrus daugiau vietų, kuri nors kita valstija jų gaus mažiau).

Toks kvotų taisyklės pažeidimas, kurį matėme šiame pavyzdyje (kai valstija gauna daugiau vietų negu jos didesnioji kvota), vadinamas **didesniosios kvotos pažeidimu**. Kvotų taisyklė pažeidžiama ir tada, kai valstija gauna mažiau vietų negu jos mažesnioji kvota; toks pažeidimas vadinamas **mažesniosios kvotos pažeidimu**. Tačiau Džefersono metodo paklaida yra vienpusė – jis gali pažeisti tik didesniąją kvotą (žr. 28 a) pratimą).

1790 metais buvo nutarta, kad JAV Atstovų rūmų vietas reikia skirstyti Džefersono metodu. Tuo metu vargu ar kas numanė, kad jis turi tokį rimtą trūkumą. Šis trūkumas pirmą kartą paaiškėjo 1832 metais, kai Niujorko valstija, kurios standartinė kvota buvo 38,59, gavo 40 vietų Atstovų rūmuose. Tai sukėlė tikrą sąmyšį, tik Niujorko valstijos delegacija buvo rami...

Paskutinį kartą JAV Atstovų rūmų vietos Džefersono metodu buvo paskirstytos 1832 metais. Būtent tada ir buvo pradėta ieškoti metodo, kuris nepažeistų kvotų taisyklės.

ADAMSO METODAS

Maždaug tuo pat metu, kai žlugo Džefersono metodo reputacija, Dž. Adamsas pasiūlė kitą metodą, kuris buvo lyg veidrodinis Džefersono metodo atspindys. Šis metodas rėmėsi visiškai ta pačia mintimi, tik vietoje modifikuotųjų mažesniųjų kvotų jis buvo grindžiamas modifikuotosiomis didesniosiomis kvotomis*.

Adamso metodas

- **1 žingsnis.** Randame tokį daliklį D, kad, kiekvienos valstijos modifikuotąsias kvotas (valstijos gyventojų skaičius / D) suapvalinę *didyn* ir sudėję, gautume tikslų skirstomų vietų skaičių.
- **2 žingsnis.** Kiekvienai valstijai skiriame jos modifikuotąją didesniąją kvotą.

Be abejonės, tokiu būdu Adamsas tikėjosi išvengti Džefersono metodo trūkumo – kvotų taisyklės pažeidimo. Tačiau jis buvo teisus tik iš dalies.

Pritaikykime Adamso metodą Paradoro parlamento pavyzdžiui.

8 pavyzdys. Spėkime tinkamą daliklio D reikšmę. Aišku, kad D turi būti didesnis už $D = 50\,000$ (mums reikia modifikuotųjų kvotų, kurios būtų mažesnės už standartines, nes tik tada galima tikėtis, kad, suapvalinus didyn, bendra suma neprašoks 250. Prisiminkime, kad, taikant Džefersono metodą, tiko skaičius 49 500, todėl dabar turėtų tikti $D = 50\,500$. 4.15 lentelėje parodyti skaičiavimai su $D = 50\,500$.

Valstija	Gyventojų skaičius	Modifikuotoji kvota (gyventojų skaičius / 50 500)	Modifikuotoji didesnioji kvota
A	1 646 000	32,59	33
B	6 936 000	137,35	138
C	154 000	3,05	4
D	2 091 000	41,41	42
E	685 000	13,56	14
F	988 000	19,56	20
Iš viso	12 500 000	247,52	251 ← Per daug!

4.15 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas. Skaičiuota su modifikuotuoju dalikliu $D = 50\,500$.

Bendra suma per didelė! Reikia truputį sumažinti modifikuotąją kvotą, todėl kiek padidinkime daliklį ir imkime $D = 50\,700$. 4.16 lentelėje parodyti skaičiavimai su $D = 50\,700$.

* Adamso metodas dar vadinamas *mažiausiojo daliklio metodu*.

Valstija	Gyventojų skaičius	Modifikuotoji kvota (gyventojų skaičius / 50 700)	Modifikuotoji didesnioji kvota
A	1 646 000	32,47	33
B	6 936 000	136,80	137
C	154 000	3,04	4
D	2 091 000	41,24	42
E	685 000	13,51	14
F	988 000	19,49	20
Iš viso	12 500 000	246,55	250 ← Tinka!

4.16 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas. Skaičiuota su modifikuotuoju dalikliu $D = 50\,700$.

Paskutiniame 4.16 lentelės stulpelyje pateiktas vietų paskirstymas Adamso metodu.

Taigi kuo gi blogas Adamso metodas? Ogi valstija *B* gavo 137 vietas, o jos standartinė kvota yra 138,72. Taigi valstija *B* gavo mažiau negu jos mažoji kvota.

Adamso metodas taip pat pažeidžia kvotų taisyklę, tačiau, priešingai nei Džefersono metodas, *jis pažeidžia mažesniąją kvotą* (žr. 30 b) pratimą). Jei Džefersono metodas yra pernelyg dosnus kai kurioms valstijoms, tai Adamso metodas kartais yra per daug šykštus. Taigi Adamso metodas taip pat kartais neteisingas.

VEBSTERIO METODAS

Tiek Džefersono metodas, tiek Adamso metodas visas valstijas vertina vienodai (tik Džefersono metodas visas kvotas apvalina mažyn, o Adamso metodas visas kvotas apvalina didyn), ir tai atrodo patraukliai, tačiau įsitikinome, kad šie metodai turi rimtų trūkumų. Be to, kodėl dvi kvotos, sakykime, 52,1 ir 3,9, turėtų būti apvalinamos vienodai? Ar tai teisinga?

1832 metais D.Vebsteris pasiūlė metodą*, kuris rėmėsi labai paprasta mintimi. Jis pasiūlė apvalinti kvotas taip, kaip esame įpratę – didyn, jei trupmeninė dalis yra didesnė už 0,5, ir mažyn – priešingu atveju. Mes jau bandėme taip daryti anksčiau, tačiau negavome nieko gera, nes buvo reikalaujama naudoti standartines kvotas. Dabar, kai jau tapome protingesni, kodėl mums nepabandžius naudotis modifikuotosiomis kvotomis, parinktomis taip, kad, suapvalinę įprastiniu būdu (link artimiausio sveikojo skaičiaus), gautume tikslų skirstomų vietų skaičių?

* Šis metodas dar vadinamas *didžiausiųjų dalių metodu.*

Vebsterio metodas

- **1 žingsnis.** Randame tokį skaičių D, kad, kiekvienos valstijos modifikuotąsias kvotas (valstijos gyventojų skaičius / D) suapvalinę iki artimiausio sveikojo skaičiaus ir jas susumavę, gautume tikslų skirstomų vietų skaičių.
- **2 žingsnis.** Kiekvienai valstijai priskiriame jos modifikuotą didesniąją kvotą.

9 pavyzdys. Sudarykime Paradoro parlamentą Vebsterio metodu.

Pirmiausia raskime daliklį D. Ar jis turėtų būti didesnis už standartinį daliklį (50 000), ar mažesnis? Kai link artimiausio sveikojo skaičiaus suapvaliname standartines kvotas (kaip kad darėme skyriaus pradžioje), bendra skirstomų vietų suma yra 251. Šis skaičius yra per didelis, o tai reiškia, kad daliklis D turi būti didesnis už standartinį daliklį. Pabandykime imti $D = 50\,100$ (žr. 4.17 lentelę).

Valstija	Gyventojų skaičius	Modifikuotoji kvota (gyventojų skaičius / 50 100)	Suapvalintoji kvota	
A	1 646 000	32,85	33	
B	6 936 000	138,44	138	
C	154 000	3,07	3	
D	2 091 000	41,74	42	
E	685 000	13,67	14	
F	988 000	19,72	20	
Iš viso	12 500 000	247,49	250	← Tinka!

4.17 lentelė. Paradoro parlamento vietų paskirstymas Vebsterio metodu (daliklis $D = 50\,500$).

Paskutiniame 4.17 lentelės stulpelyje pateiktas parlamento vietų paskirstymas Vebsterio metodu.

Nors Vebsterio metodo procedūra yra panaši į Džefersono ir Adamso metodus, tačiau praktiškai šį metodą taikyti yra kiek sudėtingiau. Ieškomasis daliklis D gali būti tiek mažesnis, tiek lygus, tiek didesnis už standartinį daliklį. 24 pratime rasite patarimų, kaip kuo greičiau atspėti skaičių D.

Vebsterio metodas turi savo privalumų. Tam tikra prasme jis atgaivina ir pateisina labai patrauklią mintį (skyriaus pradžioje ją tikrinome, bet atsisakėme): kvotas reikia apvalinti kaip ir įprastinius skaičius. Tada šis būdas netiko, nes rėmėmės standartinėmis kvotomis. Vebsterio metodas pakeičia, reikalui esant, kvotas ir įgyvendina šią mintį.

Mūsų karti patirtis moko, kad nereikia džiaugtis iš anksto – turime būti pasiruošę išgirsti ir blogų naujienų. Tai štai ir Vebsterio metodas turi trūkumų – jis taip pat pažeidžia kvotų taisyklę. Nors 9 pavyzdyje taip ir neatsitiko (skaitytojas gali įsitikinti, kad 9 pavyzdyje pateiktas paskirstymas nepažeidžia kvotų taisyklės), tačiau yra situacijų, kai Vebsterio metodu gauti paskirstymai pažeidžia kvotą. Beje, minėtos situacijos yra retos ir šiek tiek išgalvotos – gyvenime yra mažai tikėtina, kad, taikant Vebsterio metodą, būtų pažeista kvotų taisyklė.

Tad nors teoriškai Vebsterio metodas turi tą pačią ligą, kaip ir Džefersono bei Adamso metodai (pažeidžia kvotų taisyklę), tačiau praktiškai tarp jų yra didelis skirtumas – Vebsterio metodas serga labai lengva šios ligos forma, tuo tarpu kiti du metodai yra rimtai pasiligoję. Žinoma, Vebsterio metodas nėra tobulas, tačiau tai labai geras paskirstymo metodas, ir, kai kurių specialistų nuomone, jis kur kas geresnis už metodą, naudojamą šiuo metu vietoms JAV Atstovų rūmuose skirstyti.

IŠVADOS. BALINSKIO IR JUNGO NEGALIMUMO TEOREMA

Šiame skyriuje susipažinome su keturiais skirtingais *skirstymo metodais*. 4.18 lentelėje surašytas Paradoro parlamento vietų paskirstymas (žr. 2 pavyzdį), apskaičiuotas kiekvienu iš keturių metodų.

Matome, kad kiekvienu iš keturių metodų gauname skirtingus paskirstymus. Tai įrodo, kad visi metodai iš tikrųjų yra skirtingi. (Vis dėlto perspėjame skaitytoją, kad kartais skirtingi metodai duoda tą patį rezultatą – žr. 21–24 pratimus). Vienas iš keturių nagrinėtų metodų (Hamiltono) apsiriboja standartine kvota, tuo tarpu kiti trys (Džefersono, Adamso ir Vebsterio) remiasi modifikuotosiomis kvotomis. Šie metodai nėra lygiaverčiai, tačiau nė vienas iš jų nėra tobulas: kiekvienas jų arba pažeidžia kvotų taisyklę, arba sukelia paradoksus. 4.19 lentelėje surašytos visų keturių metodų savybės.

Valstija	Gyventojų skaičius	Kvota	Hamiltono metodas	Džefersono metodas	Adamso metodas	Vebsterio metodas
A	1 646 000	32,92	33	33	33	33
B	6 936 000	138,72	139	140	137	138
C	154 000	3,08	3	3	4	3
D	2 091 000	41,82	42	42	42	42
E	685 000	13,70	14	13	14	14
F	988 000	19,76	20	19	20	20
Iš viso	12 500 000	250	250	250	250	250

4.18 lentelė. Paradoro parlamentas. Keturių skirstymo metodų palyginimas.

	Hamiltono	Džefersono	Adamso	Vebsterio
Pažeidžia kvotų taisyklę	ne	taip	taip	taip
Alabamos paradoksas	taip	ne	ne	ne
Gyventojų skaičiaus paradoksas	taip	ne	ne	ne
Naujųjų valstijų paradoksas	taip	ne	ne	ne
Palankesnis	didžiosioms valstijoms	didžiosioms valstijoms	mažosioms valstijoms	neutralus

4.19 lentelė.

Susidurdavusieji su skirstymo uždaviniais daugelį metų puoselėjo viltį, kad matematikai pagaliau pasiūlys *idealų* skirstymo metodą, kuris niekada nepažeidžia kvotų taisyklės, nesukelia jokių paradoksų ir vienodai palankiai traktuoja didžiąsias ir mažąsias valstijas.

Išties, kodėl gi atsisakyti tokio siekio? Netikėtą atsakymą 1980 metais pateikė JAV matematikai M. L. Balinskis ir H. P. Jungas. Jie dviese padarė nuostabų atradimą, žinomą kaip **Balinskio–Jungo negalimumo teorema**:

Matematiškai negalimas skirstymo metodas be trūkumų. Skirstymo metodas, kuris nepažeidžia kvotų taisyklės, būtinai sukelia paradoksus, o skirstymo metodas, kuris nesukelia paradoksų, būtinai pažeidžia kvotų taisyklę.

Vėl susiduriame su jau girdėta išvada, tik šį kartą ji formuluojama truputį kitaip: teisingumas ir proporcingasis skirstymas – nesuderinami.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



Adamso metodas
Alabamos paradoksas
Balinskio–Jungo negalimumo teorema
daliklis
didesnioji kvota
gyventojų skaičiaus paradoksas
Hamiltono metodas
kvotų taisyklė
mažesnioji kvota
modifikuotoji kvota
naujųjų valstijų paradoksas
skirstymo metodas
skirstymo uždavinys
standartinė kvota
standartinis daliklis
Vebsterio metodas

PRATIMAI

Apšilimas

1–5 *pratimuose turima galvoje šalis, kurią sudaro keturios valstijos. Parlamente yra* 160 *vietų, o kiekvienos valstijos gyventojų skaičius nurodytas lentelėje.*

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*
Gyventojų skaičius (milijonais)	1,33	2,67	0,71	3,29

1. a) Raskite standartinį daliklį.
b) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos standartinę kvotą.
c) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos vietų skaičių parlamente Hamiltono metodu.

2. a) Remdamiesi dalikliu $D = 49\,400$, apskaičiuokite kiekvienos valstijos modifikuotąją kvotą.
b) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos vietų skaičių parlamente Džefersono metodu.

3. a) Remdamiesi dalikliu $D = 50\,700$, apskaičiuokite kiekvienos valstijos modifikuotąją kvotą.
b) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos vietų skaičių parlamente Adamso metodu.

4. a) Remdamiesi dalikliu $D = 50\,650$, apskaičiuokite kiekvienos valstijos modifikuotąją kvotą.
b) Remdamiesi dalikliu $D = 50\,600$, apskaičiuokite kiekvienos valstijos modifikuotąją kvotą.
c) Paaiškinkite, kodėl daliklis $D = 50\,650$ tinka Adamso metodui, o daliklis $D = 50\,600$ – netinka.
d) Raskite daliklį, kuris nebūtų lygus 50 700 ar 50 650, tačiau taip pat tiktų Adamso metodui.

5. a) Raskite daliklį, tinkamą Vebsterio metodui. (*Nurodymas.* Pabandykite tai padaryti be skaičiuoklio!)
b) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos vietų skaičių parlamente Vebsterio metodu.

6–9 *pratimuose nagrinėjama tokia situacija. Privati autobusų kompanija aptarnauja šešis autobusų maršrutus* (A, B, C, D, E *ir* F) *ir turi* 150 *autobusų. Kiek autobusų išvažiuoja kiekvienu maršrutu, priklauso nuo to maršruto vidutinio keleivių skaičiaus per dieną. Lentelėje pateikti atitinkami duomenys.*

Maršrutas	A	B	C	D	E	F
Vidutinis keleivių skaičius per dieną	12 550	38 623	19 781	31 112	33 280	14 654

6. a) Raskite standartinį daliklį.
b) Raskite kiekvieno maršruto standartinę kvotą.
c) Paskirstykite autobusus Hamiltono metodu.

7. Paskirstykite autobusus Džefersono metodu.

8. Paskirstykite autobusus Vebsterio metodu.

9. Paskirstykite autobusus Adamso metodu.

10–12 *pratimuose kalbama apie tokią situaciją. Miesto greitosios pagalbos stotyje dirba* 225 *gydytojai. Yra keturios pamainos: A* (*nuo* 6 *val. iki* 12 *val.*), *B* (*nuo* 12 *val. iki* 18 *val.*), *C* (*nuo* 18 *val. iki* 24 *val.*) *ir D* (*nuo* 24 *val. iki* 6 *val.*). *Gydytojai paskirstomi remiantis vidutiniu iškvietimų per pamainą skaičiumi* (*žr. lentelę*).

Pamaina	*A*	*B*	*C*	*D*
Vidutinis iškvietimų skaičius	823	659	882	286

10. a) Raskite standartinį daliklį. Paaiškinkite, ką reiškia šio uždavinio standartinis daliklis.
b) Apskaičiuokite kiekvienos pamainos standartinę kvotą.
c) Paskirstykite gydytojus pamainomis Hamiltono metodu.

11. Paskirstykite gydytojus pamainomis Džefersono metodu. (*Nurodymas*. Daliklis nebūtinai turi būti sveikasis skaičius.)

12. Paskirstykite gydytojus pamainomis Adamso metodu. (*Nurodymas*. Daliklis nebūtinai turi būti sveikasis skaičius.)

13–17 *pratimuose turima galvoje šalis, kurią sudaro* 5 *valstijos. Šalies gyventojų skaičius yra* 24,8 *milijono. Kiekvienos valstijos standartinė kvota nurodyta lentelėje.*

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Standartinė kvota	25,26	18,32	2,58	37,16	40,68

13. a) Apskaičiuokite vietų skaičių parlamente.
b) Raskite standartinį daliklį.
c) Apskaičiuokite kiekvienos valstijos gyventojų skaičių.

14. Kaip pasiskirstytų parlamento vietos Hamiltono metodu?

15. Kaip pasiskirstytų parlamento vietos Džefersono metodu?

16. Kaip pasiskirstytų parlamento vietos Adamso metodu?

17. Kaip pasiskirstytų parlamento vietos Vebsterio metodu?

18. Universitete yra penki fakultetai: Tiksliųjų mokslų, Ekonomikos, Filologijos, Gamtos ir Visuomenės mokslų. Iš viso universitete dirba 500 dėstytojų. Kiek dėstytojų dirba kiekviename fakultete, priklauso nuo to fakulteto studentų skaičiaus (žr. lentelę).

Fakultetas	Tiksliųjų mokslų	Gamtos	Ekonomikos	Visuomenės mokslų	Filologijos	Iš viso
Studentų skaičius	2 500	1 300	2 890	3 400	4 910	15 000

a) Raskite standartinį daliklį. Paaiškinkite, ką reiškia šio uždavinio standartinis daliklis.
b) Apskaičiuokite kiekvieno fakulteto standartinę kvotą.
c) Džefersono metodu apskaičiuokite, kiek dėstytojų turėtų dirbti kiekviename fakultete.
d) Vebsterio metodu apskaičiuokite, kiek dėstytojų turėtų dirbti kiekviename fakultete.

19. Mama ketina padalyti 10 saldainių trims vaikams pagal tai, kiek minučių kiekvienas iš jų mokėsi. Mokymosi trukmė parodyta lentelėje.

Vaikas	Benas	Augustė	Rolandas
Mokėsi minučių	703	243	54

a) Apskaičiuokite Hamiltono metodu, po kiek saldainių gaus kiekvienas vaikas.
b) Tarkime, kad, imdama dalyti saldainius, mama suranda dar vieną saldainį. Apskaičiuokite Hamiltono metodu, kiek saldainių gaus kiekvienas vaikas, jei saldainių bus 11.
c) Ar pastebėjote kokį paradoksą? Kaip tas paradoksas vadinamas?

20. Mama ketina padalyti 11 saldainių trims vaikams pagal tai, kiek minučių kiekvienas iš jų mokėsi. Mokymosi trukmė parodyta lentelėje.

Vaikas	Benas	Augustė	Rolandas
Mokėsi minučių	703	243	54

a) Apskaičiuokite Hamiltono metodu, kiek saldainių gaus kiekvienas vaikas.
b) Tarkime, kad, prieš mamai imant skaičiuoti, kam kiek saldainių priklauso, vaikai nusprendė dar truputį pasimokyti – Rolandas papildomai mokėsi 10 minučių, Augustė – 20 minučių ir Benas – 70 minučių. Apskaičiuokite Hamiltono metodu, kiek saldainių gaus kiekvienas vaikas tokiu atveju.
c) Kaip pasikeitė saldainių paskirstymas? Ar pastebėjote paradoksą? Kaip tas paradoksas vadinamas?

Treniruotė

21. Sudarykite tokį skirstymo uždavinį, kad, skaičiuojant tiek Hamiltono, tiek Džefersono metodu, kiekviena valstija gautų lygiai tą patį parlamento vietų skaičių. Jūsų pavyzdyje turi būti mažiausiai trys valstijos, o standartinės kvotos – nesveikieji skaičiai.

22. Sudarykite tokį skirstymo uždavinį, kad, skaičiuojant tiek Hamiltono, tiek Adamso metodu, kiekviena valstija gautų lygiai tą patį parlamento vietų skaičių. Jūsų pavyzdyje turi būti mažiausiai trys valstijos, o standartinės kvotos – nesveikieji skaičiai.

23. Sudarykite tokį skirstymo uždavinį, kad, skaičiuojant tiek Hamiltono, tiek Vebsterio metodu, kiekviena valstija gautų lygiai tą patį parlamento vietų skaičių. Jūsų pavyzdyje turi būti mažiausiai trys valstijos, o standartinės kvotos – nesveikieji skaičiai.

24. a) Nagrinėkime tokią situaciją: šalies parlamentą sudaro 5 valstijų atstovai.

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Standartinė kvota	11,23	24,39	7,92	36,18	20,28

Jūs rengiatės atlikti skirstymą Vebsterio metodu. Paaiškinkite, kodėl turite ieškoti daliklio, *mažesnio* už standartinį.

b) Nagrinėkime tokią situaciją:

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Standartinė kvota	11,73	24,89	7,92	35,68	19,78

Jūs rengiatės atlikti skirstymą Vebsterio metodu. Paaiškinkite, kodėl turite ieškoti daliklio, *didesnio* už standartinį.

c) Kokiomis sąlygomis jūs galite būti tikras, kad Vebsterio metodui tiks standartinis daliklis.

25. Nagrinėkime parlamento vietų skirstymo dviem valstijoms A ir B uždavinį. Tarkime, kad valstijos A kvota yra k_1, valstijos B – k_2, o k_1 ir k_2 nėra sveikieji skaičiai. (Aišku, kad $k_1 + k_2 = M$ yra sveikasis skaičius.) Sakykime, kad f_1 yra skaičiaus k_1 trupmeninė dalis, o f_2 – skaičiaus k_2 trupmeninė dalis.

a) Paaiškinkite, kodėl viena trupmeninė dalis yra ne mažesnė už 0,5, o kita – ne didesnė už 0,5.

b) Paaiškinkite, kodėl tuo atveju, kai nė viena trupmeninė dalis nelygi 0,5, tiek Hamiltono metodu, tiek Vebsterio metodu gausime tą patį vietų paskirstymą.

c) Paaiškinkite, kodėl jokiame skirstymo uždavinyje, kuriame yra tik dvi valstijos, taikant Hamiltono metodą, niekada neiškils nei Alabamos paradoksas, nei gyventojų skaičiaus paradoksas.

d) Paaiškinkite, kodėl c) punkto situacijoje Vebsterio metodas niekada nepažeis kvotų taisyklės.

26. Šiuo pavyzdžiu pailiustruosime, kad tam tikrais retais atvejais modifikuotojo daliklio taikymas yra neveiksmingas. Šalį sudaro keturios valstijos. Jos parlamente yra 51 vieta. Kiekvienos valstijos gyventojų skaičius nurodytas lentelėje.

Valstija	A	B	C	D
Gyventojų skaičius	500	1000	1500	2000

a) Džefersono metodu apskaičiuokite kiekvienos valstijos atstovų skaičių parlamente.

b) Pabandykite paskirstyti vietas Adamso metodu su modifikuotuoju dalikliu $D = 100$. Kas atsitiks, jei $D < 100$? Kas atsitiks, jei $D > 100$?

c) Paaiškinkite, kodėl šiame pavyzdyje Adamso metodas yra neveiksmingas.

27. Tarkime, kad jūs norite paskirstyti Paradoro parlamento vietas (žr. 2 pavyzdį) Džefersono metodu.

a) Įrodykite, kad daliklis $D = 49\,000$ netinka.

b) Įrodykite, kad tinka bet kuris daliklis tarp 49 401 ir 49 542 (imtinai) ir kad daugiau tinkamų sveikųjų skaičių nėra.

28. a) Paaiškinkite, kodėl Džefersono metodas gali pažeisti tik didesniąją kvotą.

b) Paaiškinkite, kodėl Adamso metodas gali pažeisti tik mažesniąją kvotą.

c) Remdamiesi a) ir b) punktais, įrodykite, kad, skirstant vietas dviem valstijoms, nei Džefersono, nei Adamso metodas negali pažeisti kvotų taisyklės.

29 *ir* 30 *pratimuose nagrinėjamas Hamiltono metodo variantas, vadinamas Laundeso metodu (šis metodas vadinamas ir modifikuotuoju Hamiltono metodu). Pagrindinis skirtumas tarp tų metodų yra tas, kad, kiekvienai valstijai skyrus mažesniąją kvotą, vietų perteklius Laundeso metodu išdalijamas santykinių trupmeninių dalių dydžio tvarka. (Skaičiaus santykinė trupmeninė dalis yra trupmeninė dalis, padalyta iš sveikosios dalies. Pavyzdžiui, skaičiaus* 41,82 *santykinė trupmeninė dalis yra* $0{,}82/41 = 0{,}02$, *o skaičiaus* 3,08 *– lygi* $0{,}08/3 \approx 0{,}027$. *Taigi nors skaičius* 41,82 *pagal Hamiltono metodą turi pranašumą prieš* 3,08, *tačiau pagal Laundeso metodą* 3,08 *pranašesnis už* 41,82, *nes* 0,027 *yra daugiau negu* 0,02.)

29. a) Raskite Paradoro parlamento vietų paskirstymą (žr. 2 pavyzdį) Laundeso metodu.

b) Patikrinkite, ar galutinis paskirstymas skiriasi nuo parodytų 4.19 lentelėje. Nurodykite, kurios valstijos išlošė taikant ne Hamiltono metodą, o Laundeso metodą.

c) Kokioms valstijoms palankesnis Laundeso metodas – didžiosioms ar mažosioms?

30. Nagrinėkime uždavinį apie parlamento vietų paskirstymą dviem valstijoms A ir B. Tarkime, kad valstijos A kvota yra k_1, o valstijos B – lygi k_2, čia k_1 ir k_2 nėra sveikieji skaičiai. (Suprantama, $k_1 + k_2 = M$ yra sveikasis skaičius.) Sakykime, kad f_1 yra skaičiaus k_1 santykinė trupmeninė dalis, o f_2 – skaičiaus k_2 santykinė trupmeninė dalis.

Raskite tokias k_1 ir k_2 reikšmes, kad tiek Laundeso metodu, tiek Hamiltono metodu gautume a) tą patį vietų paskirstymą; b) skirtingą vietų paskirstymą.

c) Parašykite nelygybę, siejančią k_1, k_2, f_1 ir f_2, kuri garantuotų, kad Laundeso ir Hamiltono metodai duos skirtingą vietų paskirstymą.

Varžybos

31. Sudarykite tokį skirstymo uždavinį, kad visais keturiais metodais (Hamiltono, Džefersono, Adamso ir Vebsterio) gautumėte lygiai tą patį vietų paskirstymą. Jūsų pavyzdyje turi būti mažiausiai keturios valstijos; standartinės kvotos turi būti nesveikieji skaičiai.

32–34 *pratimai remiasi Hantingtono–Hilo metodu, aprašytu šio skyriaus priede. Nespręskite jų neperskaitę priedo.*

32. Hantingtono–Hilo metodu raskite kiekvienos iš penkių šalies valstijų parlamento vietų paskirstymą. Šalyje gyvena 24,8 milijono žmonių. Kiekvienos valstijos standartinės kvotos yra tokios.

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Standartinė kvota	11,23	24,39	7,92	36,18	20,28

33. a) Hantingtono–Hilo metodu paskirstykite Paradoro parlamento vietas (žr. 2 pavyzdį).

b) Palyginkite a) punkte gautą paskirstymą su paskirstymu, gautu Vebsterio metodu. Kokios Jūsų išvados?

34. Šalį sudaro šešios valstijos, kurių gyventojų skaičius parodytas lentelėje.

Valstija	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Iš viso
Gyventojų skaičius	344 970	204 950	515 100	84 860	154 960	695 160	2 000 000

Parlamente yra 200 vietų.

a) Raskite vietų paskirstymą Vebsterio metodu.

b) Raskite vietų paskirstymą Hantingtono–Hilo metodu.

c) Palyginkite punktų a) ir b) daliklius.

d) Palyginkite punktų a) ir b) vietų paskirstymus.

PRIEDAS. Hantingtono–Hilo metodas

Šiuo metu Jungtinių Amerikos Valstijų Atstovų rūmų vietoms skirstyti naudojamas **Hantingtono–Hilo metodas**, arba kitaip – **lygiųjų proporcijų metodas**.

Metodą 1911 metais pasiūlė Dž. A. Hilas, JAV Gyventojų surašymo biuro vyriausiasis statistikas, ir E. V. Hantingtonas, Harvardo universiteto mechanikos ir matematikos profesorius. 1929 metais Hantingtono–Hilo metodą žymių matematikų grupė patvirtino esant geriausią iš žinomų skirstymo metodų.

Hantingtono–Hilo metodą geriausia paaiškinti lyginant su Vebsterio metodu. Tiesą sakant, abu metodai yra labai panašūs.

Kaip ir Vebsterio metodo atveju, taikydami Hantingtono–Hilo metodą, turime rasti modifikuotąsias kvotas ir jas suapvalinti – kai kurias didyn, kai kurias mažyn. Didžiausias skirtumas yra apvalinimo būdas. Imkime, pavyzdžiui, valstiją, kurios modifikuotoji kvota lygi 3,48. Taikydami Vebsterio metodą, šią kvotą turime apvalinti mažyn ir skirti valstijai tris vietas (mažesniąją kvotą). Galima būtų pasakyti taip: kai taikome Vebsterio metodą, lūžio taškas, kuriame nuo apvalinimo mažyn pereiname prie apvalinimo didyn, yra mažesniosios kvotos ir didesniosios kvotos aritmetinis vidurkis:

$$\text{Vebsterio metodo lūžio taškas} = \\ = \frac{\text{modifikuotoji mažoji kvota} + \text{modifikuotoji didžioji kvota}}{2}.$$

(Taigi valstijai, kurios modifikuotoji kvota yra 3,48, lūžio taškas yra 3,5, ir jos modifikuotoji kvota apvalinama mažyn.)

O kur yra lūžio taškas, kai apvaliname kvotas Hantingtono–Hilo metodu? Jis nustatomas formule, kuri gali atrodyti kiek keistokai*:

$$\text{Hantingtono–Hilo metodo lūžio taškas} = \\ = \sqrt{\text{modifikuotoji mažesnioji kvota} \times \text{modifikuotoji didesnioji kvota}}.$$

Grįžkime prie valstijos, kurios modifikuotoji kvota yra 3,48. Hantingtono–Hilo metodo lūžio taškas yra $\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} = 3{,}464$. Kadangi 3,48 yra virš lūžio taško, tai valstijos modifikuotą kvotą reikia apvalinti didyn. Todėl pagal Hantingtono–Hilo metodą, skirtingai nei taikant Vebsterio metodą, ši valstija gaus 4 vietas.

* Prisiminkime, kad dviejų teigiamų skaičių a ir b geometriniu vidurkiu vadinamas dydis $\sqrt{ab}$. Todėl Hantingtono–Hilo metodo apvalinimo lūžio tašką galime apibūdinti kaip modifikuotųjų mažesniosios ir didesniosios kvotų geometrinį vidurkį.

Hantingtono–Hilo apvalinimo taisyklė
Kvotos, kuri yra tarp n (mažesniosios kvotos) ir $n + 1$ (didesniosios kvotos), Hantingtono–Hilo metodo lūžio taškas yra $H = \sqrt{n \times (n+1)}$. Kitaip sakant, jei kvota yra didesnė už H, ji apvalinama didyn, priešingu atveju – mažyn.

Hantingtono–Hilo metodas

- **1 žingsnis.** Randame tokį skaičių D, kad, suapvalinę pagal Hantingtono–Hilo taisyklę kiekvienos valstijos modifikuotąsias kvotas (valstijos gyventojų skaičius / D) ir jas susumavę, gautume tikslų skirstomų vietų skaičių.
- **2 žingsnis.** Kiekvienai valstijai skiriame 1 žingsniu gautą jos suapvalintą modifikuotąją kvotą.

4.20 lentele patogu naudotis skirstant vietas Hantingtono–Hilo metodu.

Modifikuotoji kvota tarp	Lūžio taškas apvalinant Vebsterio metodu	Lūžio taškas apvalinant Hantingtono–Hilo metodu
1 ir 2	1,5	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
2 ir 3	2,5	$\sqrt{6} \approx 2{,}449$
3 ir 4	3,5	$\sqrt{12} \approx 3{,}464$
4 ir 5	4,5	$\sqrt{20} \approx 4{,}472$
5 ir 6	5,5	$\sqrt{30} \approx 5{,}477$
6 ir 7	6,5	$\sqrt{42} \approx 6{,}481$
7 ir 8	7,5	$\sqrt{56} \approx 7{,}483$
8 ir 9	8,5	$\sqrt{72} \approx 8{,}485$
9 ir 10	9,5	$\sqrt{90} \approx 9{,}487$
10 ir 11	10,5	$\sqrt{110} \approx 10{,}488$

4.20 lentelė.

Šį priedą baigsime pavyzdžiu, kuris rodo, kad Hantingtono–Hilo metodu gautas vietų paskirstymas gali skirtis nuo gauto Vebsterio metodu.

Šalį sudaro trys valstijos: A, B ir C. Reikia 100 parlamento vietų paskirstyti trims valstijoms pagal gyventojų skaičių (žr. 4.21 lentelę).

Valstija	A	B	C	Iš viso
Gyventojų skaičius (milijonais)	3 480	46 010	50 510	100 000

4.21 lentelė.

Iš pradžių taikysime Vebsterio metodą, paskui – Hantingtono–Hilo metodą.

Pirmiausia suskaičiuojame standartines kvotas. Kadangi standartinis daliklis yra $100\,000/100 = 1\,000$, tai padaryti visai nesunku.

Valstija	*A*	*B*	*C*	Iš viso
Standartinė kvota	3,48	46,01	50,51	100

4.22 lentelė.

Net apvalindami standartines kvotas įprastiniu būdu, bendrą sumą gavome 100, todėl standartinės kvotos tinka Vebsterio metodui.

Matome, kad valstijos *A* kvota yra 3,48. Kadangi pagal Hantingtono–Hilo metodą skaičius 3,48 yra virš lūžio taško 3,464, tai jį apvaliname didyn (iki 4). Dvi likusios standartinės kvotos nepakinta ir apvalinamos kaip ir anksčiau. Mūsų skaičiavimų rezultatai pateikti 4.23 lentelėje.

Valstija	Gyventojų skaičius	Standartinė kvota	Paskirstymas Vebsterio metodu	Paskirstymas Hantingtono–Hilo metodu
A	3 480	3,48	3	4
B	46 010	46,01	46	46
C	50 510	50,51	51	51
Iš viso	100 000	100	100	101

4.23 lentelė.

Kadangi skaičiuodami Hantingtono–Hilo metodu gavome 101 vietą, šios standartinės kvotos netinka – jos šiek tiek per didelės. Paėmę vos didesnį daliklį ($D = 1001$), gauname tinkamą bendrą vietų skaičių (4.24 lentelė). Paskutiniame 4.24 lentelės stulpelyje pateiktas galutinis 100 vietų paskirstymas Hantingtono–Hilo metodu. Atkreipkite dėmesį, kad šį kartą vietų paskirstymas skiriasi nuo gautojo Vebsterio metodu.

Valstija	Gyventojų skaičius	Modifikuotoji kvota (daliklis = 1001)	Paskirstymas Hantingtono–Hilo metodu
A	3 480	3,476	4
B	46 010	45,96	46
C	50 510	50,46	50
Iš viso	100 000	99,896	100

4.24 lentelė.



5 Oilerio ciklai

Jei atsidūrėte kryžkelėje – įveikite ją.

J. BERA (YOGI BERRA)

Maršrutai miesto gatvėmis

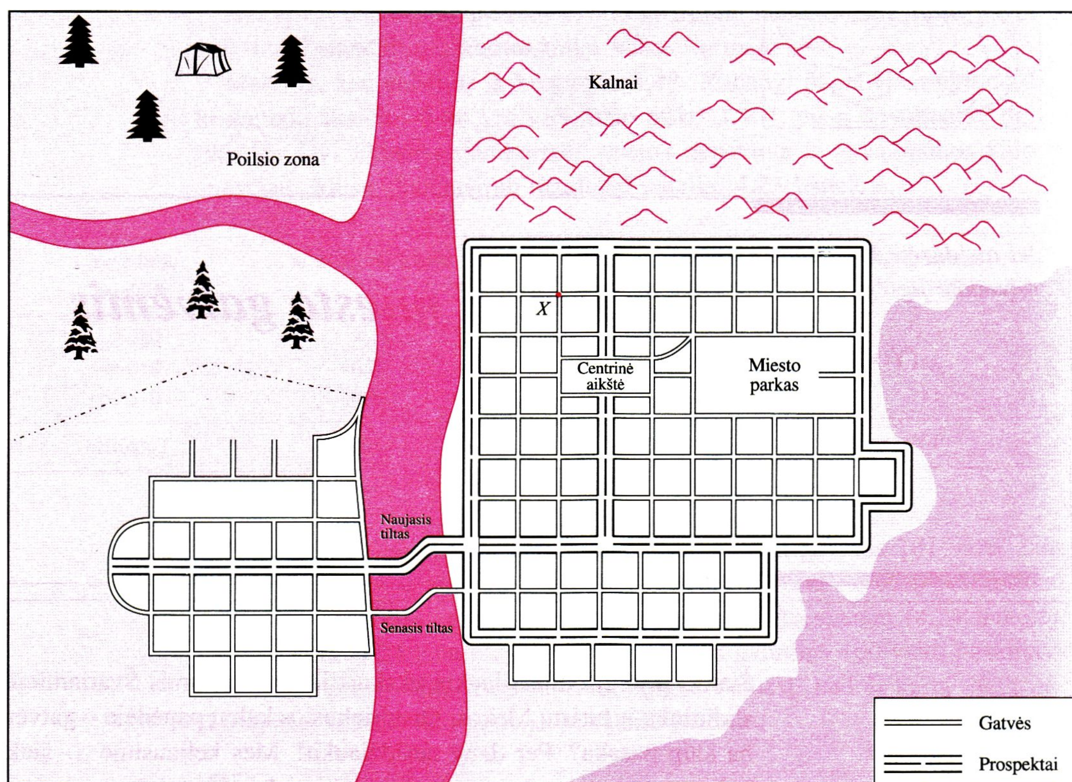
Šiame skyriuje mūsų laukia ekskursija nuostabiomis Švariamiesčio – kalnų slidininkų ir turistų Mekos, nusidriekusios kalnų papėdėje – gatvėmis. Skamba kaip pasaka? Per daug nesidžiaukit! Mes keliausime ... šiukšliaveže, o kelionei vadovaus du personažai – Oileris* ir Fleris.

Trumpai tariant, situacija tokia. Švariamiestis didžiuojasi savo švarutėlėmis gatvėmis („Galite valgyti, maistą pasidėję tiesiog ant šaligatvio“ – skelbia turistinės reklamos). Jau daug metų Švariamiesčio Tvarkos tarnyba rūpinasi, kad visame mieste būtų nuolat išvežamos šiukšlės, šluojamos gatvės, žiemą

* L. Oileris (Leonhard Euler, 1701–1783) – vienas iš įžymiausių ir produktyviausių matematikų. Jo rinktiniai raštai apima beveik 100 tomų. Be matematikos, Oileris labai mylėjo vaikus ir turėjo jų net trylika. Biografų žodžiais, „Oileris buvo matematikos Šekspyras – universalus, nepaprastai tikslus ir neišsenkantis“.

valomas sniegas visame mieste. Kaip tat dažnai būna, taupant lėšas, Švariamiesčio Tvarkos tarnybai buvo labai sumažintas biudžetinis finansavimas. Todėl ji išgali turėti vos vieną šiukšliavežę, vieną šluotuvą ir vieną sniegavalę. Kyla klausimas, ar tokiomis aplinkybėmis dar įmanoma išlaikyti įprastą Švariamiesčio gyventojų aptarnavimo lygį, ir, jei įmanoma, kaip tai padaryti. Įsivaizduokite, kad Tvarkos tarnyba, norėdama išaiškinti šį klausimą, jus pasamdo konsultantu. Jūsų konkreti užduotis yra sudaryti efektyviausius maršrutus Švariamiesčio gatvėmis šiukšliavežei, šluotuvui ir sniegavalei (žr. 5.1 pav.).

5.1 pav. Švariamiesčio gatvių schema.



RINKTINIAI MARŠRUTŲ UŽDAVINIAI

Ar nujaučiate, kam visa tai? Jei manote, kad ši istorijėlė apie Švariamiesčio Tvarkos tarnybą ir jus yra juokinga bei beprasmiška, esate visiškai teisus. Iš tikrųjų, Švariamiestis su savo šiukšlių išvežimu tėra iliustracinis fonas svarbiai matematinių uždavinių klasei – vadinamiesiems *maršrutų sudarymo* uždaviniams. Šio skyriaus tikslas – supažindinti su matematinėmis tokių uždavinių sprendimo idėjomis.

Kas yra **maršrutų sudarymo** uždaviniai? Bendriausiais žodžiais – tai uždaviniai, kylantys ieškant efektyviausio kelio nugabenti į paskirties vietas prekes ar suteikti paslaugas. Prekės gali būti paketai, laiškai, kompiuterinė

informacija ir t.t.; paslaugos gali būti šiukšlių išvežimas, gatvių šlavimas, sniego valymas, policijos patruliavimas ir t.t.; paskirties vietos gali būti visos šalies miestai, miesto kvartalo namai, kompiuterio terminalai universiteto miestelyje ir t.t.

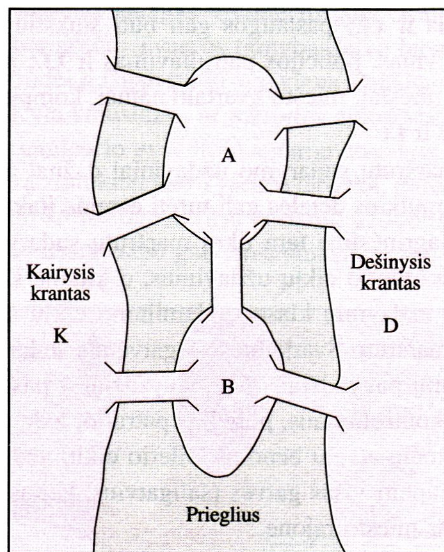
Nors maršrutų sudarymo uždaviniai dažnai atrodo panašūs vienas į kitą, tačiau ir smulkios detalės gali turėti esminę įtaką sprendimo metodui. Šiame skyriuje nagrinėsime tam tikrą maršrutų sudarymo uždavinių klasę – vadinamuosius Oilerio ciklų uždavinius, o kitame skyriuje – visai kitą maršrutų sudarymo uždavinių klasę – Hamiltono ciklų uždavinius. Šiukšliavežės ar šluotuvo maršruto Švariamiesčio gatvėmis sudarymas yra tipiški Oilerio ciklo uždavinių pavyzdžiai. Kiti pavyzdžiai – pasiuntinio, vandens ar elektros skaitiklių kontrolieriaus, policijos patrulio, ledų pardavėjo maršrutai. Bet kuriuo konkrečiu atveju bendras Oilerio ciklų uždavinių bruožas – tai poreikis *efektyviai* apeiti visas gatves (šaligatvius, kelius ir t.t.) nurodytoje vietovėje – mieste ar miesto rajone.

Kai kurie skirtumai išryškės, jei palyginsime, kaip skirtingi žmonės – turistas, paštininkas ar sniegavalės vairuotojas – apkeliauja tą patį namų rajoną. Turistui užtenka paėjėti kiekviena gatve bent kartą, tačiau to nepakanka paštininkui, išnešiojančiam paštą abiejose gatvės pusėse, todėl jis turi eiti abiem gatvės šaligatviais bent po kartą. O štai sniegavalės vairuotojas kiekviena gatve turi važiuoti tiek kartų, kiek gatvė turi juostų (sniegavalė vienu metu gali valyti tik vieną gatvės juostą).

Na, o kaip, kai vežame šiukšles? Tiesą sakant, šiuo atveju tenka nagrinėti kelias situacijas. Kai kalbama apie šiukšlių išvežimą, Švariamiestis ir Vilnius labai skiriasi. Mažame miestelyje su siauromis gatvėmis ir neintensyviu eismu šiukšliavežė dažniausiai gali surinkti šiukšles iš abiejų gatvės pusių vienu važiavimu, ypač jei mašiną aptarnauja du žmonės. Aišku, kad šią strategiją sunku taikyti didelio miesto judrioje gatvėje – tokiais atvejais šiukšles geriausiai surinkti privažiuojant atskirai prie kiekvieno šaligatvio. Padėtis sudėtingesnė vienos krypties eismo gatvėse; tokių gatvių retai pasitaiko mažuose miesteliuose, tačiau jos yra gana dažnos dideliuose miestuose. Paprastumo dėlei šiame skyriuje laikysime, kad visos gatvės yra dviejų krypčių.

Taigi Oilerio ciklų uždavinių būna labai įvairių. Tuoj pamatysime, kaip uždavinio pateikimas keičia jo tikslų formulavimą. Laimei, atitinkamai suformuluotiems Oilerio ciklų uždaviniams matematinė teorija iš esmės yra visada ta pati. Šiame skyriuje mes išdėstysime teorinius pagrindus, o po to taikysime teoriją, spręsdami konkrečius Oilerio ciklų uždavinius (tarp jų ir uždavinį apie mūsų Švariamiestį).

Prieš pradėdami teorinę šio skyriaus dalį, išnagrinėkime dar porą paprastų Oilerio ciklų uždavinių. Tai pravers mums ateityje.



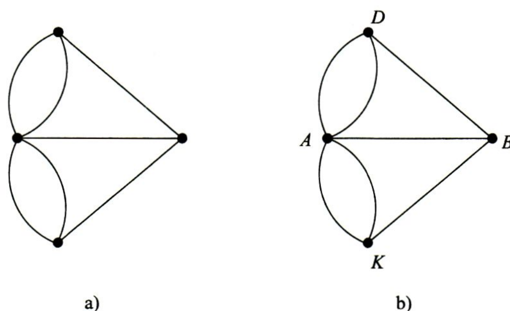
5.2 pav.

Karaliaučiaus tiltų uždavinys

Apie 1700 metus per Karaliaučių tekanti Priegliaus upė dalijo jį į keturias atskiras dalis (A, B, K ir D), sujungtas septyniais tiltais (5.2 pav.). Nežinia, kaip ten buvo, bet miesto gyventojai nepaprastai susidomėjo uždaviniu rasti tokį pasivaikščiojimo maršrutą, kuriuo būtų galima apeiti miestą, pereinant visais septyniais tiltais lygiai po vieną kartą, ir sugrįžti į tą vietą, iš kur prasidėjo kelionė. Nors niekam nepavyko sudaryti geidžiamo maršruto, nebuvo visiško įsitikinimo, kad tai neįmanoma, kol vienas visų laikų didžiausių matematikų Leonardas Oileris neįrodė, kad tokio maršruto nėra. Netrukus mes pamatysime, kaip Oileris išsprendė Karaliaučiaus tiltų uždavinį. Tačiau prieš tai panagrinėkime „kitą“ uždavinį.

Vaikiškas galvosūkis

Ar galima nubraižyti 5.3 a) pav. parodytą figūrą, pradedant ir baigiant tuo pačiu tašku, neatitraukiant nuo popieriaus pieštuko ir nekartojant jau nubraižytų linijų?



5.3 pav. Vaikiškas galvosūkis ar Karaliaučiaus tiltų uždavinys (o gal abu kartu)?

Daugelis iš mūsų žaisdavo tokius žaidimus vaikystėje (tai buvo seni geri laikai iki videožaidimų eros). Figūros gal ir skyrėsi nuo parodytos 5.3 a) paveikslėlyje, tačiau galvosūkio esmė būdavo ta pati. Vis dėlto mums ne tiek rūpi, ar jūs rasite teisingą atsakymą (siūlome kelias minutes pažaisti), kiek ar suvoksite, kad tai yra tas pats Karaliaučiaus tiltų uždavinys. Šįkart mes nieko neaiškiname, o siūlome skaitytojui įsitikinti tuo pačiam. Beje, užuomina yra pateikta 5.3 b) paveikslėlyje.

GRAFAI

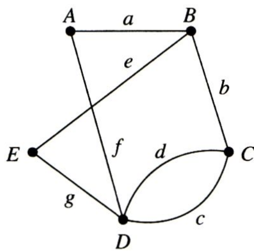
Paradoksalu, kad didžiausios abstrakcijos kartu yra ir veiksmingiausi įrankiai, leidžiantys apmąstyti konkrečius faktus.

A. N. VAITHEDAS (ALFRED NORTH WHITEHEAD)

Oileris ne tik pateikė Karaliaučiaus tiltų uždavinio sprendimą, bet padarė kur kas daugiau – jis padėjo pagrindus tolimesnėms labai svarbios matematikos krypties – *grafų teorijos* – studijoms.

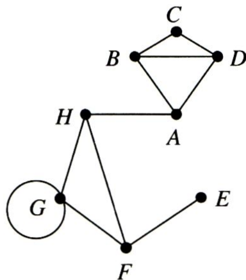
Pradžiai pasakysime, kad **grafas** yra figūra, sudaryta iš taškų (vadinamų **viršūnėmis**) ir atkarpų (vadinamų **briaunomis**). Briauna nebūtinai turi būti tiesi linija (gali būti lenkta, banguota ir t.t.), tačiau ji visada jungia dvi viršūnes. Kai briauna jungia viršūnę su ja pačia (tai irgi leidžiama), ji vadinama **kilpa**.

Pateiktasis apibūdinimas neturėtų būti laikomas tiksliu grafo apibrėžimu. Tai veikiau tik jo aprašymas, kurio mums pradžioje visiškai pakaks. Kaip ir su dauguma naujų sąvokų, geriausias būdas pajusti, kas yra tas grafas, – tai žvilgtelėti į keletą pavyzdžių.



5.4 pav.

1 pavyzdys (5.4 pav.). Šis grafas turi 5 viršūnes (A, B, C, D ir E) ir 7 briaunas, kurias žymėsime a, b, c, d, e, f ir g (kiek įmanoma, stengsimės būti nuoseklūs ir viršūnes žymėsime didžiosiomis raidėmis, o briaunas – mažosiomis, nors tai nėra privaloma). Kelios pastabos apie šį grafą: pirma, briaunų e ir f susikirtimo taškas nėra viršūnė (galima įsivaizduoti, kad jos prasilenkia, pvz., viena yra aukščiau už kitą). Be to, nėra jokių apribojimų, draudžiančių kelioms briaunoms jungti tas pačias dvi viršūnes, – tai matome viršūnių D ir C atveju.



5.5 pav.

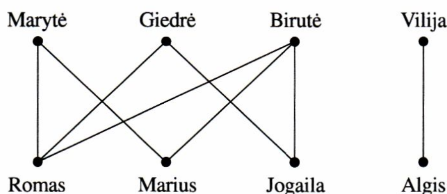
2 pavyzdys (5.5 pav.). Tai – grafas, turintis 8 viršūnes (A, B, C, D, E, F, G ir H) ir 11 nepažymėtų briaunų (nebūtina kaip nors žymėti briaunas). Briauną galima nusakyti tiesiog nurodant dvi viršūnes, kurios ją jungia. Pavyzdžiui, mes galime kalbėti apie briauną AH arba briauną BD ir t.t. Beje, šis grafas turi kilpą – tai briauna GG.



5.6 pav.

3 pavyzdys (5.6 pav.). Tai – grafas, turintis 4 viršūnes ir neturintis nė vienos briaunos. Nors ir visai neįdomus, grafas be briaunų yra leistinas.

4 pavyzdys (5.7 pav.). Šis grafas turi 8 viršūnes ir 9 briaunas. Viršūnės turi keistus pavadinimus. Kodėl? Pastebėsime, kad šis grafas sudarytas iš dviejų atskirų nesujungtų dalių. Tokie grafai vadinami **nejungiaisiais**, o atskiri jo „gabalai" – grafo **komponentėmis**. („Neįdomusis" 5.6 pav. grafas, pavyzdžiui, yra nejungus ir turi keturias komponentes.)



5.7 pav.

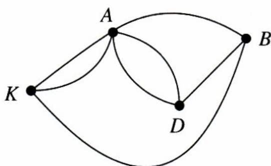
Ką galėtų 5.7 pav. pavaizduotas grafas reikšti? Tarkime, kad Marytė, Giedrė, Birutė, Vilija, Romas, Marius, Jogaila ir Algis drauge buvo vakarėlyje. Tada šis grafas nusako, kas su kuo vakarėlyje šoko. Mes galime daug ką sužinoti iš jo (pavyzdžiui, kad Vilija ir Algis praleido visą vakarą šokdami kartu), tačiau, kas dar svarbiau, mes turime pripažinti, kad grafas paprastai ir patogiai aprašo visas šokėjų poras.

5 pavyzdys (5.8 pav.). Čia grafas turi 4 viršūnes (A, B, K ir D) ir 7 briaunas (AK, AK, AB, AD, AD, KB ir DB). Palyginę su Karaliaučiaus tiltų uždavinio grafu (5.3 pav.), matome, kad šie du grafai turi tas pačias viršūnes ir tas pačias briaunas – iš tiesų tai vienas ir tas pats grafas, nors ir atrodo skirtingai.

5 pavyzdys išryškina vieną labai svarbų bruožą: grafą galima nubraižyti įvairiausiais būdais, tačiau svarbu ne jo išvaizda, o tik tai, kokios viršūnės su kuriomis yra sujungtos.

Apibendrinę visus ankstesnius pavyzdžius, mes jau galime tiksliau apibrėžti grafo sąvoką. Grafas yra **sąsajų struktūra**: jis mums pasako, kad yra objektų grupė (viršūnės) ir kad šie objektai yra tarpusavyje susiję (arba nesusiję). Kaip šie objektai yra tarpusavyje susiję, nurodo briaunos. Tai ir yra visa informacija, kurią suteikia grafas – nei daugiau, nei mažiau.

Taigi visada, kai turime susijusius objektus, kad ir kokios būtų konkrečios jų sąsajos (meilė, neapykanta, giminystė, šokimas poroje ir t.t.), jas galime aprašyti grafu. Tai geriau suvokti padės pavyzdys.

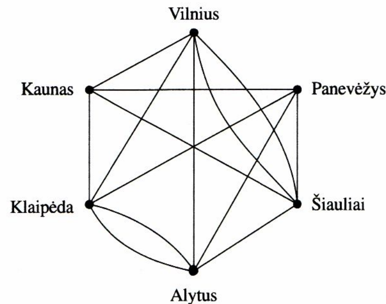


5.8 pav.

6 pavyzdys. Paskutinę krepšinio sezono savaitę (kai varžybos karščiausios) Lietuvos miestų krepšinio čempionato tvarkaraštis yra toks:

- Pirmadienis: Vilnius – Šiauliai, Panevėžys – Alytus, Klaipėda – Kaunas.
- Antradienis: Vilnius – Šiauliai.
- Trečiadienis: Panevėžys – Kaunas, Alytus – Klaipėda.
- Ketvirtadienis: Vilnius – Kaunas, Panevėžys – Šiauliai, Alytus – Klaipėda.
- Penktadienis: Alytus – Šiauliai, Klaipėda – Vilnius.
- Šeštadienis: Alytus – Vilnius, Panevėžys – Klaipėda, Šiauliai – Kaunas.

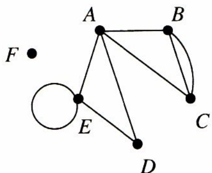
Visa informacija, kas su kuo žaidžia, yra sąsajos (kiekvienos rungtynės sieja dvi skirtingas komandas) ir gali būti patogiai pavaizduota grafu, parodytu 5.9 pav. (šiame grafe viršūnės padėtis neturi nieko bendra su miesto geografine vieta, nes aprašant, kas su kuo žaidžia, tikroji viršūnių vieta neturi reikšmės).



5.9 pav.

Šis pavyzdys rodo, kad grafas dažnai yra gerokai praktiškesnis rungtynių tvarkaraščio aprašymo būdas už paprastą išvardijimą. Sakykime, kas nors nori sužinoti, ar Panevėžys žais su Vilniumi paskutinę sezono savaitę. Atsakymą (būtent, kad nežais) matome iš karto, vos žvilgtelėję į grafą. Peržiūrėti varžybų sąrašą truktų kur kas ilgiau.

Grafai. Sąvokos ir terminai



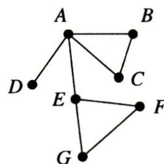
5.10 pav.

Kiekviena matematikos šaka turi savitą terminiją, ir tai ypač būdinga grafų teorijai. Apibrėšime keletą mums būtinų sąvokų ir sutartinių žymėjimų.

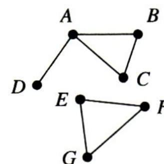
- Dvi viršūnės vadinamos **gretimomis**, jei jas jungia bent viena briauna. 5.10 pav. grafe viršūnės A ir B yra gretimos, o viršūnės C ir D – ne. Viršūnė E yra gretima pati sau, nes ji turi kilpą.
- Viršūnės **laipsnis** yra briaunų, išeinančių iš tos viršūnės, skaičius (kilpos „įnašas“ į laipsnį lygus dviem). Grafe, parodytame 5.10 pav., viršūnės A laipsnis lygus 4 (trumpai $\deg(A) = 4$), viršūnės B laipsnis

lygus 3 ($\deg(B) = 3$), $\deg(C) = 3$, $\deg(D) = 2$, $\deg(E) = 4$ (kilpos dėka), ir $\deg(F) = 0$ (viršūnė, kurios laipsnis yra 0, vadinama **izoliuota**).

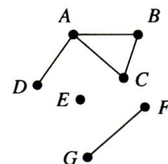
- Grafo **keliu** vadinama gretimų viršūnių seka. Kelyje ta pati viršūnė gali būti kelis kartus, tačiau ta pati briauna gali pasitaikyti kelyje tik *vieną kartą*. Štai keletas kelio pavyzdžių, paimtų iš 5.10 pav. grafo. A, B, C yra kelias; A, B, C, A, E, D yra ilgesnis kelias; D, E, E, A, C, B, C taip pat yra kelias (E yra gretima E kilpos dėka, C ir B yra dvigubai gretimos, nes jas jungia dvi briaunos). A, C, D, E *nėra* kelias, nes C ir D nėra gretimos viršūnės; $A, B, C, A, D, E, A, C, B$ *nėra* kelias, nes briauna, jungianti A ir C, sąraše pasirodo du kartus.
- Kelias vadinamas **ciklu**, jei jis prasideda ir baigiasi ta pačia viršūne. 5.10 pav. grafe A, B, C, A yra ciklas; $D, E, A, C, B, A, D, B, C, B$ bei E, E taip pat yra ciklai. Kita vertus, A, B, C, B, A nėra ciklas, nes ta pati briauna (AB) pasitaiko du kartus.
- Sakoma, kad grafas yra **jungusis**, jei bet kurias dvi viršūnes galima sujungti keliu. Iš esmės tai reiškia, kad galima nukeliauti iš vienos viršūnės į bet kurią kitą grafo briaunomis. Priešingu atveju jis vadinamas **nejungiuoju** grafu. Nejungusis grafas yra sudarytas iš jungiųjų dalių, vadinamų grafo **komponentėmis**. 5.11 a) pav. grafas yra jungusis. 5.11 b) ir c) pav. grafai yra nejungieji. 5.11 b) pav. grafas turi dvi komponentes, o 5.11 c) pav. – tris.
- Kartais jungiajame grafe yra tokia briauna, kurią ištrynus, grafas tampa nejungusis. Aišku, kad tokia briauna vadinama **tiltu** (sudeginęs tiltą, nebegalėsi grįžti). 5.11 a) pav. briauna AE yra tiltas, nes, ją pašalinus, grafas pasidaro nejungusis (žr. 5.11 b) pav.). Tame pačiame 5.11 a) pav. grafe yra dar vienas tiltas; paliekame skaitytojui jį surasti.
- Jei kelią sudaro visos jungiojo grafo briaunos (lygiai po vieną kartą), jis vadinamas **Oilerio keliu**. 5.11 a) pav. grafo kelias $D, A, B, C, A, E, F, G, E$ yra Oilerio kelias. Skaitytojas gali tai patikrinti, nuėjęs visą kelią ir įsitikinęs, kad kiekviena briauna eita lygiai vieną kartą. Oilerio kelias, kuris prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje, vadinamas **Oilerio ciklu**.



a) jungusis grafas



b) nejungusis grafas; dvi komponentės



c) nejungusis grafas; trys komponentės (viena iš jų – izoliuota viršūnė E)

5.11 pav.

Štai trys pagrindiniai klausimai, į kuriuos mokysimės atsakyti šiame skyriuje:

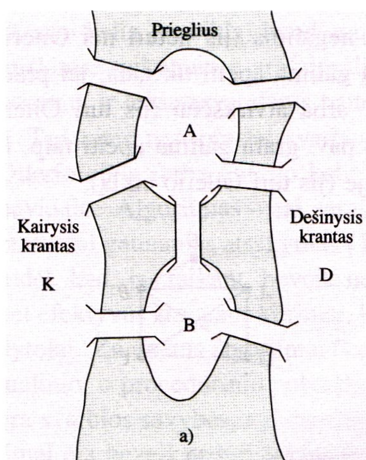
1. Kaip nustatyti, ar grafas turi Oilerio ciklą (Oilerio kelią)?
2. Jei turi, tai kaip jį rasti?
3. Jei neturi, tai kaip pataisyti grafą, kad turėtų?

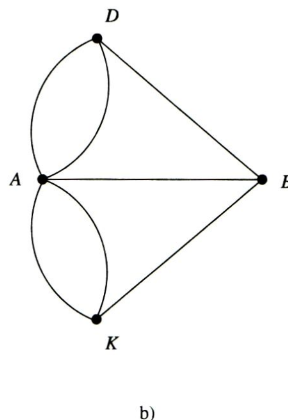
Kai tik išmoksime atsakyti į šiuos teorinius klausimus, turėsime visas reikalingas priemones bet kokiam Oilerio ciklų uždaviniui išspręsti (pavyzdžiui, Švariamiesčio šiukšliavežės ar Klaipėdos policijos patrulio maršrutams sudaryti).

OILERIO TEOREMOS

Ar prisimenate Karaliaučiaus tiltų uždavinį? Reikėjo rasti maršrutą, kuriuo einant, per visus tiltus pereinama lygiai po vieną kartą ir sugrįžtama į pradinę vietą (5.12 a) pav.). Tai visai tas pats uždavinys, kaip 5.12 b) pav. grafe rasti Oilerio ciklą. Spręsdamas šį uždavinį, Oileris įrodė, kad tokio maršruto nėra!

Kodėl tokia kelionė neįmanoma? Apibrėžtumo dėlei tarkime, kad kelionė prasideda kairiajame krante *K* (iš tiesų nėra jokio skirtumo, kur pasirinkti starto tašką). Keliautojas bent vieną kartą turi patekti į salą *A*, ir net nesunku nuspėti, kad jis turės aplankyti salą *A* daugiau kaip vieną kartą. Suskaičiuokime tiksliai, kiek būtent kartų. Pirmą kartą aplankant salą *A*, pereinama dviem tiltais (vienu – įeinant į salą, kitu – išeinant iš jos); antrą kartą aplankant *A*, reikės pereiti kitus du tiltus, o trečią kartą – dar du. Stop! Yra tik penki tiltai, kuriais galima įeiti ir išeiti iš salos *A*, todėl dviejų kartų ten pabūti neužteks (liks vienas nepereitas tiltas), o trijų kartų bus per daug (reikės pakartotinai eiti kuriuo nors tiltu). Iš to išplaukia, kad norima kelionė yra neįmanoma! Priežastis – nelyginis tiltų skaičius saloje *A* (ar kur kitur). Šį samprotavimą nesunku išplėsti ir apibendrinti. Tai iš karto ir padarykime.

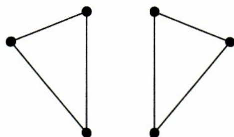




5.12 pav.

Pirmoji Oilerio teorema

- *Jei grafas turi nelyginio laipsnio viršūnę, tai jis neturi Oilerio ciklų.*
- *Jei jungiojo grafo visos viršūnės yra lyginių laipsnių, tai jis turi bent vieną Oilerio ciklą (paprastai daugiau kaip vieną).*



5.13 pav.

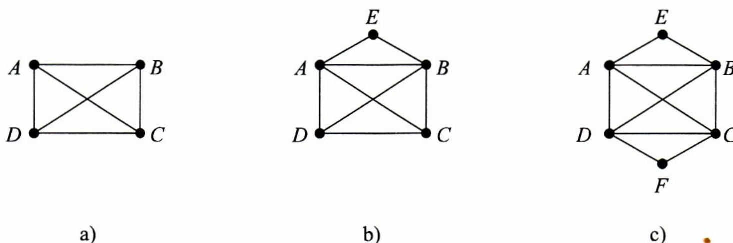
Beje, *nejungusis* grafas *negali* turėti Oilerio ciklų, net jei visos jo viršūnės yra lyginių laipsnių (kaip 5.13 pav.).

O kuo ypatingi grafai, turintys Oilerio kelius? Tie patys samprotavimai tinka visoms viršūnėms (jų laipsniai būtinai lyginiai), išskyrus pradinę ir galinę kelio viršūnę. Pradinei viršūnei reikia vienos briaunos, kuria pradedamas kelias, ir dar po dvi kiekvienam apsilankymui šioje viršūnėje (jeigu joje apsilankoma), taigi jos laipsnis yra nelyginis. Lygiai taip pat nelyginis ir galinės viršūnės laipsnis (dvi briaunos kiekvienam apsilankymui ir viena keliui užbaigti). Taigi gavome tokį teiginį.

Antroji Oilerio teorema

- *Jei grafas turi daugiau kaip dvi nelyginio laipsnio viršūnes, tai jis neturi nė vieno Oilerio kelio.*
- *Jei jungusis grafas turi lygiai dvi nelyginio laipsnio viršūnes, tai jis turi bent vieną Oilerio kelią (paprastai daugiau). Kiekvienas toks kelias prasideda vienoje nelyginio laipsnio viršūnėje ir baigiasi kitoje.*

7 pavyzdys. 5.14 pav. parodyta keletas standartinių grafų, kuriuos dažnai bando „apeiti“ vaikai. Iš Oilerio teoremos žinome, kad 5.14 a) pav. parodyto grafo apeiti negalima (jis neturi nei Oilerio ciklo, nei Oilerio kelio); 5.14 b) pav. grafą galima apeiti tik tada, jei pradėsime viršūnėje D ir baigsime viršūnėje C arba atvirkščiai (jis turi Oilerio kelią, bet neturi Oilerio ciklo). O 5.14 c) pav. grafą galima apeiti taip, kad pradžia ir pabaiga būtų toje pačioje vietoje (jis turi Oilerio ciklą).



5.14 pav. a) b) c)

Atidus skaitytojas galėjo pastebėti, kad Pirmojoje ir Antrojoje Oilerio teoremose kai ko trūksta. Teoremos apima atvejus, kai grafas neturi nelyginio laipsnio viršūnių (Pirmoji teorema), kai turi dvi nelyginio laipsnio viršūnes (Antroji teorema) ir daugiau kaip dvi nelyginio laipsnio viršūnes (Antroji teorema). O kas atsitinka, kai grafas turi lygiai vieną nelyginio laipsnio viršūnę? Kas tada? Nejaugi Oileris nenagrinėjo šios galimybės? Žinoma, nagrinėjo, tačiau nustatė, kad grafas negali turėti *lygiai vienos nelyginio laipsnio viršūnės*.

Oileris pastebėjo, kad *visų grafo viršūnių laipsnių bendra suma yra lygi dvigubam grafo briaunų skaičiui*. Iš tikrųjų, briauna XY priskaičiuojama į laipsnių sumą du kartus: vieną kartą – į viršūnės X laipsnį ir vieną kartą – į viršūnės Y laipsnį (jei tai jūsų dar neįtikino, siūlome atlikti 28 a) pratimą). Iš Oilerio teiginio išplaukia, jog visų grafo *viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius*, o tai reiškia, kad joks grafas negali turėti vienintelės nelyginio laipsnio viršūnės. Be to, mes galime žengti dar vieną loginį žingsnelį ir įsitikinti, kad grafo nelyginio laipsnio viršūnių skaičius negali būti nelyginis. Visus šiuos pastebėtus faktus sujunkime į teoremą.

Trečioji Oilerio teorema

- *Visų grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius* (*lygus dvigubam briaunų skaičiui*).
- *Bet kurio grafo nelyginio laipsnio viršūnių skaičius yra lyginis.*

FLERIO ALGORITMAS

Oilerio teoremos yra labai patogios – jos nurodo lengvą būdą (vos pažvelgus į viršūnių laipsnius) nustatyti, ar grafas turi Oilerio ciklą arba Oilerio kelią. Deja, jos nepadeda rasti konkretaus Oilerio ciklo ar kelio (kai jų yra). Žinoma, tokiems grafams, kurie parodyti 5.14 b) ir c) pav., mes galime rasti Oilerio kelią (ar ciklą) bandymų ir klaidų metodu. Tačiau realiuose gyvenimiškuose taikymuose grafai gali turėti šimtus ar net tūkstančius viršūnių ir briaunų, ir tokiems grafams bandymų ir klaidų metodas netinka.

Tad kitas nepaprastai svarbus mūsų žingsnis – išmokti surasti konkretų Oilerio ciklą (arba Oilerio kelią). Metodas, kurį išmoksime, yra **algoritmo** pavidalo. Algoritmas – tai sąrašas mechaninių taisyklių, kurių laikantis garantuotai gaunamas atsakymas į klausimą. Mechaninėmis taisykles vadiname todėl, kad, jas taikant, beveik nereikia galvoti – štai kodėl tokie neprotingi, bet efektyvūs žmogaus kūriniai, kaip kompiuteriai, yra idealūs algoritmų vykdytojai. Žmonėms algoritmai (kai tik taisyklės yra suprastos) kelia ne intelektualinio, o procedūrinio pobūdžio sunkumų. Tikslumas ir atidumas detalėms yra svarbios savybės, vykdant algoritmų instrukcijas, o matematiniai sugebėjimai čia beveik neturi jokios reikšmės. Norėjome į tą atkreipti dėmesį, nes

daugelis praktinių šios knygos užduočių remsis sugebėjimu tiksliai įvykdyti algoritmus, o šitai pasiekiama visų pirma tai darant pačiam.

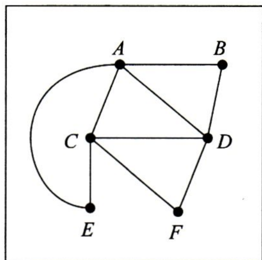
Jei kiekviena jungiojo grafo viršūnė turi lyginį laipsnį, tai Pirmoji Oilerio teorema sako, kad grafas turi Oilerio ciklą. Šį Oilerio ciklą mes galime rasti taikydami algoritmą, vadinamą Flerio vardu. Kadangi tai mūsų pirmoji pažintis su grafų algoritmu (šis nėra visai paprastas), tai pirmiausia jį aprašysime apytikriai, ir, tik išsprendę porą pavyzdžių, pateiksime tikslų algoritmo aprašymą.

Pagrindinė Flerio algoritmo idėja yra gana paprasta – ją galima išreikšti patarle „Neik per tiltą, jei gali neiti". Vienintelis dalykas, su kuriuo mes turime elgtis atsargiai, yra žodžio *tiltas* interpretacija.

Mes žinome, kad, kalbant apie grafus, tiltas yra briauna, kurią pašalinus grafas tampa nejungus. Tad Flerio algoritmas reikalauja naudotis tokiomis briaunomis tik kraštutiniu atveju. Reikalavimas gana paprastas, tačiau yra viena kliūtis: grafas, kurio tiltų mes turėtume vengti, yra ne pradinis uždavinio grafas, o toji jo dalis, kuria dar nekeliavome. Kitaip sakant, kiekvieną kartą, vos tik perėję briauną, mes ją išbraukiame iš grafo. Mes jau niekada ja nebeisime, todėl toliau galime elgtis taip, tarsi jos niekada ir nebuvo. Mums rūpi tik tai, kaip toliau eiti dar nekeliauta grafo dalimi. Todėl, kalbėdami apie tiltus (kurie lieka kraštutiniam atvejui), mes turime galvoje *nekeliautos grafo dalies tiltus*.

Kadangi kiekvieną kartą, perėjus briauną, *nekeliauta grafo dalis* keičiasi (todėl keičiasi ir tiltų sąrašas), tai Flerio algoritmas verčia mus nuolat būti budrius ir vesti rūpestingą apskaitą. Tai nepasunkina algoritmo (jo turinys gana paprastas), o tik reiškia, jog mes turime papildomai rūpintis ir visą laiką skirti tai, ką jau nuveikėme, nuo to, ką dar turime padaryti.

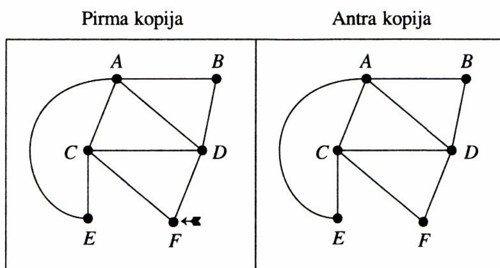
Yra daugybė įvairiausių būdų, kaip tai atlikti (pabandykite sukurti ir pasiūlyti savąjį). Visai patikimas toks variantas: pasidarome dvi to paties grafo kopijas, ir viena jų naudojamės sprendimams priimti, kita – tiems sprendimams fiksuoti. Vos tik perėję naują briauną, mes ją ištriname iš pirmos kopijos, tačiau ją pažymime (sakykime, raudonai) ir priskiriame jai eilės numerį antroje kopijoje. Judant Oilerio ciklu, pirmoji kopija darosi vis tuštesnė, o antroji – vis raudonesnė. Pirmoji kopija padeda apsispręsti, kur eiti toliau; antroji leidžia atstatyti mūsų kelionę (bent jau tam, kad galėtume pademonstruoti, kaip tai atlikome!). Išnagrinėkime porą pavyzdžių.



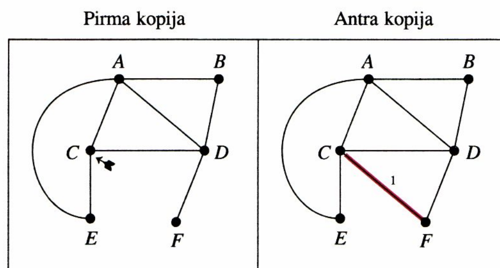
5.15 pav.

8 pavyzdys. 5.15 pav. parodytas grafas turi Oilerio ciklą, nes visų viršūnių laipsniai yra lyginiai.

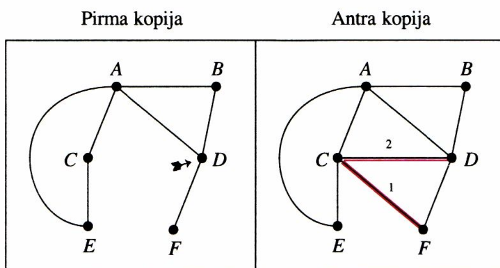
Pasinaudokime Flerio algoritmu ir raskime tą Oilerio ciklą. Nors tai ir gali atrodyti kaip šaudymas iš patrankos į žvirblį (šio nediduko grafo ciklą lengvai rastume bandymų keliu), tačiau taip mes geriau suprasime algoritmo veikimą.



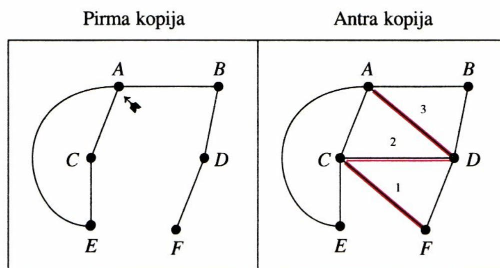
Startas: Pradinį tašką galime pasirinkti laisvai. Sakykime, tai bus viršūnė *F*.



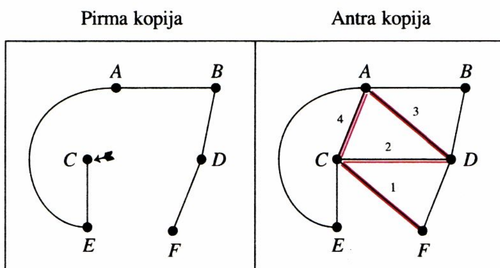
Pirmas žingsnis: Einame iš *F* į *C* (nors galėjome taip pat eiti iš *F* į *D*).



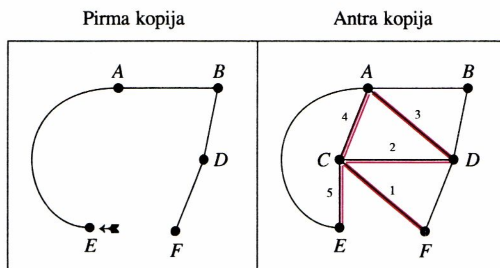
Antras žingsnis: Einame iš *C* į *D* (nors galėjome taip pat eiti į *A* arba *E*).



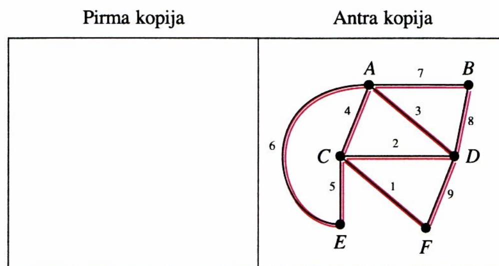
Trečias žingsnis: Einame iš *D* į *A* (galėjome taip pat eiti į *B*, bet ne į *F*, nes *DF* tapo tiltu).



Ketvirtas žingsnis: Einame iš *A* į *C* (galėjome taip pat eiti į *E*, bet ne į *B*, nes *AB* tapo tiltu).



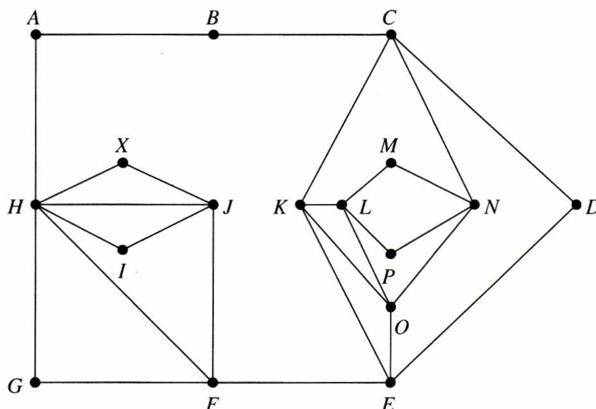
Penktas žingsnis: Einame iš *C* į *E* (kito pasirinkimo ir nėra).



Paskutiniai keturi žingsniai: pasirinkimo taip pat nėra.

9 pavyzdys. Taikykime Flerio algoritmą 5.16 pav. grafui. Šis grafas šiek tiek didesnis už ankstesnįjį, ir būtų gana nepraktiška kiekvieną algoritmo žingsnį vaizduoti atskiru paveikslėliu kaip 8 pavyzdyje. Todėl skaitytoją paprašysime aktyviau įsitraukti į šio pavyzdžio nagrinėjimą. Jums reikėtų prieš save turėti dvi grafo kopijas ir sekti jose žingsnius, kurie bus aprašyti žodžiais (aišku, pieštukas ir trintukas labai pravers pirmoje kopijoje.)

- **Startas.** Laisvai pasirenkame pradinę viršūnę, sakykime, X.
- **1 žingsnis**: Iš X galime eiti į J arba H. Kadangi nei XJ, nei XH nėra tiltai, galime pasirinkti bet kurią iš šių briaunų. Pasirinkime XJ (ištriname XJ pirmoje kopijoje, o antroje – pažymime ir skiriame eilės numerį 1).
- **2 žingsnis**: Iš J galime eiti į I, H ir F. Bet kuris pasirinkimas yra geras. Pasirenkame JI (ištriname briauną JI pirmoje kopijoje, o antroje pažymime ir skiriame jai eilės numerį 2).
- **3 žingsnis**: Yra vienintelis variantas eiti iš I (į H). Ištriname briauną IH, taip pat viršūnę I (jau nebegalėsime į ją grįžti) pirmoje kopijoje ir pažymime IH antroje kopijoje.
- **4 žingsnis**: Iš H galima būtų eiti keliais būdais. Vienas iš jų, HX, yra tiltas – jis atskiria viršūnę X nuo likusio grafo, todėl netinka. Likusieji variantai tinka. Pasirinkime HG (ištriname briauną HG pirmoje kopijoje ir pažymime antroje).
- **5 žingsnis**: Yra vienintelis variantas eiti iš G (į F). Pirmoje kopijoje ištriname briauną GF, taip pat viršūnę G, į kurią nebegalėsime grįžti, ir pažymime GF antroje kopijoje.
- **6 žingsnis**: Iš F galime eiti keliais būdais. Visi jie tinka, nes nė vienas nėra tiltas. Pasirinkime FE (kad būtų trumpiau, nuo šiol neberašysime „. . . ištriname, . . . pažymime“.)



5.16 pav.

- **7 žingsnis**: Iš E tiltų nėra. Pasirenkame EO.
- **8 žingsnis**: Iš O tiltų nėra. Pasirenkame OK.
- **9 žingsnis**: Iš K tiltų nėra. Pasirenkame KC.
- **10 žingsnis**: Vienas iš variantų viršūnėje C (būtent, CB) yra tiltas (negalime rinktis šio varianto!). Pasirenkame CN.
- **11 žingsnis**: Iš N tiltų nėra. Pasirenkame NP.
- **12 žingsnis**: Pasirinkimo nėra. Einame PL (nepamirškite taip pat ištrinti viršūnę P).
- **13 žingsnis**: LK yra tiltas. Renkamės LO.
- **14–23 žingsniai**: Pasirinkimo nėra. Iš O einame į N, po to – į M, L, K, E, D, C, B, A, H.
- **24 žingsnis**: Viršūnėje H turime kelis variantus, tačiau HX yra tiltas. Renkamės HJ.
- **25–27 žingsniai**: Pasirinkimo nėra. Iš J einame į F, po to – į H ir pagaliau – atgal į X. Mes baigėme!

Štai kokį Oilerio ciklą radome:

$X, J, I, H, G, F, E, O, K, C, N, P, L, O, N, M, L, K, E, D, C, B, A, H, J, F, H, X.$

Praktika yra vienintelis būdas patikrinti bet kokio algoritmo veikimą. Ne išimtis ir Flerio algoritmas. Skaitytojui primygtinai rekomenduojame tokiu pat būdu atlikti 23, 24 ir 25 pratimus.

Formaliai aprašysime pagrindines Flerio algoritmo taisykles.

Flerio algoritmas Oilerio ciklui rasti

- Pirmiausia įsitikinkite, ar grafas yra jungusis ir ar visų viršūnių laipsniai yra lyginiai.
- Pradėkite nuo bet kurios viršūnės.
- Keliaukite briauna, jei
  a) ji nėra nekeliautos dalies tiltas arba
  b) nėra kito pasirinkimo.
- Sunumeruokite briaunas perėjimo eilės tvarka.
- Jei nebegalite toliau keliauti, sustokite – darbas baigtas!

Jei jungusis grafas turi lygiai dvi nelyginio laipsnio viršūnes, tai jis negali turėti Oilerio ciklo, tačiau jis turi Oilerio kelią. Mes galime rasti šį Oilerio

kelią, atlikę nedidelį pakeitimą Flerio algoritme: pradžios taškas turi būti viena iš nelyginio laipsnio viršūnių. Visa kita taisyklėse nesikeičia, ir, tinkamai jomis naudojantis, kelionė garantuotai baigsis kitoje nelyginio laipsnio viršūnėje (žr. 26 ir 27 pratimus).

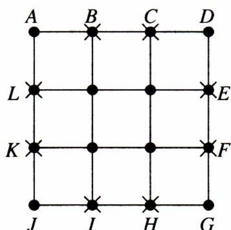
Flerio algoritmas Oilerio keliui rasti

- Pirmiausia įsitikinkite, ar grafas yra jungusis ir ar yra tik dvi nelyginio laipsnio viršūnės.
- Galite pradėti nuo bet kurios nelyginio laipsnio viršūnės.
- Keliaukite briauna, jei
  a) ji nėra nekeliautos dalies tiltas arba
  b) nėra kito pasirinkimo.
- Numeruokite briaunas jų perėjimo eilės tvarka.
- Jei nebegalite toliau keliauti, sustokite – darbas baigtas!

GRAFŲ OILERIZAVIMAS

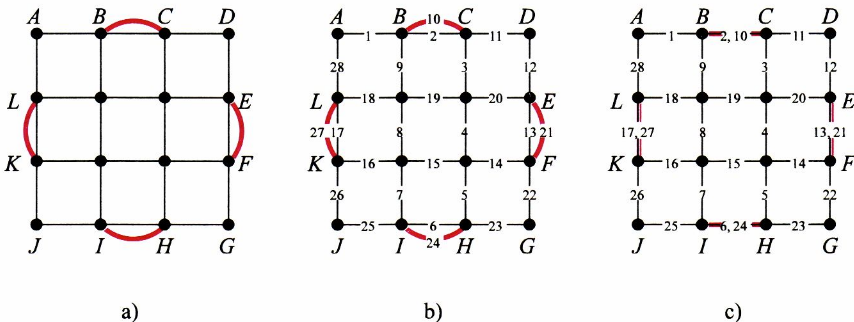
Flerio algoritmas mums nurodo būdą, kaip rasti efektyvų visų grafo briaunų apėjimo kelią, kai grafas neturi lyginio laipsnio viršūnių arba turi dvi. Tačiau ką daryti, kai grafas turi daugiau (4, 6, 8, ...) nelyginio laipsnio viršūnių? Iš Pirmosios ir Antrosios Oilerio teoremų žinome, kad tada nėra nei Oilerio ciklo, nei Oilerio kelio, todėl, norėdami apeiti visas grafo briaunas (žinoma, neatitraukdami pieštuko), turime kai kuriomis briaunomis eiti pakartotinai. Dabar mums svarbu išsiaiškinti, kaip tai padaryti, kuo mažiau kartų einant tomis pačiomis briaunomis. Šio klausimo čia ir imsimės.

Pradėkime nuo paprasto pavyzdžio.



5.17 pav.

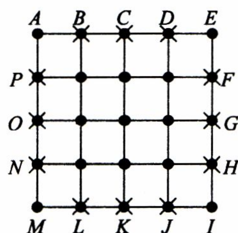
10 pavyzdys. Nagrinėkime 5.17 pav. parodytą grafą. Kadangi jis turi aštuonias nelyginio laipsnio viršūnes (B, C, E, F, H, I, K ir L), tai jis neturi nei Oilerio ciklo, nei Oilerio kelio. 5.18 a) pav. grafas yra gana panašus į šį grafą, tačiau turi vieną esminį skirtumą – visos jo viršūnės yra lyginio



5.18 pav.

laipsnio. Todėl pastarasis grafas turi Oilerio ciklų, ir vieną iš jų matome 5.18 b) pav. Jį galima interpretuoti ir kaip kelionę pradinio grafo briaunomis, pavaizduotą 5.18 c) pav. Šioje kelionėje mes ne tik apeiname visas grafo briaunas, bet ir pakartotinai einame keturiomis briaunomis (BC, EF, HI ir KL). Nors ji ir nėra Oilerio ciklas, bet tai *optimali* kelionė (t.y. kelionė su minimaliu „pridėtų" briaunų skaičiumi), apimanti visas grafo briaunas.

Prieš pereidami prie kito pavyzdžio, pasitelkime vieną patogią sąvoką. Koks ryšys tarp 5.17 pav. ir 5.18 a) pav. grafų? Įdėmiau pažiūrėję matome, kad 5.18 a) pav. grafas yra gautas iš 5.17 pav. parodyto grafo tokiu būdu: prie grafo prijungtos papildomos briaunos (vadinamos **fiktyviomis**) taip, kad nelyginio laipsnio viršūnės taptų lyginio laipsnio viršūnėmis (kitaip sakant, neutralizuojamos „ramybės drumstėjos"). Ši grafo perdarymo procedūra, kai viršūnių laipsnių nelyginumas pašalinamas, prijungiant papildomas briaunas, vadinama **grafo oilerizavimu**. Oilerizuodami grafą, turime atidžiai stebėti, kad prijungiamos briaunos *būtų tik esančių grafo briaunų dublikatai*. Kitas pavyzdys paaiškins tai tiksliau.



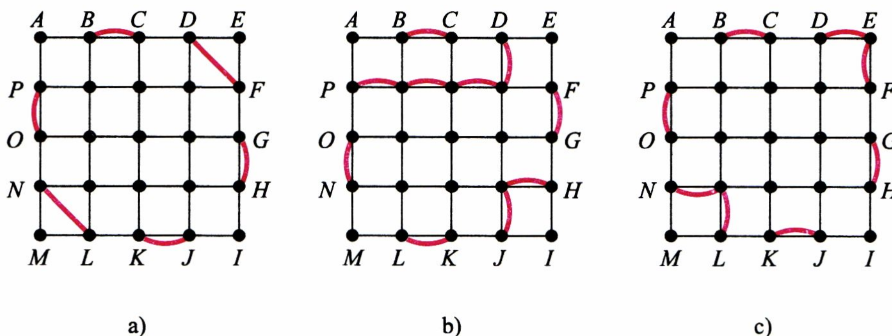
5.19 pav.

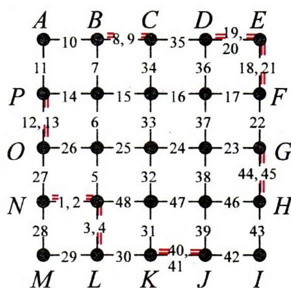
11 pavyzdys. Nagrinėkime grafą, parodytą 5.19 pav. Šis grafas turi 12 nelyginio laipsnio viršūnių. Kaip jau žinome, norėdami apkeliauti visas briaunas ir kelionę užbaigti pradiniame taške, turime kai kuriomis briaunomis eiti pakartotinai. Kuriomis? Atsakymą duoda grafo oilerizavimas, todėl panagrinėkime, kaip jį galima atlikti.

5.20 a) pav. parodyta, kaip *negalima to daryti*. Briaunų DF ir NL prijungti neleistina, nes jų nėra pradiniame grafe. 5.20 b) pav. parodytas leistinas, bet neekonomiškas pradinio grafo oilerizavimas. Jis leistinas, nes visos nelyginio laipsnio viršūnės pašalintos sudvejinant esamas briaunas, bet neekonomiškas – akivaizdu, kad rezultatą galima pasiekti sudvejinant mažiau briaunų.

5.20 c) pav. parodyta pradinio grafo *optimali oilerizacija*. Ji gauta sudvejinus tik 8 briaunas. Nors yra ir kitų oilerizavimo būdų, tačiau neįmanoma gauti mažiau kaip aštuonias **sudvejintas briaunas**. Ši optimali oilerizacija

5.20 pav.



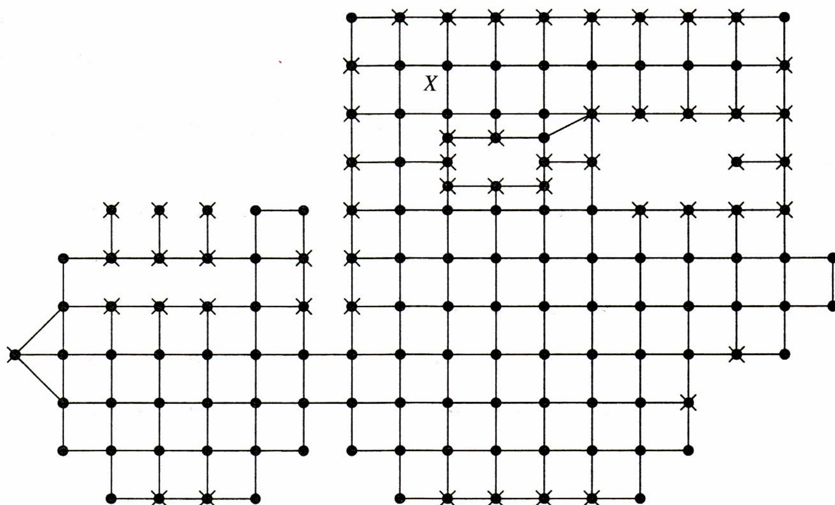


5.21 pav.

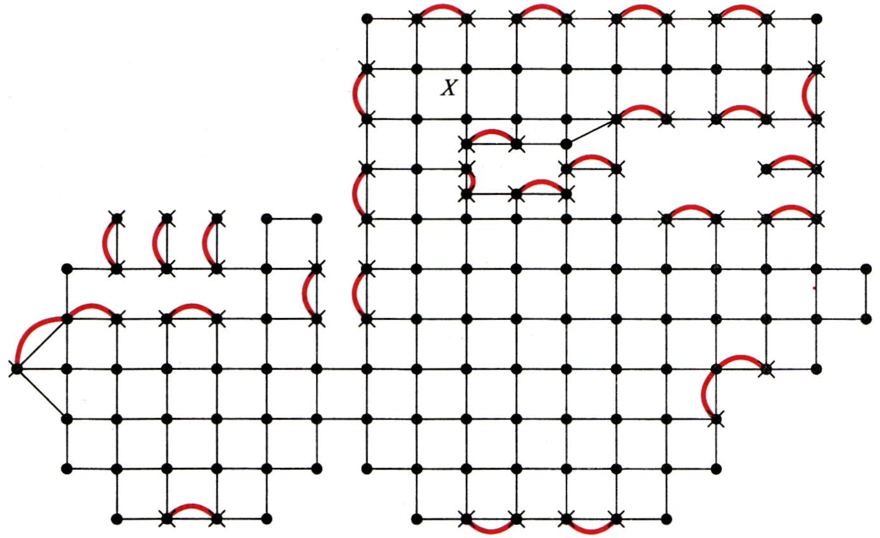
iš dalies nusako ir optimalų kelionės pradinio grafo briaunomis planą, nes mes tiksliai žinome, kuriomis aštuoniomis briaunomis turėsime eiti dukart. 5.21 pav. parodytas konkretus optimalios kelionės pavyzdys, gautas Flerio algoritmu 5.20 c) pav. grafui (raudonai pažymėtos dukart einamos briaunos).

12 pavyzdys. Susipažinę su oilerizavimu, išbandykime save šiek tiek keblesniu pavyzdžiu. Mes norime apkeliauti grafą, parodytą 5.22 pav., pradėdami ir baigdami toje pačioje viršūnėje (sakykime, X) bei naudodami kiek galima mažiau fiktyvių briaunų. Kadangi grafas turi nedaug nelyginio laipsnio viršūnių, tai optimalų jo oilerizavimą nesunku atlikti bandymų ir klaidų metodu. Todėl siūlome skaitytojui pabandyti pačiam tai padaryti prieš pažiūrint į atsakymą kitame puslapyje (5.23 pav.).

Dabar jau galime pasiekti mūsų pagrindinį tikslą – rasti Oilerio ciklą 5.23 pav. grafe. Tai galime padaryti Flerio algoritmu (nuobodžiu ir lėtu, tačiau garantuojančiu rezultatą) arba – pasikliaudami sveika nuovoka – bandymų ir klaidų metodu (gal net greitesniu, bet labiau rizikingu). Vėl primygtinai raginame skaitytoją būtinai pačiam rasti tokį Oilerio ciklą (žr. 34 pratimą).



5.22 pav.



5.23 pav.

Kartais mes norėsime apkeliauti grafą geriausiu maršrutu, pradėdami vienoje vietoje ir baigdami kitoje. Iš Antrosios Oilerio teoremos žinome, kad šiuo atveju pradinė ir galinė viršūnės turi būti nelyginio laipsnio. Pažymėkime pradinę ir galinę nelyginio laipsnio viršūnes X ir Y. Geriausią grafo maršrutą galime rasti taikydami optimalų **pusiau oilerizavimą**: paliekame viršūnėms X ir Y nelyginius laipsnius, o visas kitas nelyginio laipsnio viršūnes darome lyginio laipsnio viršūnėmis (kaip anksčiau). Kadangi procedūra iš esmės lieka ta pati, siūlome skaitytojui išbandyti ją pačiam (žr. 36, 37 ir 38 pratimus).

GRAFŲ MODELIAI

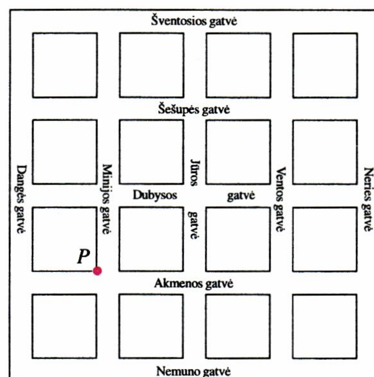
Pagaliau turime visus reikalingus matematinius įrankius bet kokiam iškilusiam gyvenimiškam Oilerio ciklų uždaviniui išspręsti. Dabar mums jau turėtų būti aišku, kad, sprendžiant Oilerio ciklų tipo uždavinį, užtenka rasti atitinkamo grafo Oilerio ciklą. Kyla vienintelis klausimas: kaip konkrečią realaus gyvenimo situaciją teisingai aprašyti grafu, kuris išreikštų sprendžiamos problemos esmę?

Kai matematinė struktūra (pavyzdžiui, grafas) naudojama aprašant ir nagrinėjant realaus gyvenimo uždavinius, ji vadinama pradinio uždavinio *matematiniu modeliu*. Vienas iš naudingiausių dalykų, kurio mes mokysimės šiame skyriuje (taip pat kituose trijuose skyriuose), yra grafo modelio, kaip pagrindinės analizavimo priemonės, taikymas nagrinėjant įvairius svarbius vadybos mokslo praktinius uždavinius.

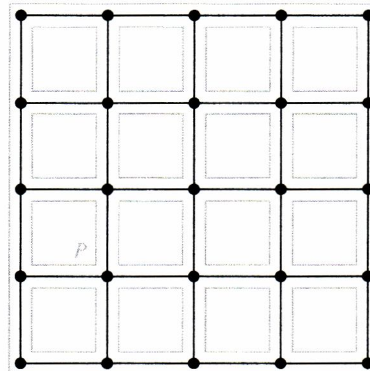
Išnagrinėkime keletą paprastų pavyzdžių.

13 pavyzdys. (**Apsukrus ledų pardavėjas.**) Miesto ledų pardavėjas turi apeiti nedidelio rajono gatves, parodytas 5.24 a) pav., pradėdamas ir baigdamas kelionę prie ledų kiosko, esančio Minijos ir Akmenos gatvių kampe (taškas P 5.24 a) pav.). Karšta vasaros diena, bet kaip tyčia sugedo šaldytuvas ledų vežimėlyje, todėl pardavėjui ypač rūpi kuo greičiau atlikti savo darbą.

Laimei, jis yra skaitęs šį skyrių ir supranta, jog, norėdamas pritaikyti savo žinias apie Oilerio ciklus, pirmiausia turi savo nedidelį rajoną pavaizduoti grafu. Pardavinėjant ledus, užtenka vieną kartą eiti gatve, todėl kiekvieną rajono gatvę galima pavaizduoti briauna, o kiekvieną sankryžą – viršūne, kaip parodyta 5.24 b) pav. Dabar pradinis uždavinys tolygus optimalaus maršruto grafo briaunomis radimui (5.25 a) pav.). Mums pasisekė – tai 11 pavyzdžio uždavinys! 5.25 b) pav. parodytas optimalus maršrutas. Tai tas pats, tik vaizdžiau parodytas 5.21 pav. maršrutas.

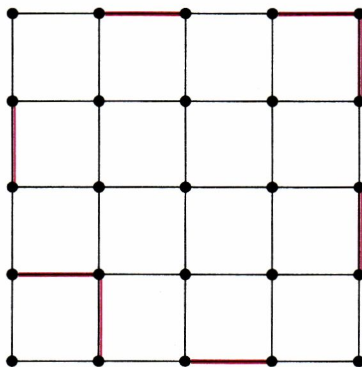


a)

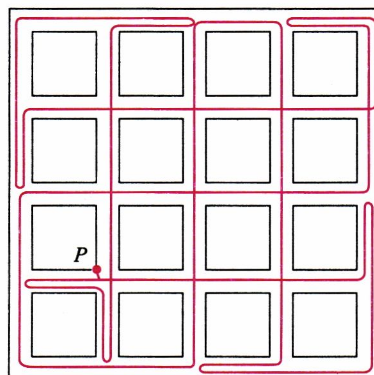


b)

5.24 pav.



a)

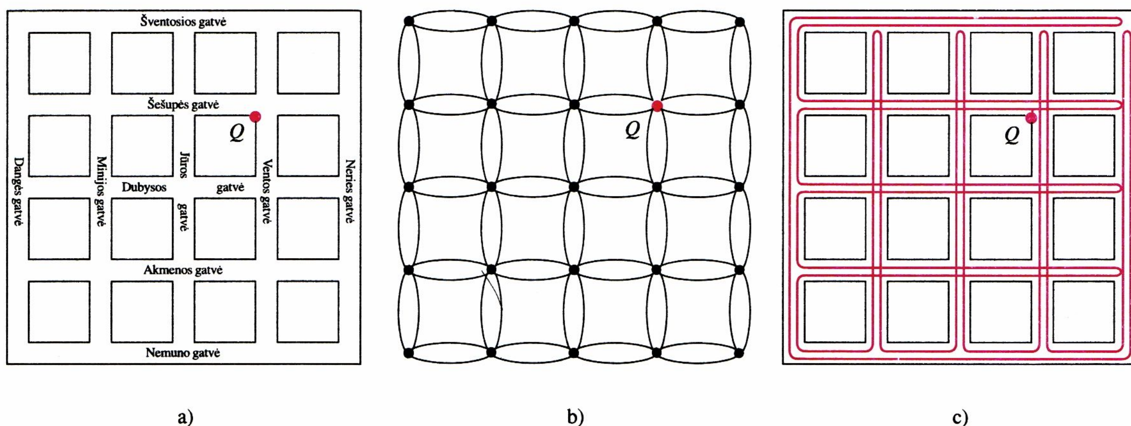


b)

5.25 pav.

14 pavyzdys. (**Sumanus paštininkas.**) Sakykime, kad paštininkas turi išnešioti paštą tame pačiame rajone, kaip ir ledų pardavėjas iš 13 pavyzdžio. Panagrinėkime jo maršrutą. Kelionė turi prasidėti ir baigtis pašto skyriuje, esančiame Ventos ir Šešupės gatvių kampe (taškas Q 5.26 a) pav.). Pagrindinis skirtumas tarp jo ir ledų pardavėjo darbo yra tas, kad paštininkas turi išnešioti paštą abiejose gatvės pusėse, o praktiškai tai reiškia, kad visas gatves jam tenka apeiti du kartus. Tai turi atsispindėti grafe, kuriuo modeliuojamas uždavinys, ir tai galima padaryti priskyrus kiekvienai gatvei dvi briaunas, kaip parodyta 5.26 b) pav. Beje, šio grafo nebereikia oilerizuoti – jo visos viršūnės jau yra lyginio laipsnio. Imdami Q pradiniu tašku ir taikydami Flerio algoritmą, galime gauti optimalų paštininko maršrutą. Vienas iš tokių maršrutų parodytas 5.26 c) pav.

5.26 pav.



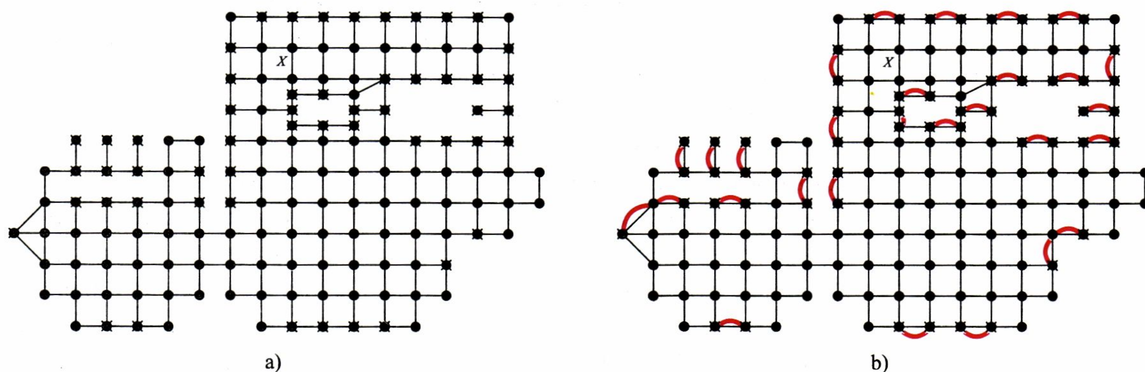
a) b) c)

Taigi šiame pavyzdyje pavyko rasti maršrutą, nenaudojant fiktyviųjų briaunų.

15 pavyzdys. (**Švariamiesčio tvarkymo transporto maršrutų sudarymas.**) Šiame paskutiniame skyriaus pavyzdyje grįžkime prie uždavinio apie optimalių Švariamiesčio tvarkymo transporto maršrutų sudarymą.

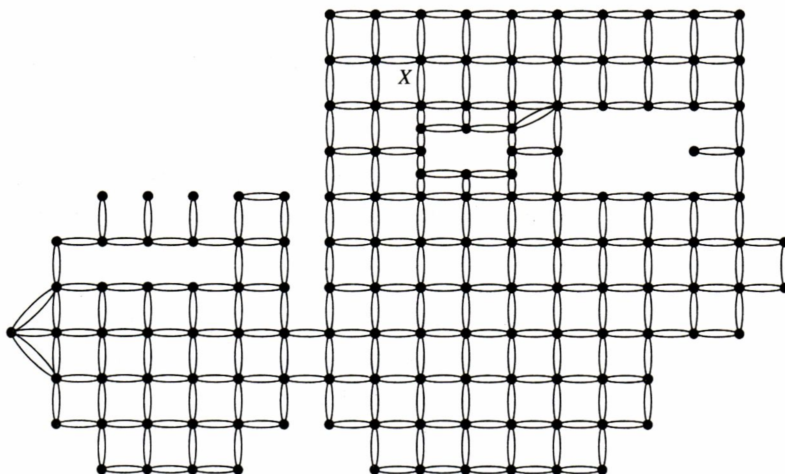
Pirmiausia sudarykime šiukšliavežės maršrutą. Svarbu žinoti, kad Švariamiestyje šiukšliavežės, važiuodamos gatve, surenka šiukšles iš karto abiejose gatvės pusėse. Todėl atitinkamame grafe vieną gatvę atitinka viena briauna – gautas grafas parodytas 5.27 a) pav. Vėl „sutapimas“ – tai tas pats 12 pavyzdžio grafas iš 5.22 pav.! Mes šį grafą jau optimaliai oilerizavome (5.23 pav., čia pakartotas skaitytojų patogumui, sutampa su 5.27 b) pav.).

5.27 pav.



Iš 5.27 b) pav. matome, kurios gatvių atkarpos galėtų būti sudvejintos optimaliame šiukšliavežės maršrute. Suskaičiavę randame 29 tokias sudvejintas atkarpas, o tai nėra labai daug, turint galvoje bendrą atkarpų skaičių. Truputį daugiau paplušėti reikia ieškant optimalaus maršruto, ir skaitytojui tai padaryti jau esame pasiūlę (žr. 34 pratimą).

O koks grafo modelis gatvių šluotuvui? Šiuo atveju mašina turi važiuoti kiekviena gatve du kartus (po vieną kartą kiekviena eismo juosta), todėl grafe kiekvienai gatvei turime skirti jau po dvi briaunas. Galų gale gauname grafą, parodytą 5.28 pav. Šis grafas neturi nelyginio laipsnio viršūnių, todėl, ieškant optimalaus maršruto, užtenka rasti Oilerio ciklą su pradiniu tašku X. Tai paliekame skaitytojui. Panašiai grafo modelis sniegavalei turi skirti po vieną briauną kiekvienai gatvės juostai. Todėl, pavyzdžiui, keturias eismo juostas turinčią gatvę aprašys keturios briaunos.



5.28 pav.

IŠVADOS

Iš šiame skyriuje sužinotų dalykų vertėtų prisiminti ir tai, kad iš pirmo žvilgsnio keistas šiukšliavežės važinėjimas po miestą galbūt turi matematinį pagrindimą. Iš tiesų, daugelis miestų nuolatos sudarinėja savo šiukšliavežėms maršrutus, siekdami kuo didesnio efektyvumo ir naudodami panašius į šiame skyrelyje išdėstytus metodus. Dideliame mieste efektyvūs aptarnavimo maršrutai (ne tik šiukšlių rinkimo, bet ir gatvių šlavimo, sniego išvežimo, skaitiklių parodymų registravimo, pašto išnešiojimo ir t.t.) gali sutaupyti daugybę pinigų*.

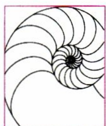
Efektyvaus šiukšliavežės maršruto sudarymas tėra tik vienas pavyzdys iš plačios klasės uždavinių, vadinamų *maršrutų sudarymo uždaviniais*. Šių uždavinių esmė yra rasti tam tikra prasme efektyviausią iš visų maršrutų konkrečiam tikslui pasiekti (išvežti šiukšles, iššluoti gatves, patikrinti kiekvieno skaitiklio parodymus, aplankyti kiekvieną klientą ir t.t.). Mūsų (kartais ir labai supaprastintuose) pavyzdžiuose efektyvumą matavome pakartotinai aplankytų gatvių skaičiumi. Sudėtingesnėse situacijose svarbesni kiti kriterijai, sakysime, bendras nukeliautas atstumas ar išleistų pinigų suma. Šiuo požiūriu su maršrutų uždaviniais reikia elgtis atsargiai. Nors jie visi skamba labai panašiai, o tikslas visada yra efektyviausio maršruto radimas, bet ką tai reiškia praktiškai ir kaip tai įgyvendinti, labai priklauso nuo konkretaus uždavinio. Tai pamatysime kitame skyriuje, kur nagrinėsime visiškai kitokių maršrutų sudarymą.

Šiame skyriuje mes susipažinome su grafų pasauliu. Vadyboje grafai yra tai, kas tradicinėje geometrijoje yra kvadratai, trikampiai, apskritimai – jie suteikia galimybę analizuoti (ir dažnai – išspręsti) tam tikrus gyvenimiškus uždavinius. Grafų tyrinėjimas yra atskira svarbi šiuolaikinės matematikos sritis. Tiek algebra bei geometrija, tiek ir grafų teorija turi savo kalbą ir, tai dar svarbiau, savo veiklos būdą. Šiame skyriuje mes taip pat pirmą kartą susidūrėme su *algoritmais* ir sužinojome apie vieną iš jų – *Flerio algoritmą*. Kituose trijuose skyriuose susipažinsime su kitomis grafų pasaulio įdomybėmis ir panagrinėsime keletą naujų nuostabių algoritmų.

Pabaigai dar keletas žodžių apie algoritmus. Algoritmo atlikimą dažnai galima palyginti su valgio gaminimu pagal receptą ar mokymusi vairuoti. Visose šios veiklos srityse protas negali pakeisti praktinių įgūdžių. Kad ir kokie būtų jūsų matematiniai sugebėjimai, vienintelis būdas suprasti ir išmokti algoritmą – tai atlikti jį tiek kartų, kiek reikia.

* Pavyzdžiui, teigiama, kad, taikant grafų teoriją vien tik Niujorko miesto tvarkymo transporto maršrutams sudaryti, sutaupoma apie 25 milijonus dolerių per metus.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

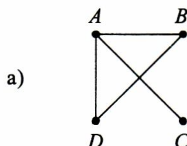


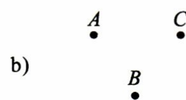
algoritmas
briauna
ciklas
fiktyvioji briauna
Flerio algoritmas
grafas
grafo modelis
grafo oilerizavimas
gretimosios viršūnės
jungusis grafas
kelias
kilpa
maršruto sudarymo uždavinys
Oilerio ciklas
Oilerio kelias
Oilerio teoremos
sudvejintoji briauna
tiltas
viršūnė
viršūnės laipsnis

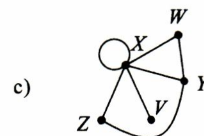
PRATIMAI

Apšilimas

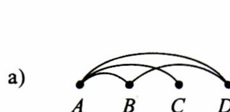
1. Išvardykite šių grafų viršūnes ir briaunas.

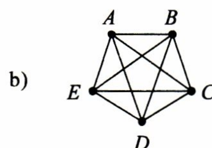
a) 

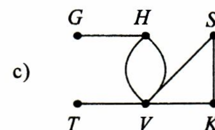
b) 

c) 

2. Išvardykite šių grafų viršūnes ir briaunas.

a) 

b) 

c) 

3. Nubraižykite po du skirtingus grafo paveikslus kiekvienam šių atvejų.

a) Viršūnės: A, B, C, D.
Briaunos: AB, BC, BD, CD.

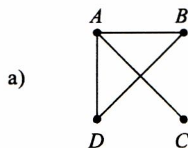
b) Viršūnės: K, R, S, T, W.
Briaunos: $RS, RT, TT, TS, SW, WW, WS$.

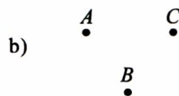
4. Nubraižykite po du skirtingus grafo paveikslus kiekvienam šių atvejų.

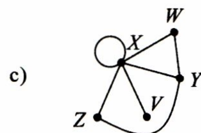
a) Viršūnės: L, M, N, P.
Briaunos: LP, MM, PN, MN, PM.

b) Viršūnės: A, B, C, D, E.
Briaunos: Viršūnė A yra gretima viršūnėms C ir E; B yra gretima D ir E; C yra gretima A, D ir E; D yra gretima B, C ir E; E yra gretima A, B, C ir D.

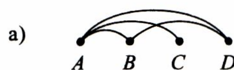
5. Raskite grafų viršūnių laipsnius.

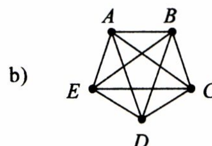
a) 

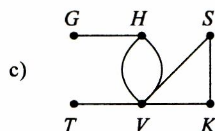
b) 

c) 

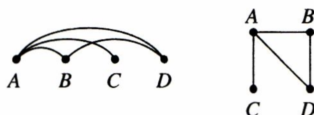
6. Raskite grafų viršūnių laipsnius.

a) 

b) 

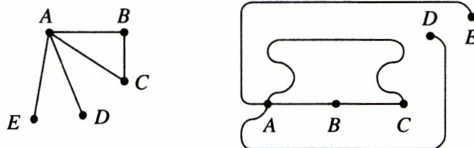
c) 

7. a) Paaiškinkite, kodėl šios figūros vaizduoja tą patį grafą.



b) Nubraižykite trečią figūrą, vaizduojančią tą patį grafą.

8. a) Paaiškinkite, kodėl šios figūros vaizduoja tą patį grafą.



b) Nubraižykite trečią figūrą, vaizduojančią tą patį grafą.

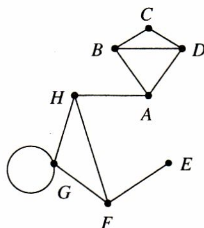
9. a) Nubraižykite keturių viršūnių grafą, kurio visų viršūnių laipsniai lygūs 2.

b) Nubraižykite šešių viršūnių grafą, kurio visų viršūnių laipsniai lygūs 3.

10. a) Nubraižykite keturių viršūnių grafą, kurio visų viršūnių laipsniai lygūs 2.

b) Nubraižykite aštuonių viršūnių grafą, kurio visų viršūnių laipsniai lygūs 3.

11–14 *pratimuose kalbama apie tokį grafą:*



11. a) Raskite kelią iš C į F, einantį per viršūnę B, bet ne per viršūnę D.
b) Raskite kelią iš C į F, einantį per viršūnes B ir D.
Kiek kelių yra c) iš C į H?; d) iš H į F?; e) iš C į F?

12. a) Raskite kelią iš D į E, einantį tik vieną kartą per viršūnę G.
b) Raskite kelią iš C į E, einantį per viršūnę G du kartus.
Kiek kelių yra c) iš D į H?; d) iš H į E?; e) iš D į E?

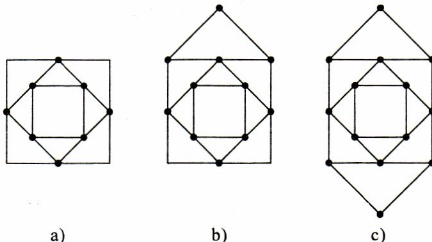
13. a) Raskite ciklą, einantį per viršūnę D.
b) Kiek iš viso ciklų prasideda ir baigiasi viršūne D?
c) Kurios grafo briaunos yra tiltai?

14. a) Raskite ciklą, einantį per viršūnę H.
b) Kiek iš viso ciklų prasideda ir baigiasi viršūnėje H?
c) Kokią briauną galima prijungti prie grafo, kad naujasis grafas neturėtų tiltų?

15. a) Karaliaučiaus tiltų uždavinyje nurodykite, kurie miesto tiltai yra tiltai grafų teorijos prasme?
b) Pateikite keturių viršūnių grafo pavyzdį, kuriame kiekviena briauna yra tiltas.

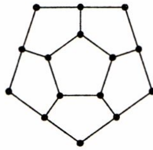
16. a) Pateikite penkių viršūnių grafo pavyzdį, kuriame nebūtų nė vieno tilto.
b) Pateikite penkių viršūnių grafo pavyzdį, kuriame visos briaunos yra tiltai.

17. Kiekvienam grafui nustatykite, ar jis turi Oilerio ciklą arba Oilerio kelią. Pagrįskite atsakymą, neieškodami konkretaus ciklo ar kelio.

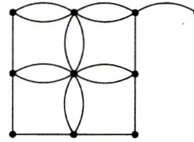


a) b) c)

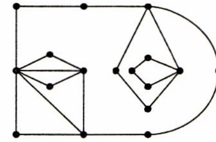
18. Kiekvienam grafui nustatykite, ar jis turi Oilerio ciklą ar Oilerio kelią. Pagrįskite atsakymą, neieškodami konkretaus ciklo ar kelio.



a)



b)

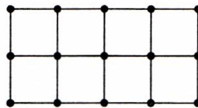


c)

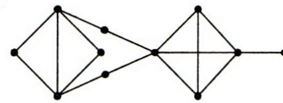
19. Nubraižykite kiekvieną 17 pratimo grafą, neatitraukdami pieštuko ir nekartodami jokios briaunos du kartus (atsakymą parašykite žymėdami briaunas jų apėjimo eilės tvarka: 1, 2, 3, ir t.t.). Jei to negalima padaryti, paaiškinkite kodėl.

20. Nubraižykite kiekvieną 18 pratimo grafą, neatitraukdami pieštuko ir nekartodami jokios briaunos du kartus (atsakymą parašykite žymėdami briaunas jų apėjimo eilės tvarka: 1, 2, 3, ir t.t.). Jei to negalima padaryti, paaiškinkite kodėl.

21. Raskite kiekvieno grafo optimalią oilerizaciją.

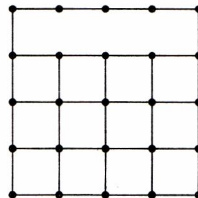


a)

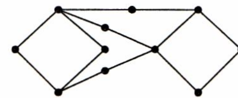


b)

22. Raskite kiekvieno grafo optimalią oilerizaciją.

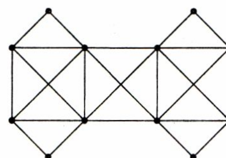


a)

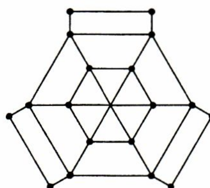


b)

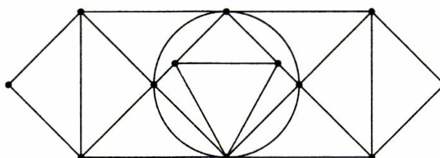
23. Raskite grafo Oilerio ciklą.



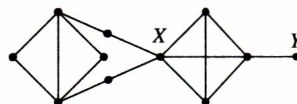
24. Raskite grafo Oilerio ciklą.



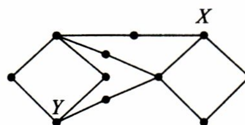
25. Raskite grafo Oilerio ciklą.



26. Raskite grafo Oilerio kelią, prasidedantį viršūnėje X ir užsibaigiantį viršūnėje Y.



27. Raskite grafo Oilerio kelią, prasidedantį viršūnėje X ir užsibaigiantį viršūnėje Y.



Treniruotė

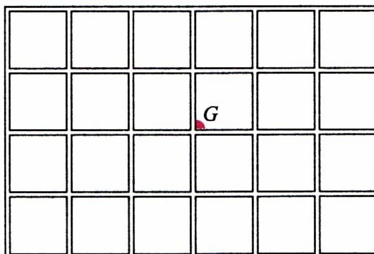
28. a) Kiekvienam 1 ir 2 pratimo grafui užpildykite tokią lentelę.

Grafas	Briaunų skaičius	Visų viršūnių laipsnių suma
1 a) pratimas	4	3+2+1+2 = 8
1 b) pratimas		
1 c) pratimas		
2 a) pratimas		
2 b) pratimas		
2 c) pratimas		

b) Paaiškinkite, kodėl kiekvienas grafas arba visai neturi, arba turi lyginį skaičių viršūnių, kurių laipsnis nelyginis.

29. Šiukšliavežė turi surinkti šiukšles iš visų paveikslėlyje parodyto rajono gatvių (pradėdama ir baigdama raide G pažymėtame šiukšlių perdirbimo

punkte). Visose gatvėse – dviejų krypčių eismas, ir šiukšlės surenkamos abiejose gatvės pusėse vienu metu.

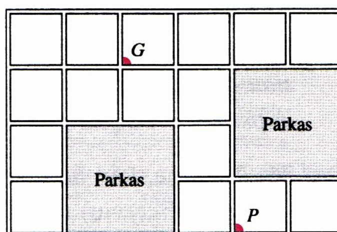


a) Nubraižykite grafą šiam uždaviniui.
b) Raskite jo optimalią oilerizaciją.
c) Raskite šiukšliavežės optimalų maršrutą. Jį aprašykite numeruodami briaunas jų apvažiavimo eilės tvarka.

30. Išnagrinėkite 29 pratimo situaciją, šį kartą laikydami, kad šiukšlės renkamos kiekvienoje gatvės pusėje atskirai.
a) Nubraižykite grafą šiam uždaviniui.
b) Raskite šiukšliavežės optimalų maršrutą. Jį aprašykite numeruodami briaunas jų apvažiavimo eilės tvarka.

31. Nagrinėkime tokį žaidimą. Jūs turite pasivaikščioti Karaliaučiaus tiltais, pradėdami ir baigdami kelionę kairiajame krante (K) ir bent vieną kartą perėję kiekvienu tiltu. Kiekvieną kartą, eidami per tiltą, jūs turite sumokėti po 1 Lt. Aprašykite patį pigiausią pasivaikščiojimą.

32 *ir* 33 *pratimai remiasi mažo miestelio gatvių schema, parodyta žemiau.*



32. Šiukšliavežė turi surinkti šiukšles iš visų paveikslėlyje parodyto rajono gatvių (pradėdama ir baigdama raide G pažymėtame šiukšlių perdirbimo punkte). Visose gatvėse – dviejų krypčių eismas, ir šiukšlės surenkamos abiejose gatvės pusėse vienu metu.
a) Nubraižykite grafą šiam uždaviniui.
b) Raskite jo optimalią oilerizaciją.
c) Raskite šiukšliavežės optimalų maršrutą. Jį aprašykite numeruodami briaunas jų apvažiavimo eilės tvarka.

33. Tarkime, kad mes norime rasti optimalų laiškanešio maršrutą. Laiškanešys ta pačia gatve turi eiti du kartus (po vieną kartą kiekvienu gatvės šaligatviu), išskyrus gatves, juosiančias parką, – tada pakanka vieno karto.

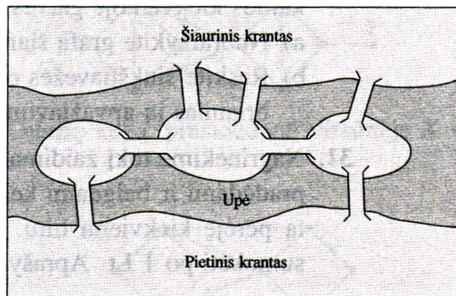
a) Nubraižykite grafą šiam uždaviniui.

b) Raskite jo optimalią oilerizaciją.

c) Raskite laiškanešio optimalų maršrutą (maršruto pradžia ir pabaiga yra raide P pažymėtame pašte).

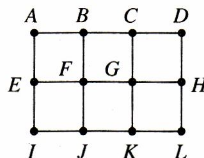
34. Raskite optimalų maršrutą Švariamiesčio šiukšliavežės uždavinyje (taikykite optimalią oilerizaciją 5.23 pav. parodytose miesto gatvėse).

35. Žemiau parodyta schema vaizduoja miestą, per kurį teka upė. Čia matome tris salas ir septynis tiltus. Ar įmanoma pasivaikščioti, kiekvienu tiltu pereinant lygiai po vieną kartą? Jei įmanoma, tai kaip? Jei ne – paaiškinkite kodėl?



36–38 *pratimuose kalbama apie tokį grafo pataisymą, kad jis turėtų Oilerio kelią (su nurodytomis pradinėmis ir galinėmis viršūnėmis). Tai atliekama pusiau oilerizuojant grafą, t.y. paliekant pradinei ir galinei viršūnei nelyginius laipsnius, o visų kitų nelyginio laipsnio viršūnių laipsnius padarant lyginiais.*

36. Tarkime, kad norime apeiti žemiau parodytą grafą su minimaliu sudvejintų (fiktyvių) briaunų skaičiumi.

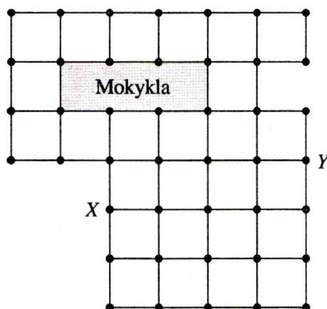


a) Raskite optimalią grafo pusiau oilerizaciją, prasidedančią viršūnėje E ir besibaigiančią viršūnėje H.

b) Kuriomis grafo briaunomis reikės eiti pakartotinai?

37. Tarkime, kad mes norime keliauti tuo pačiu 36 uždavinio grafu, tačiau dabar norime pradėti viršūnėje B ir baigti viršūnėje H. Kuriomis grafo briaunomis reikės keliauti pakartotinai?

38. Policininkas turi patruliuoti gatvėmis, kurios parodytos žemiau esančiame grafe.

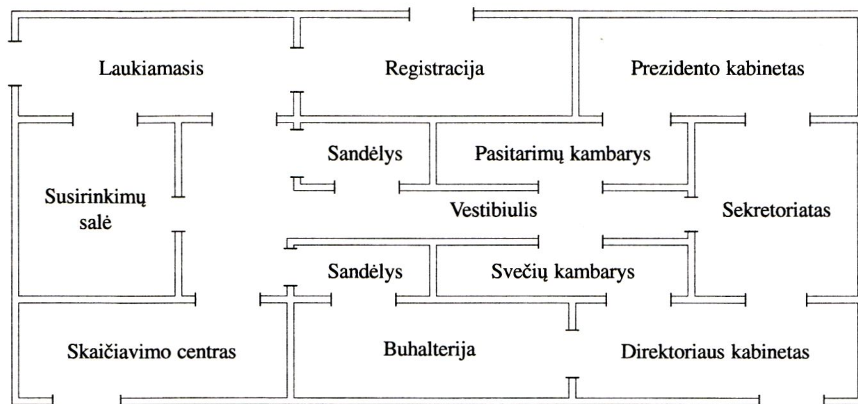


Jis nori savo kelionę pradėti policijos nuovadoje (viršūnė X) ir baigti namie (viršūnėje Y). Jam reikia apeiti visas rajono gatves bent po vieną kartą, tačiau jis nori kuo mažiau gatvių pereiti pakartotinai.

a) Kiek iš viso gatvių jis turės pereiti dukart, eidamas optimaliu maršrutu?

b) Aprašykite optimalią kelionę šio rajono gatvėmis. Numeruokite briaunas jų apėjimo eilės tvarka.

39. Žemiau parodytas brėžinys yra įstaigos pirmojo aukšto planas.



a) Įrodykite, kad negalima įeiti iš lauko į įstaigą ir, einant pro kiekvienas duris lygiai vieną kartą, išeiti į lauką.

b) Įrodykite, kad galima eiti pro kiekvienas pastato duris lygiai po vieną kartą (pradedant ir baigiant tinkamoje vietoje).

c) Įrodykite, kad, pašalinus vienas duris, įeiti būtų galima iš lauko ir, einant pro kiekvienas duris lygiai po vieną kartą, išeiti į lauką.

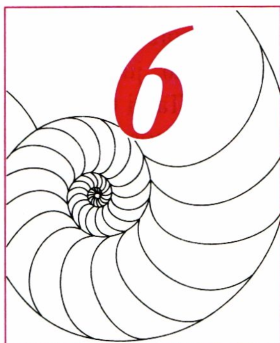
40. a) Pateikite pavyzdį grafo, kuris turi 15 viršūnių, neturi kartotinių briaunų (t.y. bet kurias dvi viršūnes jungia ne daugiau kaip viena briauna) ir turi Oilerio ciklą.
b) Pateikite pavyzdį grafo, kuris turi 15 viršūnių, neturi kartotinių briaunų ir turi Oilerio kelią, bet neturi Oilerio ciklo.
c) Pateikite pavyzdį grafo, kuris turi 15 viršūnių, neturi kartotinių briaunų ir turi Oilerio ciklą, bet neturi Oilerio kelio.

Varžybos

41. a) Ar gali Oilerio ciklą turintis grafas turėti tiltų? Jei taip – pateikite pavyzdį. Jei ne – paaiškinkite kodėl.
b) Ar gali Oilerio kelią turintis grafas turėti tiltų? Jei taip, tai kiek? Pagrįskite savo atsakymą.

42. Paaiškinkite, kodėl jungusis grafas, kurio kiekvienos viršūnės laipsnis yra ne mažesnis už 2, turi turėti ciklą.

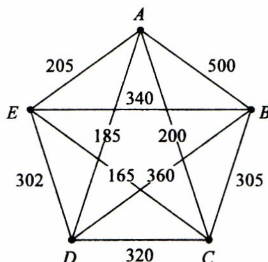
43. Tarkime, kad G ir H yra du grafai, neturintys bendrų viršūnių ir turintys Oilerio ciklus. Sakykime, J yra grafas, sudarytas iš grafų G ir H ir vienos papildomos briaunos, jungiančios vieną G viršūnę su viena H viršūne. Paaiškinkite, kodėl grafas J turi Oilerio ciklą, bet neturi Oilerio kelio.



6 Keliaujančiojo pirklio uždavinys

Du takelius aš girioj
aptikau,
Mažiau išvaikštinėtąjį
pasirinkau,
Ir tik todėl tai visa
atsitiko. . .
R. FROSTAS
(ROBERT FROST)

Hamiltonas užbaigia ciklą



6.1 pav.

Prekybos agento maršrutas. Prekybos agentas turi aplankyti savo klientus, gyvenančius penkiuose skirtinguose miestuose (A, B, C, D ir E). Šalia kiekvienos 6.1 paveikslėlyje parodyto grafo briaunos nurodytos kelionės išlaidos (benzinas, draudimas, automobilio susidėvėjimas ir t.t.)* tarp bet kurių dviejų miestų. Kelionė turi prasidėti ir baigtis mieste A, kuriame gyvena prekybos agentas. Koks galėtų būti *pigiausias* prekybos agento kelionės maršrutas (į visus miestus nuvažiuojame lygiai po vieną kartą)?

Šiame skyriuje mes ir spręsime prekybos agento uždavinį (bei panašius). Bet prieš tai turime susipažinti su keliomis naujomis grafų teorijos sąvokomis. Iš pradžių atkreipkime dėmesį, kad 6.1 pav. grafas nėra visai tipiškas: be viršūnių ir briaunų, jame dar yra kiekvienai briaunai priskirtas skaičius.

* Paprastai laikoma, kad kelionės automobiliu išlaidos yra proporcingos atstumui (kilometro kaina – 0,90 lito, 1,15 lito ir pan.), nors ir kiti kintamieji (eismo sudėtingumas, oro sąlygos, kelio būklė ir t.t.) gali turėti įtakos jų dydžiui.

Tie skaičiai reiškia kelionės atitinkama briauna išlaidas – jie lygiai taip pat galėtų reikšti atstumą, laiką, pakelės medžių skaičių ar ką nors dar egzotiškesnį. Apskritai, jei grafo briaunoms skirti kokie nors skaičiai, juos vadinsime briaunų **svoriais***, o patį grafą vadinsime **svoriniu grafu**. Taigi 6.1 pav. grafas yra svorinis grafas; briaunos AD svoris yra 185, briaunos BC – 305 ir t.t. Beje, nėra reikalaujama, kad briaunų ilgiai būtų proporcingi jų svoriams. Kaip ir įprastiniuose grafuose, svorinio grafo briaunų ilgis ir pavidalas yra visiškai nesvarbu.

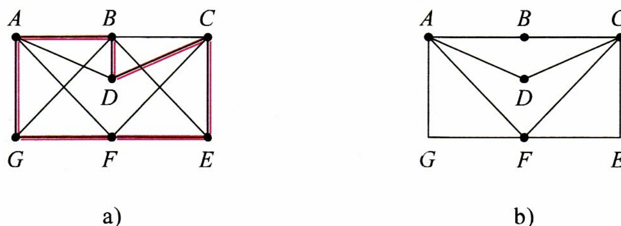
Jei briaunų svoriai reikštų ne išlaidas, o kitus kintamuosius (pavyzdžiui, atstumą ar laiką), tai uždavinys irgi būtų atitinkamai pakeistas (rasti trumpiausią arba „greičiausią" maršrutą). Kalbėdami apie pigiausią, trumpiausią, greičiausią ir t.t. maršrutą, mes vartosime bendrą savoką **optimalus maršrutas**.

HAMILTONO CIKLAI

Dabar jau galime pateikti bendrą pradinio uždavinio formulavimą. Duotas svorinis grafas. Reikia rasti optimalų maršrutą, kuris prasideda ir baigiasi nurodytoje viršūnėje ir *eina per kiekvieną viršūnę lygiai vieną kartą*.

Ciklas, kuris prasideda kurioje nors grafo viršūnėje ir, patekęs į kiekvieną kitą grafo viršūnę lygiai vieną kartą, vėl grįžta į pradinę viršūnę, vadinamas **Hamiltono ciklu****.

Skirtumas tarp Oilerio ciklo ir Hamiltono ciklo gali pasirodyti visai nedidelis (tereikia žodį „briauna" pakeisti žodžiu „viršūnė"). Tačiau matematiniu požiūriu skirtumas yra nepaprastai didelis. Nagrinėkime, pavyzdžiui, du grafus, parodytus 6.2 pav. 6.2 a) pav. grafas Oilerio ciklo neturi (per daug



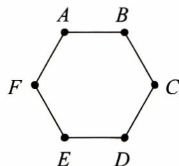
6.2 pav. a) Nėra nė vieno Oilerio ciklo. Vienas iš daugelio Hamiltono ciklų pažymėtas raudonai. b) Nėra nė vieno Hamiltono ciklo. Vienas iš daugelio Oilerio ciklų yra $\boldsymbol{A, B, C, D, A, F, C, E, F, G, A}$.

* Mokslo kalboje bendru žodžiu „svoris" paprastai vadinami tokie kintamieji, kaip kaina, laikas, atstumas, – tai, ką norima minimizuoti.

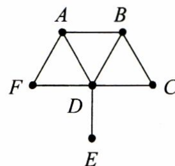
** Didžiojo airių matematiko ir astronomo V. R. Hamiltono (Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865) garbei. Pasakojama, kad ketverių metų Hamiltonas jau skaitė ne tik angliškai, bet ir lotyniškai, graikiškai ir hebrajiškai. Dvidešimt vienerių metų jis tapo astronomijos profesoriumi Dublino Šv. Trejybės koledže. Jis buvo ne tik žymus mokslininkas, bet ir didelis žodžio meistras; artimiausi draugai jį lygino su garsiausiais to meto anglų poetais.

nuotaiką gadinančių „netikusių“ nelyginio laipsnio viršūnių), tačiau jis turi daugybę Hamiltono ciklų (pavyzdžiui, A, B, D, C, E, F, G, A ir A, D, C, E, B, G, F, A; skaitytojas pats ras kitų – žr. 1 pratimą). Priešinga situacija – 6.2 b) pav. grafe, kuriame, kaip žinome, Oilerio ciklas yra (visos viršūnės lyginio laipsnio), tačiau nėra Hamiltono ciklų (žr. 23 pratimą).

Būtų nuostabu turėti Hamiltono teoremą Hamiltono ciklams (panašią į Oilerio teoremą). Deja, tokios teoremos nėra. Nėra universalaus būdo atsakyti į klausimą, ar grafas turi Hamiltono ciklą (nebent jei turėtume kantrybės išbandyti visus variantus; tada arba rastume tokių ciklų, arba ne). Paprastai, kuo grafe daugiau briaunų, tuo tikėtiniau, kad jis turi Hamiltono ciklą. Deja, tik paprastai. 6.3 a) pav. grafas, turintis šešias viršūnes ir šešias briaunas, turi ir Hamiltono ciklą (A, B, C, D, E, F, A). Kita vertus, 6.3 b) pav. grafas, turintis šešias viršūnes ir aštuonias briaunas, neturi Hamiltono ciklo.



a)

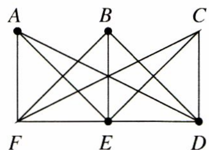


b)

6.3 pav.

Vis dėlto kai kada galima įrodyti, kad grafas turi Hamiltono ciklą. Žemiau pateikiamoje Dirako* teoremoje nurodytas tokios situacijos pavyzdys. Mes šia teorema remsimės kaip pagalbiniu faktu; jos įrodymą galima rasti bet kurioje grafų teorijos knygoje.

Dirako teorema
Tarkime, kad jungusis grafas turi ne mažiau kaip tris viršūnes. Jei kiekviena grafo viršūnė yra gretima bent pusei viršūnių, tai grafas turi Hamiltono ciklą.



6.4 pav.

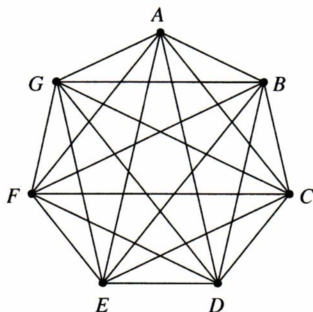
1 pavyzdys. 6.4 pav. grafas turi šešias trečiojo laipsnio viršūnes. Pagal Dirako teoremą, jis turi Hamiltono ciklą. Mes paliekame skaitytojui rasti jį.

2 pavyzdys. G yra didelis grafas (per didelis, kad jį braižytume). Jis yra jungusis, neturi nei kilpų, nei kartotinių briaunų, turi 20 viršūnių ($V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{20}$). Viršūnių laipsniai yra: $\deg(V_1) = 12$, $\deg(V_2) = 16$, $\deg(V_3) =$

* P. Dirakas (Paul Dirac, 1902–1984) – anglų fizikas, vienas iš kvantų mechanikos kūrėjų.

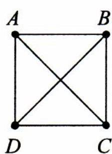
11, $\deg(V_4) = 14$, $\deg(V_5) = 13$, $\deg(V_6) = 15$, $\deg(V_7) = 14$, $\deg(V_8) = 12$, $\deg(V_9) = 17$, $\deg(V_{10}) = 14$; visų kitų viršūnių laipsniai yra 10. Šis grafas turi Hamiltono ciklą (remiantis Diraku – o jis žinojo, ką sako!).

3 pavyzdys. (**Pilnieji grafai.**)

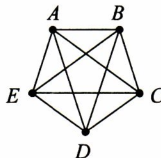


6.5 pav.

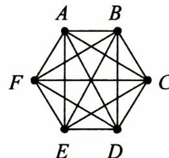
6.5 pav. grafas turi septynias viršūnes, ir kiekviena viršūnė yra gretima visoms likusioms viršūnėms. Tokie grafai vadinami **pilnaisiais grafais** (kiekvieną viršūnių porą jungia viena briauna). 6.6 pav. matome pilnuosius grafus, turinčius atitinkamai keturias, penkias ir šešias viršūnes.



a)



b)



c)

6.6 pav.

Beveik akivaizdu, kad pilnasis grafas turi daugybę Hamiltono ciklų. Panagrinėkime, pavyzdžiui, pilnąjį keturių viršūnių grafą 6.6 a) pav. Jis turi tokius Hamiltono ciklus:

1. A, B, C, D, A
2. A, B, D, C, A
3. A, C, B, D, A
4. A, C, D, B, A
5. A, D, B, C, A
6. A, D, C, B, A

Beje, iš šešių aukščiau išvardytų Hamiltono ciklų trys paskutinieji pakartoja pirmuosius tris, tik atvirkščia tvarka (4-as ciklas yra tas pats 2-as ciklas,

tik einamas priešinga kryptimi, 5-as ciklas yra atvirkščias 3-iam ciklui, o 6-as ciklas yra atvirkščias 1-am). Taip pat aišku, kad kiekvieną iš šių ciklų galima užrašyti ir kitaip (B, C, D, A, B yra tas pats ciklas A, B, C, D, A, užrašytas kita tvarka; tą patį galima pasakyti apie ciklus C, D, A, B, C ir D, A, B, C, D).

Pilnasis penkių viršūnių grafas (6.6 b) pav.) turi 24 Hamiltono ciklus. Mums jau ne naujiena, kad pusė iš šių 24 ciklų atkartoja kitą pusę atvirkščia tvarka. Paliekame skaitytojui juos visus surašyti.

Žinoma patogi formulė, nurodanti bet kurio pilnojo grafo Hamiltono ciklų skaičių. Joje naudojamasi faktorialo sąvoka, su kuria susipažinome 2 skyriuje. Priminsime, kad natūraliojo skaičiaus N faktorialu vadinamas skaičius $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$. Žemiau lentelėje pateiktos kelios $N!$ reikšmės.

$N!$	$N!$ reikšmė
2!	$2 \times 1 = 2$
3!	$3 \times 2 \times 1 = 6$
4!	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
5!	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
⋮	⋮
10!	$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$

O štai ir pilnojo grafo Hamiltono ciklų skaičiaus formulė:

> Pilnasis N-viršūnis grafas turi $(N-1)!$ Hamiltono ciklų. Pusė jų pakartoja kitą pusę atvirkščia tvarka.

KELIAUJANČIOJO PIRKLIO UŽDAVINYS

Šio skyriaus pradžioje minėtas prekybos agentas nori pigiausiu maršrutu po vieną kartą nuvažiuoti į visus penkis miestus, parodytus 6.1 pav., ir grįžti atgal į pradinį miestą A. Dabar galime performuluoti uždavinį: reikia rasti pilnojo svorinio 6.1 pav. grafo optimalų Hamiltono ciklą. Pilnojo svorinio grafo optimalaus Hamiltono ciklo radimo uždavinys daug kur taikomas, ir tradiciškai yra vadinamas **keliaujančiojo pirklio uždaviniu**, nors gali būti kalbama visai apie ką kita. Mes laikysimės šios tradicijos ir bet kurį uždavinį, kai reikia rasti pilnojo svorinio grafo optimalų Hamiltono ciklą, vadinsime keliaujančiojo pirklio uždaviniu (KPU). Pateiksime keletą KPU pavyzdžių.

- **Siuntinių pristatymas.** Paštas susiduria su šiuo uždaviniu kasdien. Pašto tarnautojas automobiliu pristato siuntinius į namus ar kitas paskirties vietas. Kelionės laikas tarp dviejų paskirties vietų yra žinomas arba gali būti apskaičiuotas (patyrę vairuotojai paprastai žino tokius

dalykus). Tarnautojo tikslas yra išvežioti siuntinius į paskirties vietas ir grįžti į pradinį tašką (pašto sandėlį), sugaištant kuo mažiau laiko. Aišku, kad tai – KPU pavyzdys. Vidutiniškai per dieną pašto mašina užsuka į 100–200 vietų, taigi turime KPU tiek viršūnių turinčiam grafui.

- **Elektroninių mikroschemų gamyba.** Gaminant integralinę mikroschemą, specialioje plokštėje reikia išgręžti dešimtis tūkstančių plonų skylučių. Tai daroma sukiojant plokštę po stacionariu lazerio spinduliu. Darbo našumo sumetimais eilės tvarka, kuria gręžiamos skylutės, turi būti tokia, kad visa gręžimo procedūra būtų atlikta per trumpiausią laiką. Tai yra KPU pavyzdys, kuriame grafo viršūnės yra skylutės mikroschemoje, o viršūnes X ir Y jungiančios briaunos svoris yra trukmė, per kurią plokštė patraukiama iš gręžimo vietos X į gręžimo vietą Y.
- **Staklių darbo grafikas.** Daugelyje pramonės šakų naudojamos staklės, atliekančios įvairias operacijas (operacijos bus grafo viršūnės). Atlikus darbą X, staklės turi būti paruoštos naujam darbui. Trukmė, reikalinga staklėms po operacijos X pertvarkyti operacijai Y (arba atvirkščiai), yra viršūnes X ir Y jungiančios briaunos svoris. Reikia sudaryti staklių darbo grafiką, pagal kurį visos operacijos būtų cikliškai atliekamos per trumpiausią laiką.
- **Reikalai mieste.** Turėdami daug reikalų mieste, norime organizuoti kelionę taip, kad nueitume į visas reikalingas vietas optimaliu maršrutu ir grįžtume namo – tai vėl KPU pavyzdys (žr. 19 pratimą).

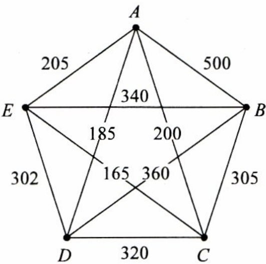
KELIAUJANČIOJO PIRKLIO UŽDAVINIO SPRENDIMAS

Taigi tarkime, kad turime realų uždavinį, ir, atidžiau pažiūrėjus, paaiškėja, kad tai KPU. Kaip jį spręsime? Kitaip sakant, kaip rasti optimalų Hamiltono ciklą?

Pasirodo, kad šis uždavinys yra kur kas sudėtingesnis, negu būtų galima tikėtis. Pradėkime nuo natūralaus bandymų ir klaidų metodo, kurį mokslininkai dažnai vadina **jėgos algoritmu.**

KPU sprendimo jėgos algoritmas

- Surašome visus svorinio grafo Hamiltono ciklus.
- Sudedame kiekvieno Hamiltono ciklo visų briaunų svorius (jų suma vadinama **ciklo svoriu**).
- Iš visų ciklų išrenkame mažiausio svorio ciklą – jis ir yra uždavinio sprendinys.



6.7 pav.

4 pavyzdys. Pritaikykime jėgos algoritmą, spręsdami prekybos agento KPU, kuriuo pradėjome šį skyrių. Skaitytojo patogumui vėl pateikiame 6.1 pav. grafą (6.7 pav.).

Mes jau žinome, kad šis grafas turi 24 Hamiltono ciklus ir kad 12 iš jų atkartoja kitus 12 atvirkščia tvarka (tai padeda mums sutrumpinti skaičiavimus). Kadangi A yra pradinis taškas, mes parašysime visus Hamiltono ciklus, prasidedančius ir besibaigiančius taške A (kito pradžios taško atveju ciklai būtų tie patys, tik užrašyti kita tvarka; pavyzdžiui, jei pradinis taškas būtų D, tai ciklas A, B, C, D, E, A būtų užrašomas kaip ciklas D, E, A, B, C, D). Skaičiavimai parodyti 6.1 lentelėje.

	Hamiltono ciklas	Ciklo svoris	Atvirkščiasis ciklas
1	A, B, C, D, E, A	$500 + 305 + 320 + 302 + 205 = 1632$	A, E, D, C, B, A
2	A, B, C, E, D, A	$500 + 305 + 165 + 302 + 185 = 1457$	A, D, E, C, B, A
3	A, B, D, C, E, A	$500 + 360 + 320 + 165 + 205 = 1550$	A, E, C, D, B, A
4	A, B, D, E, C, A	$500 + 360 + 302 + 165 + 200 = 1527$	A, C, E, D, B, A
5	A, B, E, C, D, A	$500 + 340 + 165 + 320 + 185 = 1510$	A, D, C, E, B, A
6	A, B, E, D, C, A	$500 + 340 + 302 + 320 + 200 = 1662$	A, C, D, E, B, A
7	A, C, B, D, E, A	$200 + 305 + 360 + 302 + 205 = 1372$	A, E, D, B, C, A
8	A, C, B, E, D, A	$200 + 305 + 340 + 302 + 185 = 1332$	A, D, E, B, C, A
9	A, C, D, B, E, A	$200 + 320 + 360 + 340 + 205 = 1425$	A, E, B, D, C, A
10	A, C, E, B, D, A	$200 + 165 + 340 + 360 + 185 = 1250$	A, D, B, E, C, A
11	A, D, B, C, E, A	$185 + 360 + 305 + 165 + 205 = 1220$	A, E, C, B, D, A
12	A, D, C, B, E, A	$185 + 320 + 305 + 340 + 205 = 1355$	A, E, B, C, D, A

6.1 lentelė.

Pažiūrėję į ciklų svorių lentelę, matome, kad 11-tasis ciklas (A, D, B, C, E, A) ir jo antrininkas atvirkščiasis ciklas (A, E, C, B, D, A) turi mažiausią svorį. Radome tai, ko ieškojome: prekybos agento optimalus mršrutas aprašomas Hamiltono ciklu A, D, B, C, E, A (arba atvirkščiu ciklu A, E, C, B, D, A). Optimalaus maršruto išlaidos yra 1220 Lt.

Pabrėžiame, kad, kalbėdami apie KPU sprendinį, turime galvoje ne išlaidas, o ciklą. Kitaip sakant, 4 pavyzdžio sprendinys nėra 1220 Lt (vargu ar agentui bus daug naudos, jei jam pasakysime, kad pigiausio maršruto išlaidos yra 1220 Lt, bet nepasakysime, koks tas maršrutas).

ALGORITMŲ ANALIZĖ

Taigi jau turime bet kokio KPU sprendimo metodą – jėgos algoritmą. Šis algoritmas turi tik vieną trūkumą: pasirodo, jis yra šiek tiek varginantis. Šiaip ar taip, jis reikalauja patikrinti visų grafo Hamiltono ciklų svorius (tiksliau, pusės jų). Aišku, kad kompiuteris tokį patikrinimą gali atlikti kur kas geriau

negu žmogus, nes jėgos algoritmas iš esmės yra mąstymo nereikalaujanti aritmetinė užduotis su trupučiu buhalterijos. Kadangi kompiuteriai yra ne tik tikslūs, bet ir nepaprastai greiti, galime tikėtis, kad, jei kompiuteriui pasiūlysime net gana sudėtingą grafą, kurio dydis yra protingų ribų, tai jis greitai duos atsakymą (sutarkime, kad protingo svorinio grafo dydžio riba yra apie 1000 viršūnių – daugeliui taikymų tai nėra taip daug).

6.2 lentelėje parodytos kai kurios KPU sprendimo kompiuteriu laiko sąnaudos, naudojant jėgos algoritmą. Svarbiausias kintamasis, turintis įtakos sprendinio paieškos laiko sąnaudoms, yra grafo viršūnių skaičius N. Mes pateikiame dviejų skirtingų įsivaizduojamų kompiuterių laiko sąnaudas. Pirmasis kompiuteris yra personalinis kompiuteris, galintis išanalizuoti 10 000 Hamiltono ciklų per sekundę. Antras kompiuteris – tai superkompiuteris, per sekundę išanalizuojantis vieną milijoną Hamiltono ciklų.

6.2 lentelė iliustruoja įdomų reiškinį, vadinamą kombinatoriniu sprogimu. Vaizdžiai sakant, šis reiškinys rodo, kad bet kokios pastangos bandymų ir klaidų metodu išspręsti tokį uždavinį, kaip KPU, anksčiau ar vėliau žlugs mūsų akyse. Spręsdamas tokį, atrodytų, kuklų KPU 100 viršūnių turinčiam

Svorinio grafo viršūnių skaičius N	Hamiltono ciklų skaičius $(N-1)!$	Tikrinamų sprendimo ciklų skaičius $\frac{1}{2}(N-1)!$	Sprendimo laikas pirmu kompiuteriu	Sprendimo laikas antru kompiuteriu
5	24	12	< 1 sek.	< 1 sek.
6	120	60	< 1 sek.	< 1 sek.
7	720	360	< 1 sek.	< 1 sek.
8	5040	2520	< 1 sek.	< 1 sek.
9	40320	20160	2 sek.	< 1 sek.
10	362880	181440	18 sek.	< 1 sek.
11	3628800	1814400	3 min.	< 2 sek.
12	39916800	19958400	33 min.	< 20 sek.
13	≈ 479 milijonai	≈ 239,5 milijono	≈6 val. 39 min.	≈ 4 min.
14	≈ 6,2 milijardo	≈ 3,1 milijardo	≈ 86 val.	≈ 52 min.
15	≈ 87 milijardai	≈ 43,6 milijardo	≈ 50 dienų	≈ 12 val. 6 min.
16	≈ 1,3 trilijono	≈ 654 milijardai	≈ 2 metai	≈ 7 dienos 14 val.
17	≈ 20,9 trilijono	≈ 10,5 trilijono	≈ 33 metai	≈ 121 diena
18	≈ 356 trilijonai	≈ 178 trilijonai	≈ 564 metai	≈ 5,64 metų
19	$\approx 6{,}4 \times 10^{15}$	$\approx 3{,}2 \times 10^{15}$	≈ 10100 metų	≈ 101 metai
20	$\approx 1{,}2 \times 10^{17}$	$\approx 6{,}1 \times 10^{16}$	≈ 193000 metų	≈ 1930 metų
21	$\approx 2{,}4 \times 10^{18}$	$\approx 1{,}2 \times 10^{18}$	≈ 3,85 milijono metų	≈ 38500 metų
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	$\approx 10^{156}$	$\approx 5 \times 10^{155}$	$\approx 1{,}5 \times 10^{144}$ metų	$\approx 1{,}5 \times 10^{142}$ metų

6.2 lentelė.

grafui (t.y. perrinkdamas visus jo Hamiltono ciklus), net antras kompiuteris turėtų skaičiuoti 10^{142} metų. Tai daug daugiau nei mūsų Visatos amžius, kuris naujausiais duomenimis yra apie 20 milijardų (t.y. $2 \cdot 10^{10}$) metų. Tai taip pat reiškia, kad mes negalime puoselėti vilčių, susijusių su elektroninių technologijų ištobulinimu – jos mūsų neišgelbės. Tarkime, kad turime fantastinį kompiuterį, galintį skaičiuoti trilijoną kartų (t.y. 10^{12} kartų) greičiau už antrą kompiuterį. Tokiam technologijos stebuklui reikėtų 10^{130} metų (tai – amžinybė arba dvi) visiems 100 viršūnių grafo Hamiltono ciklams patikrinti.

Apibendrinant galima pasakyti, kad jėgos algoritmas praktiškai pritaikomas labai ribotai. Tipiškam dešimties viršūnių grafui šis algoritmas jau nebepritaikomas. Žinoma, tai nėra būdinga visiems algoritmams. Flerio algoritmas, nagrinėtas 5 skyriuje, yra nepaprastai naudingas algoritmas. Net jei grafo viršūnių ir briaunų skaičius yra didelis, šiuo algoritmu galima rasti sprendinį per visai priimtiną laiką.

Detaliai neaiškinsime, ką reiškia pasakymai „priimtinas laikas“ ar „grafo viršūnių skaičius yra didelis“. Tai nuvestų mus į nepaprastai įdomią, tačiau sudėtingą matematikos ir informatikos sritį, kurioje nagrinėjami algoritmų vykdymo klausimai. Mes apsiribosime nors ir labai supaprastintu, bet naudingu algoritmų skirstymu į du tipus: *geri* algoritmai (kuriuos vadinsime **efektyviaisiais** algoritmais) ir *blogi* algoritmai (kuriuos vadinsime **neefektyviaisiais** algoritmais). Mes jau susidūrėme su abiem tipais: Oilerio ciklo radimo Flerio algoritmas yra efektyvusis algoritmas; jėgos KPU sprendimo algoritmas yra neefektyvusis algoritmas.

Efektyviųjų ir neefektyviųjų algoritmų skyrimo teorinis pagrindas yra santykis tarp grafo dydžio (viršūnių ar briaunų skaičiaus) ir žingsnių, reikalingų algoritmui įvykdyti, skaičiaus. Jei žingsnių skaičius pasidaro neproporcingai didesnis už grafo dydį, turime neefektyvųjį algoritmą. Pavyzdžiui, turint pilnąjį svorinį 11 viršūnių grafą, jėgos algoritmas turi patikrinti $10!/2$ Hamiltono ciklų. Jei padidinsime viršūnių skaičių iki 22, tai jėgos algoritmas turės patikrinti $21!/2$ Hamiltono ciklų. Bėda ta, kad skaičius $21!/2$ yra 100 milijardų kartų didesnis už $10!/2$ (žr. 28 pratimą). Taigi, nors uždavinio dydis tik padvigubėjo, sprendimui reikalingų žingsnių skaičius išaugo 100 milijardų kartų. Tokie „sprogimai“ būdingi neefektyviesiems algoritmams.

Apytikriai algoritmai

Dabar suprantama, kodėl mes norėtume turėti tokį efektyvųjį algoritmą (priešingai jėgos algoritmui), kuris bet kokiame svoriniame grafe padėtų rasti optimalų Hamiltono ciklą. Deja, toks algoritmas dar nėra žinomas. Tai gali reikšti viena iš dviejų: 1) toks algoritmas kažkur čia pat, tačiau dar nepasitaikė pakankamai protingo žmogaus, galinčio jį atrasti; 2) toks algoritmas iš viso negalimas (prisimenate tobulus rinkimų metodus?).

Matematikai dar nepajėgė nustatyti, dėl kurios iš šių dviejų priežasčių KPU sprendimo algoritmas, kuris būtų ir optimalus, ir efektyvus, iki šiol nėra atrastas. Ši dilema priskirtina prie pačių svarbiausių (ir žymiausių) šiuolaikinės matematikos neišspręstų problemų (plačiau kalbėti apie tai čia būtų per daug sudėtinga). Dauguma specialistų linkę manyti, kad efektyvus KPU optimalaus sprendimo algoritmas matematiškai iš viso yra neįmanomas. Tačiau jei toks algoritmas kada nors būtų atrastas, jo atradėjas užsitikrintų didžiulę šlovę ir sėkmę.

Taigi esame keblioje padėtyje: pramonėje dažnai svarbu išspręsti KPU grafams, turintiems šimtus ir tūkstančius viršūnių, ir tai reikia padaryti per priimtiną laiką (paprastai viršininkas nori gauti atsakymą tuoj pat ar bent jau iki mėnesio pabaigos). Kadangi jėgos algoritmas atkrenta ir neturime efektyvaus algoritmo, garantuojančio optimalų sprendinį, tai protinga būtų šiek tiek atsitraukti: nereikalaukime, kad algoritmas duotų geriausią sprendinį, ir pasitenkinkime geru, tegu ir ne optimaliu, sprendiniu. Mainais tikimės greito rezultato. Kitaip tariant, sprendžiant tiek KPU, tiek daugelį kitų vadybos uždavinių, šiandien dažnai užtenka turėti efektyvų *apytikrį algoritmą*.

Apytikrio algoritmo terminą vartosime, kalbėdami apie algoritmą, dažniausiai duodantį sprendinį, pakankamai artimą optimaliam sprendiniui. Skamba neblogai, tačiau ką reiškia „dažniausiai“? O ką reiškia „pakankamai artimas“? Deja, tikslus atsakymas į šiuos klausimus vėl nuvestų mus toli už šios knygos ribų*. Teks susitaikyti su tuo, kad, analizuodami algoritmus, vietoje tikslių apibrėžimų dažniausiai remsimės sveika nuovoka ir vaizdumu.

Iš esmės yra du faktoriai, kuriuos reikia turėti galvoje, vertinant apytikrį algoritmą: jo *blogiausią* rezultatą ir jo *tipišką* rezultatą. Labai dažnai šiuos du dalykus sunku suderinti. Ką galima pasakyti apie apytikrį algoritmą, garantuojantį sprendinį, kuris nuo optimalaus sprendinio skiriasi ne daugiau kaip 20%? Ar toks apytikris algoritmas priimtinas? O ką galima pasakyti apie algoritmą, kuris apie 95% atvejų duoda sprendinius, kurie skiriasi mažiau kaip 2% nuo optimalių sprendinių, bet retkarčiais tas neatitikimas gali būti 200% arba didesnis? Ar toks algoritmas būtų priimtinas? Kuris iš jų geresnis – pirmasis ar antrasis? (Kuris vaikas geresnis – ar tas, kuris niekada nebuvo angelas, bet niekada nepasielgs bjauriai, ar tas, kuris šiaip yra nuostabus, bet retkarčiais iškrečia siaubingą kiaulystę?) Tai – klausimai, neturintys aiškaus atsakymo.

Likusioje skyriaus dalyje panagrinėsime du efektyvius apytikrius KPU sprendimo algoritmus: *artimiausiojo kaimyno algoritmą* ir *pigiausiosios jungties algoritmą*.

* Pastebėsime, kad šiame kontekste žodis *sprendinys* jau nebereiškia *geriausio atsakymo*, bet tik *atsakymą*.

ARTIMIAUSIOJO KAIMYNO ALGORITMAS

Artimiausiojo kaimyno algoritmą beveik visiškai apibūdina jo pavadinimas. Štai kaip atrodytų artimiausiojo kaimyno algoritmas, išdėstytas (kiek padailintu) instrukcijų sąrašu, kuriuo galėtų naudotis įsivaizduojamas pirklys:

Artimiausiojo kaimyno algoritmas

- Kelionę pradėk iš namų (įsitikink, ar tikrai įsidėjai dantų šepetuką ir piniginę).
- Kad ir kuriame mieste būtum, kitą dar neaplankytą miestą rinkis tą, į kurį nuvykti pigiausia (t.y. artimiausią kaimyną). Jei tokių artimiausių miestų (iki kurių atstumai vienodi) yra keli, rinkis bet kurį. Taip elkis, kol aplankysi visus miestus.
- Iš paskutinio miesto grįžk namo.

5 pavyzdys. Pritaikykime artimiausiojo kaimyno algoritmą mūsų pirmajam KPU. Prekybos agentas turėtų keliauti taip: jis pradeda iš taško A (namai). Iš A pigiausia (trumpiausia) kelionė yra į D, todėl jis vyksta ten. Iš D pigiausiai galima nuvykti (išskyrus A) į E. Iš E pigiausia kelionė – į C. Iš C pigiausiai pasiekiamas kitas miestas yra B (prekybos agentas neketina grįžti nei į E, nei į A!). Miestas B yra paskutinis iš visų aplankytinų miestų, todėl jis grįžta atgal į A. Taigi artimiausiojo kaimyno algoritmas duoda Hamiltono ciklą A, D, E, C, B, A, kurio išlaidos (svoris) – 1457 Lt.

Palyginę šį algoritmą (ir juo gautą atsakymą) su jėgos algoritmu (ir jo atsakymu), pastebėsime du dalykus:

1. Hamiltono ciklas, gautas artimiausiojo kaimyno algoritmu, yra brangesnis už optimalų sprendinį (1457 Lt vietoje 1220 Lt). Žinodami optimalaus sprendinio kainą (1220 Lt), galime apskaičiuoti *santykinę paklaidą*: $(1457 - 1220)/1220 = 237/1220 \approx 0{,}194$, kuri rodo, kad rastasis sprendinys skiriasi nuo optimalaus sprendinio apie 19,4%.
2. Kaip atpildą už tai, kad esame pasirengę mokėti baudą už neoptimalų sprendimą, turime lengvai suprantamą ir greitai atliekamą algoritmą.

Norėdami pabrėžti šitą faktą, siūlome skaitytojui atlikti 38 pratimą, kuriame reikia sudaryti 21 miesto apvažiavimo maršrutą. Iš 6.2 lentelės paskutinio stulpelio matome, kad net greičiausi kompiuteriai jėgos algoritmu šį uždavinį spręstų šimtus metų. Bet kuris moksleivis artimiausiojo kaimyno algoritmu ras apytikslį sprendinį per 15–20 minučių.

Pradinės viršūnės pakeitimas

Dar kartą grįžkime prie artimiausiojo kaimyno algoritmo – pakalbėkime apie pradinės viršūnės pasirinkimą. Tarkime, kad 5 pavyzdyje vietoje A pradiniu tašku pasirenkame D. Skaitytojas lengvai patikrins (žr. 11 pratimą), kad dabar artimiausiojo kaimyno algoritmu gautas sprendinys yra D, A, C, E, B, D, ir jis kainuoja 1250 Lt. Tai gerokai pigiau už anksčiau gautą sprendinį, kai pradiniu tašku ėmėme A. Jei pradiniu tašku artimiausio kaimyno algoritme pasirinktume B, gautume dar geresnį sprendinį: B, C, E, A, D, B, kurio kaina – tik 1220 Lt (žr. 12 pratimą).

Kritiškas skaitytojas teisėtai gali visa tai palaikyti tuščiais samprotavimais – juk negalime pasirinkti pradiniu tašku D arba B, nes prekybos agentas gyvena mieste A ir kelionę turi pradėti iš jo. Kitas keliautojas, gyvenantis mieste D, galėtų (taikydamas artimiausiojo kaimyno algoritmą) keliauti geresniu maršrutu D, A, C, E, B, D; dar laimingesnis keliautojas, gyvenantis mieste B, keliaus maršrutu B, C, E, A, D, B, kurio kaina – 1220 Lt – yra pati mažiausia iš visų galimų. Tačiau prekybos agentas gali samprotauti ir taip: kodėl gi aš negalėčiau pradėti kelionės taške A ir toliau keliauti vienu iš šių geresnių maršrutų? Kitaip tariant, ciklą D, A, C, E, B, D galima apeiti tokia tvarka: A, C, E, B, D, A (mes tik pradedame kitame taške). Lygiai taip pat ciklą B, C, E, A, D, B galima apeiti tokia tvarka: A, D, B, C, E, A. Ciklas (žinoma, ir jo kaina) faktiškai nesikeičia dėl to, kad jis pradedamas iš kito taško!

Taigi artimiausiojo kaimyno algoritmą galima pradėti nuo bet kurios grafo viršūnės (nebūtinai iš „namų" viršūnės), o gautą Hamiltono ciklą po to galima perrašyti taip, kad pradinis taškas būtų namų viršūnėje. Taip gauname geresnę strategiją, kurią vadinsime **kartotiniu artimiausiojo kaimyno algoritmu.**

Kartotinis artimiausiojo kaimyno algoritmas

1 žingsnis. Pasirink bet kokią viršūnę ir taikyk artimiausiojo kaimyno algoritmą su pradiniu tašku pasirinktoje viršūnėje.

2 žingsnis. Pakartok 1 žingsnį su visomis grafo viršūnėmis.

3 žingsnis. Iš visų 2 žingsnyje gautų Hamiltono ciklų išrink geriausią (mažiausios kainos ar mažiausio svorio) sprendinį.

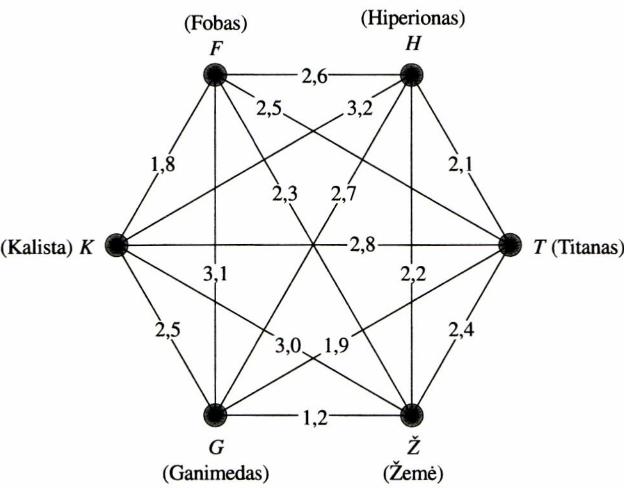
4 žingsnis. Perrašyk 3 žingsnyje gautą sprendinį, pradiniu tašku imdamas namų viršūnę.

Visa tai pailiustruosime pavyzdžiu.

---

6 pavyzdys. 2020-ieji metai. Iš Žemės paleistas kosminis zondas turi aplankyti Saulės sistemos planetų palydovus, išvardytus 6.8 pav., ir, pririnkęs

uolienų pavyzdžių, su visu turtu grįžti į Žemę. Svorinis grafas rodo kelionės tarp bet kurių dviejų kosminių objektų trukmę (metais).



6.8 pav.

Mes norime rasti 6.8 pav. parodyto svorinio grafo Hamiltono ciklą, taikydami kartotinį artimiausiojo kaimyno algoritmą. 6.3 lentelėje pateikti kiekvieną pradinį tašką atitinkantys ciklai, gauti artimiausiojo kaimyno algoritmu, taip pat jų bendri svoriai. Skaitytojui paliekame pačiam patikrinti detales.

Ciklo Nr.	Pradžios taškas	Ciklas, gautas artimiausiojo kaimyno algoritmu	Kelionės trukmė (metais)
1	Žemė	*Ž, G, T, H, P, K, Ž*	12,6
2	Fobas	*F, K, G, Ž, H, T, F*	12,3
3	Hiperionas	*P, T, G, Ž, F, K, H*	12,5
4	Titanas	*T, G, Ž, H, F, K, T*	12,5
5	Kalista	*K, F, Ž, G, T, H, K*	12,5
6	Ganimedas	*G, Ž, H, T, F, K, G*	12,3

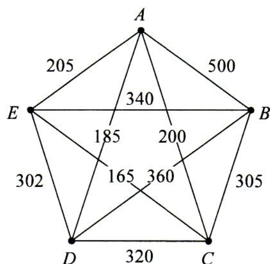
6.3 lentelė.

Iš visų 6.3 lentelės ciklų, 2 ir 6 ciklai (faktiškai sutampantys, tik prasidedantys skirtingose viršūnėse) turi geriausią 12,3 metų trukmės sprendinį. Savaime suprantama, kad kelionės negalime pradėti nei Fobe, nei Ganimede – tikroji kelionė aprašoma sprendiniu *Ž, H, T, F, K, G, Ž.* Beje, šį sykį kartotinis artimiausiojo kaimyno algoritmas visiškai atsitiktinai davė mums optimalų sprendinį – bendru atveju to tikėtis negalima.

PIGIAUSIOSIOS JUNGTIES ALGORITMAS

Nagrinėdami kartotinio artimiausiojo kaimyno algoritmą, patyrėme, kad tvarka, kuria sudaromas Hamiltono ciklas, ir tvarka, kuria vyksta reali kelionė, nebūtinai sutampa. Faktiškai mes galime sudaryti Hamiltono ciklą po vieną briauną kiekviename žingsnyje, visai nereikalaudami, kad tos briaunos eitų nuosekliai. Norėdami galime pirma pasičiupti vieną briauną vienur, kitą – kitur, po to dar vieną – dar kur nors. Iš pirmo žvilgsnio tai gali atrodyti gana chaotiškai, tačiau dėl to neverta sielotis, jei tik galų gale visos briaunos susieina ir sudaro Hamiltono ciklą. Panašią strategiją dažnai taikome spręsdami didelius kryžiažodžius.

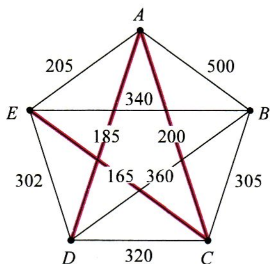
Vadinamasis **pigiausiosios jungties algoritmas** kaip tik ir remiasi tokia strategija. Mes peržiūrime grafą ir pažymime pigiausią briauną nepriklausomai nuo jos vietos. Po to, vėl peržiūrėję grafą, pažymime kitą pigiausią briauną. Taip tęsiame, kiekvieną kartą imdami vis kitą pigiausią briauną. Kartu atidžiai stebime, kad nesusidarytų nepilnas ciklas (neapimantis visų viršūnių) ir kad trys briaunos neišeitų iš tos pačios viršūnės (bent vienos iš šių sąlygų pažeidimas neleistų gauti Hamiltono ciklo iš pažymėtų viršūnių).



6.9 pav.

7 pavyzdys. Atidėję tikslesnį pigiausiosios jungties algoritmo formulavimą vėlesniam laikui, pritaikykime jį prekybos agento uždaviniui.

Pigiausia briauna, kurią matome 6.9 pav. grafe, yra 165 Lt vertės briauna EC. Čiumpame ją! Patogumo dėlei ją pažymime raudonai. Kita pigiausia briauna yra 185 Lt vertės briauna DA. Taip pat imame! Dabar pigiausia briauna yra AC – jos svoris 200 Lt. Ji taip pat tinka, ją pažymime raudonai. Iki šiol viskas gerai! 6.10 pav. matome padėtį šiuo metu.



6.10 pav.

Pigiausia briauna iš nepažymėtų yra EA – 205 Lt, tačiau jos negalime imti – ji uždarytų mažą ciklą E, A, C, E, o tai neleistina! Kad neužmirštume, jog briauna EA jau patikrinta ir atmesta, ištrinkime arba išbraukime ją. Dabar pigiausia briauna iš likusių yra ED, tačiau ji taip pat netinka, nes sukuria ciklą E, D, A, C, E. Briauną ED ištriname ir bandome BC – tai pigiausia briauna, kurios vertė yra 305 Lt. Jei pasirinktume BC ir pažymėtume ją raudonai, iš viršūnės C išeitų trys skirtingos briaunos, o taip Hamiltono cikle būti negali. Tad BC taip pat netinka. Toliau bandome 320 Lt vertės briauną DC, tačiau ir jos tenka atsisakyti, nes ji uždaro ciklą D, C, A, D. Toliau bandome briauną EB, kuri (pagaliau!) tinka – ją pažymime raudonai. Paskutinė pasirenkama briauna BD, kuri ir užbaigia Hamiltono ciklą. Dabar galime parašyti sprendinį, imdami bet kurią pradinę viršūnę. Prekybos agentui reikalingas Hamiltono ciklas yra A, D, B, E, C, A (arba A, C, E, B, D, A), kainuojantis 1250 Lt.

Tiksliai pigiausiosios jungties algoritmas gali būti suformuluotas taip:

Pigiausiosios jungties algoritmas

1 žingsnis. Pirmiausia imk mažiausio svorio briauną (jei tokių yra daugiau nei viena, rinkis bet kurią). Pažymėk šią briauną.

2 žingsnis. Imk kitą pigiausią nepažymėtą briauną ir pažymėk ją, išskyrus atvejus, kai
a) ji uždaro mažesnį ciklą;
b) ji yra trečia pažymėta briauna, išeinanti iš vienos viršūnės.
Jei tokių briaunų yra daugiau nei viena, rinkis bet kurią.

3, 4, ... žingsniai. Kartok 2 žingsnį, kol susidarys visas Hamiltono ciklas.

8 pavyzdys. Taikant pigiausiosios jungties algoritmą 6 pavyzdžio kosminio zondo Hamiltono ciklui rasti (6.8 pav.), žingsnių seka būtų tokia:

- **1 žingsnis.** Imame (ir pažymime) briauną $G\check{Z}$ (1,2 metai). Tai – pigiausia grafo briauna.
- **2 žingsnis.** Imame briauną KF (1,8 metų).
- **3 žingsnis.** Imame briauną GT (1,9 metų).
- **4 žingsnis.** Imame briauną HT (2,1 metų).
- **5 žingsnis.** Dabar pigiausia briauna yra $\check{Z}H$ (2,2 metų), tačiau jos negalima imti (užbaigia ciklą). Imame kitą – $\check{Z}H$ (2,3 metų).
- **6 žingsnis.** Liko vienintelė briauna KH (3,2 metų), kuri ir užbaigia Hamiltono ciklą.

Gavome Hamiltono ciklą $\check{Z}$, F, K, H, T, G, $\check{Z}$. Jo svoris – 12,5 metų.

IŠVADOS

Artimiausiojo kaimyno ir pigiausiosios jungties algoritmai yra du labai supaprastinti mėginimai išspręsti nepaprastai sunkų uždavinį (dažnai vadinamą *keliaujančiojo pirklio uždaviniu*) – rasti pilnojo svorinio grafo optimalų Hamiltono ciklą. Abu algoritmai remiasi tuo, ką galima būtų pavadinti *šykštuolio strategija*: eiti ten, kur šiuo metu pigiausia, nesirūpinant tolimesnėmis pasekmėmis (tokie algoritmai paprastai vadinami *šykščiaisiais algoritmais*). Gera linkintys žmonės mums galėtų priminti, kad šykštumas galiausiai prie gero nepriveda, ir išties galima sugalvoti tokių pavyzdžių, kuriuose artimiausiojo kaimyno arba pigiausiosios jungties algoritmas duos vos ne patį blogiausią Hamiltono ciklą (žr. 31 ir 32 pratimus). Artimiausiojo kaimyno ir pigiausiosios jungties algoritmų privalumas – jie lengvai suprantami, paprastai atliekami ir daugumai tipiškų uždavinių duoda apytikrį sprendinį su priimtinomis paklaidomis.

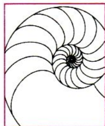
Yra žinoma daug kitų, įmantresnių keliaujančiojo pirklio uždavinio sprendimo apytikrių algoritmų. Dažniausiai (priešingai artimiausiojo kaimyno ir pigiausiosios jungties algoritmams) jie garantuoja tam tikrą tikslumą (t.y. gauto apytikrio sprendinio paklaida ne didesnė už iš anksto nurodytą). Vienas toks algoritmas pateiktas 35 pratime. Šiuo metu geriausias iš žinomų algoritmų duoda apytikrį sprendinį, kuris skiriasi nuo 100 000 viršūnių KPU optimalaus sprendinio ne daugiau kaip 1%, o nuo 1 milijono viršūnių KPU optimalaus sprendinio – ne daugiau kaip 3,5% (žr. 6.4 lentelę). Nuolatiniai šių algoritmų pagerinimai ir technologijos tobulėjimas rodo, kad sprendinių tikslumas ateityje dar didės.

KPU dydis	Optimalus sprendinys?	Apytikrio sprendinio paklaida $\leqslant 3{,}5\%$	Apytikrio sprendinio paklaida $\leqslant 1\%$	Apytikrio sprendinio paklaida $\leqslant 0{,}75\%$
Apie 3000 viršūnių	TAIP Skaičiavimo laikas: < 1 sav.	TAIP Skaičiavimo laikas: kelios sek.	TAIP Skaičiavimo laikas: kelios min.	TAIP Skaičiavimo laikas: < 1 val.
Apie 100 000 viršūnių	NE	TAIP Skaičiavimo laikas: kelios min.	TAIP Skaičiavimo laikas: < 2 d.	TAIP Skaičiavimo laikas: apie 7 mėn.
Apie 1 milijoną viršūnių	NE	TAIP Skaičiavimo laikas: < 3 val.	NE Skaičiavimo laikas: šimtai metų	NE Skaičiavimo laikas: milijonai metų

6.4 lentelė. KPU sprendimo šiuolaikinė būklė. Skaičiavimo trukmė pateikta, remiantis superkompiuterio (arba kelių šimtų mažų kompiuterių, dirbančių lygiagrečiai) skaičiavimo greičiu.

Šiuo metu lieka neišspręstas pagrindinis klausimas: ar egzistuoja efektyvus KPU sprendimo algoritmas, visada duodantis optimalų maršrutą, ar toks algoritmas matematiškai negalimas? Šis uždavinys vis dar laukia naujojo Oilerio.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

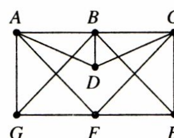


apytikris algoritmas
artimiausiojo kaimyno algoritmas
Dirako teorema
efektyvusis algoritmas
faktorialas
Hamiltono ciklas
jėgos algoritmas
kartotinis artimiausiojo kaimyno algoritmas
keliaujančiojo pirklio uždavinys
neefektyvusis algoritmas
optimalusis maršrutas
pigiausiosios jungties algoritmas
pilnasis grafas
santykinė paklaida
svoriai
svorinis grafas

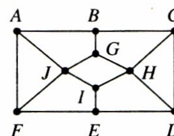
PRATIMAI

Apšilimas

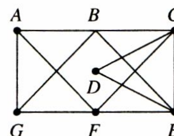
1. Žemiau parodytas grafas turi tokius Hamiltono ciklus:
A, B, D, C, E, F, G, A;
A, D, C, E, B, G, F, A.
Raskite dar du (kurie nėra atvirkštiniai šiems). Pradinį tašką imkite A.



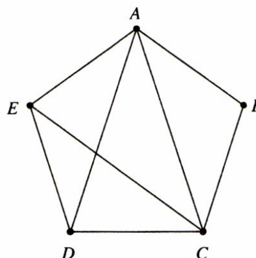
2. Raskite du žemiau parodyto grafo Hamiltono ciklus.



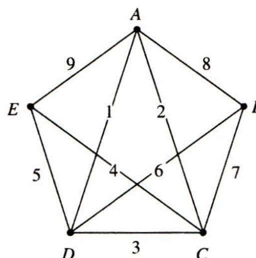
3. Surašykite visus žemiau parodyto grafo Hamiltono ciklus.



4. Surašykite visus žemiau parodyto grafo Hamiltono ciklus.

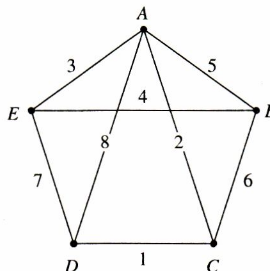


5. Nagrinėkime žemiau parodytą svorinį grafą.



a) Raskite briaunos BD svorį.
b) Raskite briaunos EC svorį.
c) Raskite grafo Hamiltono ciklą ir apskaičiuokite jo svorį.
d) Raskite kitą grafo Hamiltono ciklą ir apskaičiuokite jo svorį.

6. Nagrinėkime žemiau parodytą svorinį grafą.

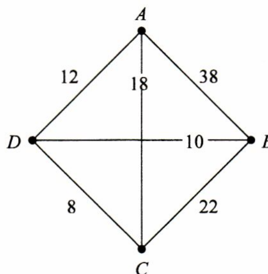


a) Raskite briaunos AD svorį.
b) Raskite briaunos AC svorį.
c) Raskite grafo Hamiltono ciklą ir apskaičiuokite jo svorį.
d) Raskite kitą grafo Hamiltono ciklą ir apskaičiuokite jo svorį.

7. a) Duota, kad $5! = 120$. Be skaičiuoklio raskite $6!$.
b) $10! = 3\,628\,800$. Be skaičiuoklio raskite $9!$.
c) Kiek skirtingų Hamiltono ciklų yra pilnajame 10 viršūnių grafe?

8. a) Duota, kad $7! = 5040$. Be skaičiuoklio raskite $8!$.
b) Kiek skirtingų Hamiltono ciklų yra pilnajame 9 viršūnių grafe?

9. Nagrinėkime tokį svorinį grafą.

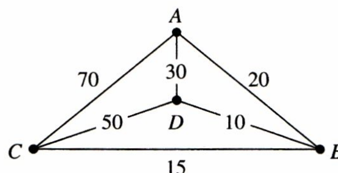


a) Jėgos algoritmu raskite optimalų Hamiltono ciklą.
b) Artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą, prasidedantį viršūnėje A.
c) Pigiausiosios jungties algoritmu raskite Hamiltono ciklą.
d) Palyginkite optimalų sprendinį, gautą punkte a), su Hamiltono ciklais, gautais punktuose b) ir c). Apskaičiuokite abiejų sprendinių santykinę

paklaidą naudodamiesi formule:

$$\text{santykinė paklaida} = \frac{(\text{apytikrio sprendinio kaina}) - (\text{optimalaus sprendinio kaina})}{\text{optimalaus sprendinio kaina}}.$$

10. Nagrinėkime tokį svorinį grafą.



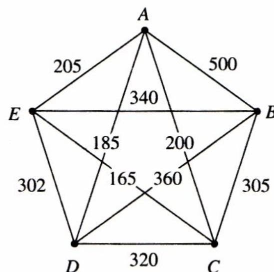
a) Jėgos algoritmu raskite optimalų Hamiltono ciklą.

b) Artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą, prasidedantį viršūnėje A.

c) Pigiausiosios jungties algoritmu raskite Hamiltono ciklą.

d) Palyginkite optimalų sprendinį, gautą punkte a), su Hamiltono ciklais, gautais punktuose b) ir c). Apskaičiuokite abiejų sprendinių santykinę paklaidą.

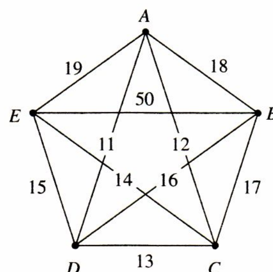
11–12 *pratimuose kalbama apie šį svorinį grafą.*



11. Artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą, prasidedantį viršūnėje D.

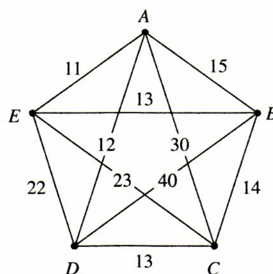
12. Artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą, prasidedantį viršūnėje B.

13. a) Pigiausiosios jungties algoritmu raskite žemiau parodyto svorinio grafo Hamiltono ciklą.



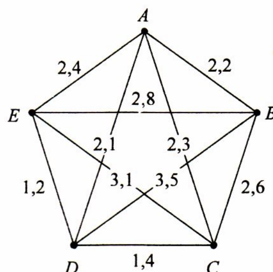
b) Ar yra pigesnių Hamiltono ciklų? Jei taip, tai raskite vieną. Jei ne – paaiškinkite kodėl.

14. a) Pigiausiosios jungties algoritmu raskite žemiau parodyto svorinio grafo Hamiltono ciklą.

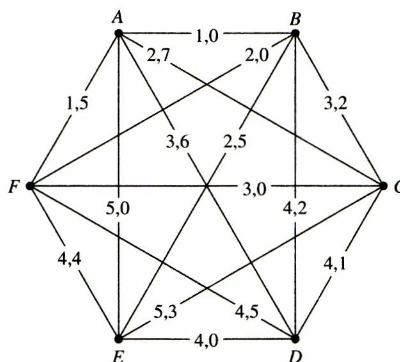


b) Ar yra pigesnių Hamiltono ciklų? Jei taip, raskite vieną. Jei ne – paaiškinkite kodėl.

15. Kartotiniu artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite žemiau parodyto svorinio grafo Hamiltono ciklą.



16–18 *pratimuose kalbama apie šį svorinį grafą.*

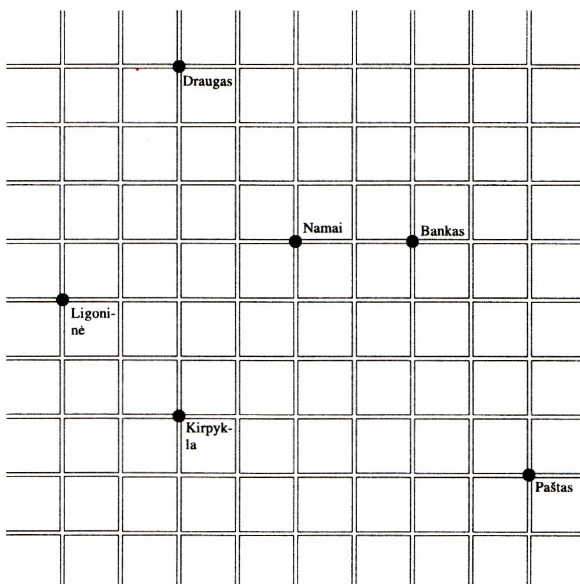


16. Pigiausiosios jungties algoritmu raskite Hamiltono ciklą.

17. Artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą, prasidedantį taške A.

18. Kartotiniu artimiausiojo kaimyno algoritmu raskite Hamiltono ciklą.

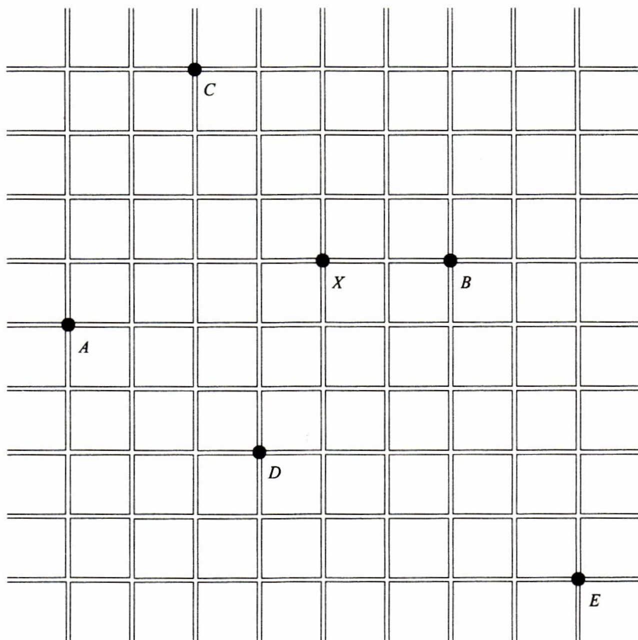
19. Šiandien jums reikia atlikti daug darbų. Reikia nueiti į paštą, pasiimti pinigų banke, užbėgti pas draugę vadovėlio, aplankyti pažįstamą ligoninėje ir apsikirpti kirpykloje (eilės tvarka nesvarbu). Kelionę reikia pradėti ir baigti namie. Visų schemoje parodytų gatvių ilgiai lygūs 1 kilometrui.



a) Nubraižykite šio uždavinio svorinį grafą.

b) Raskite optimalų (trumpiausią) reikalų sutvarkymo kelią (taikykite bet kokį, jūsų manymu, tinkamą algoritmą).

20. Gėlininkė turi pristatyti gėles į penkias vietas A, B, C, D ir E, parodytas schemoje. Maršrutas turi prasidėti ir baigtis gėlių parduotuvėje (viršūnė X). Visų schemoje parodytų gatvių ilgiai – 1 km.

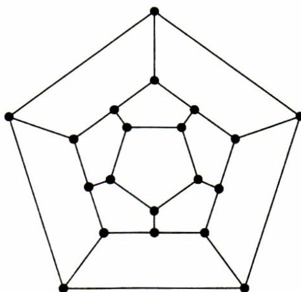


a) Nubraižykite šio uždavinio svorinį grafą.

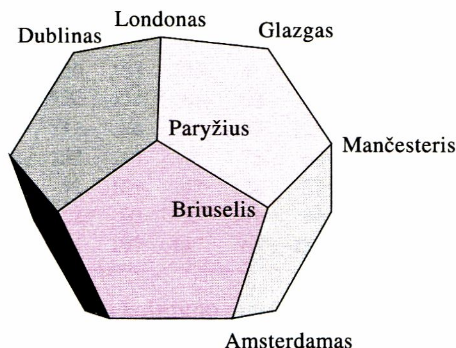
b) Raskite optimalų (trumpiausią) maršrutą (taikykite bet kokį, jūsų manymu, tinkamą algoritmą).

Treniruotė

21. Hamiltono galvosūkis. Žemiau parodytame grafe raskite Hamiltono ciklą. Gautą ciklą pažymėkite tiesiog grafe.

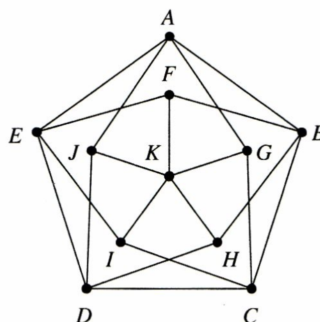


Istorinė pastaba. Hamiltonas sugalvojo žaidimą – trimatį šio pratimo variantą. Jame naudojamasi taisyklinguoju dodekaedru, kurio viršūnėse surašyti miestų vardai (žr. paveikslėlį).

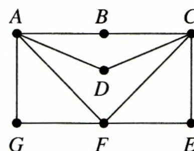


Žaidimo tikslas – atlikti „kelionę aplink pasaulį“, einant iš miesto į miestą dodekaedro briaunomis ir negrįžtant į jokį miestą (išskyrus pradinį tašką). „Suploję“ dodekaedrą, gautume šio pratimo grafą.

22. Žemiau parodytame grafe raskite Hamiltono ciklą.

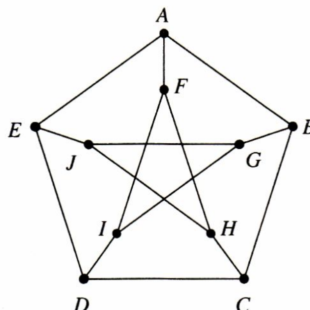


23. Paaiškinkite, kodėl žemiau parodytame grafe nėra Hamiltono ciklų.

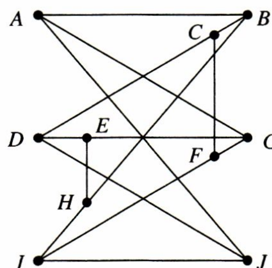


24–25 pratimai susiję su Hamiltono kelio sąvoka. Tai kelias, kuris eina per kiekvieną grafo viršūnę lygiai po vieną kartą ir nebūtinai grįžta į pradinę viršūnę.

24. Peterseno grafas. Žemiau parodytas grafas vadinamas Peterseno grafu. Raskite jame Hamiltono kelią.



25. Raskite Hamiltono kelią žemiau parodytame grafe.



26. a) Pateikite keturių viršūnių grafo pavyzdį, kuriame tas pats ciklas gali būti ir Oilerio ciklas, ir Hamiltono ciklas.

b) Pateikite N viršūnių grafo pavyzdį, kuriame tas pats ciklas gali būti ir Oilerio ciklas, ir Hamiltono ciklas.

27. a) Palyginkite 2^3 ir $3!$. Kuris skaičius didesnis?

b) Palyginkite 2^4 ir $4!$. Kuris skaičius didesnis?

c) Tarkime, kad N yra didesnis už 5. Jei galėtumėte pasirinkti tarp 2^N ir $N!$ litų, ką rinktumėtės? Paaiškinkite, kodėl suma, kurią Jūs pasirinkote, yra didesnis skaičius.

28. Paaiškinkite, kodėl $21!$ yra 100 milijardų kartų daugiau už $10!$ (t.y. įrodykite, kad $21! > 10^{11} \cdot 10!$).

29 *ir* 30 *pratimuose nagrinėjama tokia situacija. Draudimo agento teritoriją sudaro* 11 *miestų, atstumai* (*kilometrais*) *tarp kurių parodyti lentelėje. Jis turi taip suplanuoti savo kelionę, kad ji prasidėtų ir baigtųsi Vilniuje* (*čia jis gyvena*) *ir eitų per kiekvieną iš* 10 *miestų lygiai po vieną kartą.*

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	Vilnius	*	110	114	62	49	53	88	29	75	97	83
2	Anykščiai	110	*	105	46	156	73	111	132	41	52	194
3	Ignalina	114	105	*	58	163	117	26	143	105	63	197
4	Molėtai	62	46	58	*	120	64	64	91	47	35	145
5	Šalčininkai	49	156	163	120	*	102	137	78	124	146	65
6	Širvintos	53	73	117	64	102	*	123	64	32	94	131
7	Švenčionys	88	111	26	64	137	123	*	117	111	69	171
8	Trakai	29	132	143	91	78	64	117	*	86	126	67
9	Ukmergė	75	41	105	47	124	32	111	86	*	72	153
10	Utena	97	52	63	35	146	94	69	126	72	*	180
11	Varėna	83	194	197	145	65	131	171	67	153	180	*

29. Taikydami artimiausiojo kaimyno algoritmą, raskite Hamiltono ciklą. Pabandykite pritaikyti algoritmą, naudodamiesi duomenimis iš lentelės.

30. Taikydami pigiausiosios jungties algoritmą, raskite Hamiltono ciklą. Pabandykite pritaikyti algoritmą, naudodamiesi duomenimis tiesiai iš lentelės (nors gal ir neišsiversite be brėžinio, tikrindami, ar ciklas neužbaigiamas per anksti).

Varžybos

31. Paaiškinkite, kodėl Peterseno grafas neturi Hamiltono ciklo (žr. 24 pratimą).

32. Sugalvokite pilnojo svorinio grafo pavyzdį, kuriame Hamiltono ciklas, gautas artimiausiojo kaimyno algoritmu (pradinę viršūnę galite pasirinkti), būtų blogiausias iš visų galimų ciklų (kitaip sakant, jo svoris būtų didesnis už bet kurio kito ciklo svorį).

33. Sugalvokite pilnojo svorinio grafo pavyzdį, kuriame Hamiltono ciklas, gautas pigiausiosios jungties algoritmu, būtų blogiausias iš visų galimų ciklų.

34. Sugalvokite pilnojo svorinio grafo pavyzdį, kuriame Hamiltono ciklas, gautas artimiausiojo kaimyno algoritmu (pradinę viršūnę galite pasirinkti), turėtų santykinę paklaidą, ne mažesnę kaip 100% (kitaip sakant, Hamiltono ciklo, gauto artimiausiojo kaimyno algoritmu, svoris būtų bent du kartus didesnis už optimalaus Hamiltono ciklo svorį).

35. Sugalvokite pilnojo svorinio grafo pavyzdį, kuriame Hamiltono ciklas, gautas pigiausiosios jungties algoritmu (pradinę viršūnę galite pasirinkti), turėtų santykinę paklaidą, ne mažesnę kaip 100% (kitaip sakant, Hamiltono ciklo, gauto pigiausiosios jungties algoritmu, svoris būtų bent du kartus didesnis už optimalaus Hamiltono ciklo svorį).

36. Žirgas stovi 3×4 „šachmatų lentos" viršutiniame kairiajame kampe A.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L

a) Nubraižykite grafą, kurio viršūnės būtų lentos laukeliai, o briaunos – leistini žirgo ėjimai, t.y. briauna, jungianti X ir Y, reiškia, kad šachmatų žirgo ėjimu galima patekti iš laukelio X į laukelį Y (ir atvirkščiai). (Žirgas eina per du langelius į priekį ir vieną į šoną; šiame pratime pirmas ėjimas galėtų būti iš A į G arba iš A į J.)

b) Punkte a) gautam grafui raskite Hamiltono kelią, prasidedantį laukelyje A, t.y. parodykite, kaip šokinėti žirgui, kad jis, pradėjęs iš laukelio A, apeitų visus lentos laukelius lygiai po vieną kartą.

c) Parodykite, kad punkto a) grafas neturi Hamiltono ciklų ir todėl žirgas negali apeiti kiekvieną lentos laukelį lygiai po vieną kartą ir sugrįžti į pradinį laukelį.

37. Artimiausiojo intarpo algoritmas. Čia pateikiame KPU sprendimo dar vieno apytikrio algoritmo aprašymą. Pagrindinė jo idėja yra pradėti nuo nedidelio grafo ciklo, po to didinti jį po vieną viršūnę tol, kol visos viršūnės bus įtrauktos į Hamiltono ciklą.

- **1 žingsnis.** Imame bet kurią viršūnę kaip pradinį ciklą (sudarytą iš vienos viršūnės ir nulio briaunų). Pažymime ją raudonai.
- **Kiti žingsniai.** Tarkime, kad, atlikę k žingsnių, mes jau turime sudarę dalinį ciklą iš k raudonų viršūnių (pažymėkime jį C_k). Tada randame tokią nepažymėtą (juodą) grafo viršūnę, kuri yra arčiausiai kurios nors dalinio ciklo C_k viršūnės. Tokią viršūnę pažymėkime J, o ciklo C_k viršūnę, kuri yra artimiausia viršūnei J, – raide R. Sudarykime naują „raudoną" ciklą C_{k+1}, sudarytą iš C_k viršūnių, įterpdami į pastarąjį viršūnę J tuoj po viršūnės R. Kartojame tai, kol gauname Hamiltono ciklą.

a) Patikrinkite, kad, taikant artimiausiojo intarpo algoritmą prekybos agento uždaviniui iš šio skyriaus pradžios, gaunama tokia ciklų seka (pradinė viršūnė – A):
- C_1: A;
- C_2: A, D, A (viršūnė D yra artimiausia ciklui C_1);
- C_3: A, C, D, A (viršūnė C yra artimiausia ciklo C_2 viršūnei A);
- C_4: A, C, E, D, A (viršūnė E yra artimiausia ciklo C_3 viršūnei C);
- C_5: A, C, B, E, D, A (viršūnė B yra artimiausia ciklo C_4 viršūnei C).

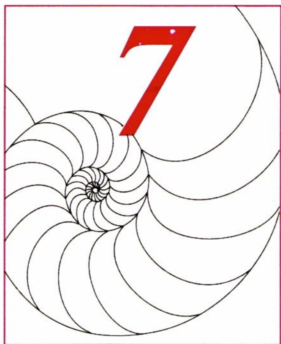
b) Artimiausiojo intarpo algoritmu raskite Hamiltono ciklą 15 pratimo grafe, kai pradinė viršūnė yra b) A; c) B; d) C.

38. Draudimo agento teritoriją sudaro 21 miestas, atstumai (kilometrais) tarp kurių parodyti lentelėje. Jis turi taip suplanuoti savo kelionę, kad ji prasidėtų ir baigtųsi Kaune (čia jo namai) ir eitų per kiekvieną iš 20 miestų lygiai vieną kartą.

a) Raskite Hamiltono ciklą 21 miestui artimiausiojo kaimyno algoritmu.

b) Raskite Hamiltono ciklą 21 miestui pigiausiosios jungties algoritmu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1 Vilnius	*	110	114	62	49	53	88	29	75	97	83	109	204	144	103	132	155	139	178	187	160
2 Anykščiai	110	*	105	46	156	73	111	132	41	52	194	193	105	160	114	98	219	73	107	64	99
3 Ignalina	114	105	*	58	163	117	26	143	105	63	197	223	171	238	178	162	267	168	176	120	56
4 Molėtai	62	46	58	*	120	64	64	91	47	35	145	171	142	166	120	104	209	110	149	101	87
5 Šalčininkai	49	156	163	120	*	102	137	78	124	146	65	119	253	183	152	181	156	188	227	212	186
6 Širvintos	53	73	117	64	102	*	123	64	32	94	131	164	165	151	105	105	194	96	135	137	146
7 Švenčionys	88	111	26	64	137	123	*	117	111	69	171	197	179	232	191	168	243	174	177	133	77
8 Trakai	29	132	143	91	78	64	117	*	86	126	67	80	218	115	82	122	126	150	189	191	188
9 Ukmergė	75	41	105	47	124	32	111	86	*	72	153	142	132	119	73	57	162	64	103	105	114
10 Utena	97	52	63	35	146	94	69	126	72	*	180	204	110	191	145	129	245	102	115	66	52
11 Varėna	83	194	197	145	65	131	171	67	153	180	*	50	300	120	120	177	91	222	261	258	242
12 Alytus	109	193	223	171	119	164	197	80	142	204	50	*	260	64	69	130	46	189	228	153	256
13 Biržai	204	105	171	142	253	165	179	218	132	110	300	260	*	240	187	133	276	69	31	62	134
14 Marijampolė	144	160	238	166	183	151	232	115	119	191	120	64	240	*	56	107	43	166	204	224	243
15 Kaunas	103	114	178	120	152	105	191	82	73	145	120	69	187	56	*	54	102	120	158	178	186
16 Kėdainiai	132	98	162	104	181	105	168	122	57	129	177	130	133	107	54	*	143	65	104	155	181
17 Lazdijai	155	219	267	209	156	194	243	126	162	245	91	46	276	43	102	143	*	209	248	283	302
18 Panevėžys	139	73	168	110	188	96	174	150	64	102	222	189	69	166	120	65	209	*	39	90	136
19 Pasvalys	178	107	176	149	227	135	177	189	103	115	261	228	31	204	158	104	248	39	*	96	167
20 Rokiškis	187	64	120	101	212	137	133	191	105	66	258	153	62	224	178	155	283	90	96	*	62
21 Zarasai	160	99	56	87	186	146	77	188	114	52	242	256	134	243	186	181	302	136	167	62	*

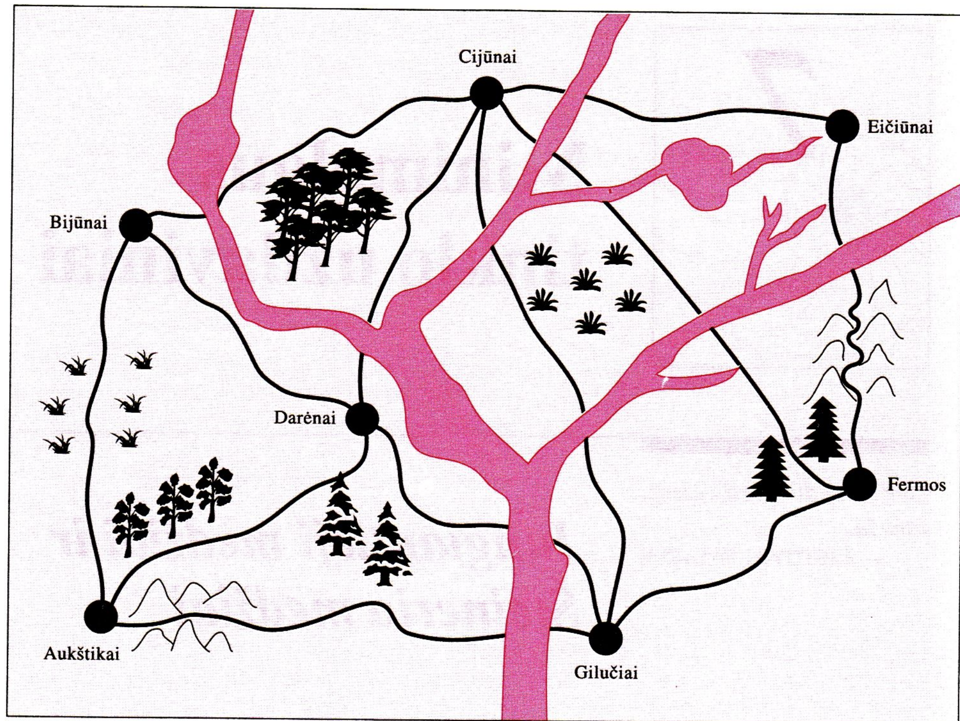


7 Minimalaus tinklo uždaviniai

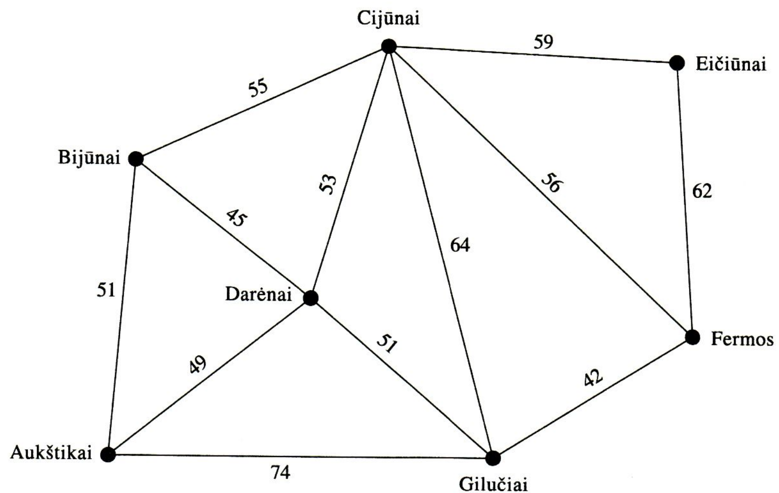
Geras medis gerą vaisių atneša.
LIETUVIŲ PATARLĖ

Jungiantieji medžiai ir Šteinerio medžiai

Telefonų tinklo uždavinys. Įsivaizduokite, kad jūs puikiai susitvarkėte su Švariamiesčio Tvarkos tarnybos eksperto pareigomis (žr. 5 skyrių) ir gavote pasiūlymą užimti nepaprastai gerai mokamą konsultanto vietą Lietuvos Telefono ir Telegrafo kompanijoje LT&T (garsiosios Amerikos kompanijos AT&T filiale). Pirmas reikšmingas LT&T projektas – visuotinis naujo nepaprastai efektyvaus optinio ryšių kabelio įdiegimas. Kabelio bandymams pasirinkta atkampi vietovė, kurioje dar nėra automatinio telefonų ryšio. Kompanija prašo jūsų pagalbos sprendžiant tokį uždavinį. Septyni miesteliai, parodyti 7.1 pav., turi būti sujungti į vieną telefonų tinklą optiniu ryšių kabeliu. 7.2 pav. grafe pavaizduoti keliai, jungiantys šiuos miestelius. Briaunų svoriai rodo išlaidas (tūkstančiais litų), reikalingas telefono linijai tiesti išilgai kiekvieno kelio (linijų tiesimas kitur, ne šalia kelių, būtų per brangus). LT&T nori taip sujungti miestelius, kad būtų galima paskambinti iš bet kurio miestelio į bet kurį kitą tiesiogiai arba per tarpinius miestelius. Žinoma, kompanija



7.1 pav. Greitai išsipildys šių septynių atkampių miestelių gyventojų svajonė turėti gerą telefono ryšį, kurį, jums padedant, įdiegs LT&T.



7.2 pav. Telefonų tinklo jungčių kainos (tūkst. litų).

nori išleisti projektui įgyvendinti kaip galima mažiau pinigų. Kaip *pigiausiai* sujungti miestelius?

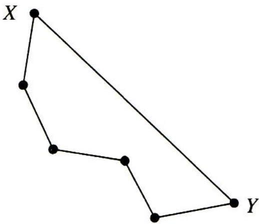
Uždaviniai, panašūs į šį telefonų tinklo uždavinį, iškyla įvairiuose praktiniuose taikymuose (telefonų tinklo projektavimas yra tik vienas iš daugelio). Tai – geležinkelio bėgių tiesimas, elektroninių elementų jungimas mikroschemose, kompiuterių tinklo sudarymas, vamzdynų projektavimas ir t.t. Bendras visų šių uždavinių bruožas – reikia sujungti keletą objektų (svorinių grafų viršūnių) taip, kad iš kiekvieno objekto galima būtų patekti į bet kurį kitą ir kad bendras sudaryto tinklo svoris būtų *minimalus.* Jungiant objektus į tinklą, neatsižvelgiama į tai, kiek nepatogūs ar komplikuoti gali būti keliai, jungiantys konkrečius objektus. Vienintelis tikslas, sprendžiant šį uždavinį, yra sudaryti kiek galima mažesnio bendro svorio tinklą. Tokio tipo uždaviniai yra vadinami **minimalaus tinklo uždaviniais.** Šiame skyriuje mes nagrinėsime du pagrindinius tokių uždavinių tipus.

MEDŽIAI

Nesileisdami į smulkmenas, pradėkime nuo klausimo: kaip turėtų atrodyti telefonų tinklo uždavinio sprendinys?

Pirmiausiai pastebėkime, kad uždavinio sprendinys pats yra grafas, kuris yra pradinio 7.2 pav. grafo dalis. 7.2 pav. matome visas galimas miestelių jungtis (grafo briaunas), o mūsų darbas, ieškant sprendinio, – sudaryti iš jų tinkamą jungčių aibę. Kalbant grafų teorijos terminais, sakoma, kad sprendinys yra pradinio grafo **pografis.** Be to, kadangi mes bandome sudaryti telefonų tinklą, jungiantį visus pradinio grafo miestelius, tai aišku, kad sprendinio pografio viršūnės turi apimti visas pradinio grafo viršūnes. Sprendinio pografis taip pat turi tenkinti šias dvi papildomas sąlygas:

1. Jis turi būti *jungusis.* Tai akivaizdžiai išplaukia iš to, kad tinklas turi kiekvieną miestelį jungti su kiekvienu kitu.
2. Jame *neturi būti ciklų* (t.y. turi būti neįmanoma apeiti sprendinio pografio ar jo dalies ir sugrįžti į pradinę viršūnę).

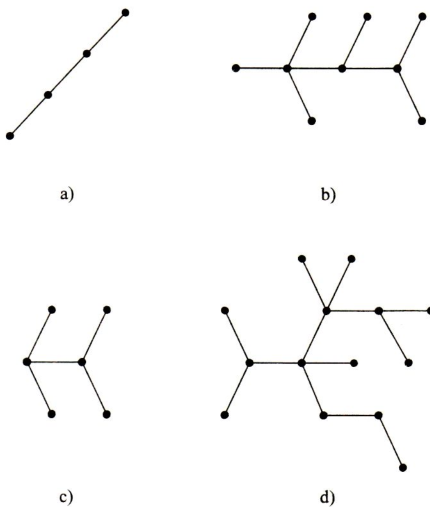


7.3 pav. Tiesioginės telefono linijos tarp X ir Y tiesimas būtų akivaizdus pinigų švaistymas.

Juk optimaliame (pigiausiame) pografyje negali būti daugiau briaunų nei būtina skirtingiems miesteliams sujungti. Tarkime, pavyzdžiui, kad sprendinio pografyje yra ciklas, panašus į parodytą 7.3 pav.

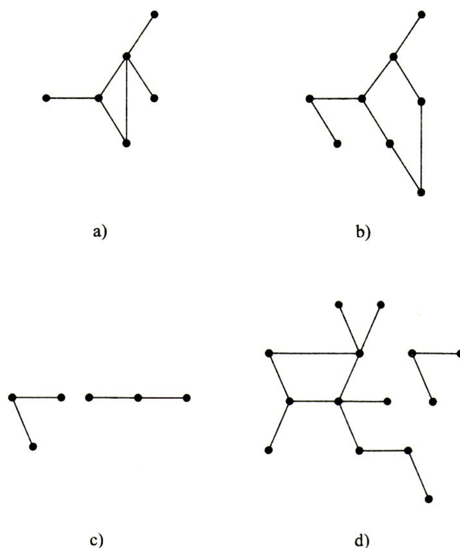
Aišku, kad šiuo atveju mes galėtume ištrinti bet kurią ciklo briauną, nenutraukdami telefono ryšio tinkle. Jungusis grafas, neturintis ciklų, vadinamas **medžiu.** Iš ankstesnių samprotavimų aišku, kad telefonų tinklo uždavinio sprendinys turi būti medis.

1 pavyzdys. 7.4 pav. matome keletą medžių pavyzdžių.



7.4 pav.

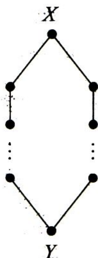
2 pavyzdys. 7.5 pav. matome grafų, kurie nėra medžiai, pavyzdžius. 7.5 a) ir b) grafai turi ciklų; 7.5 c) grafas neturi ciklų, tačiau jis nėra jungusis; 7.5 d) grafas nėra medis dėl abiejų priežasčių – jis turi ciklų ir nėra jungusis.



7.5 pav.

Medžių savybės

Medžiai yra ypač svarbūs ir naudingi. Jie ne tik sumažina anglies dvideginio kiekį atmosferoje, bet reikalingi ir daugybei matematinių taikymų, kur minimalaus tinklo uždaviniai užima prideramą vietą. Trumpai panagrinėsime kai kuriuos pagrindinius (matematinių) medžių bruožus.



7.6 pav. Du skirtingi keliai, jungiantys viršūnes X ir Y, sudaro ciklą.

Pradėkime nuo to, kad jungiamajame grafe bet kurią viršūnę su bet kuria kita viršūne jungia koks nors kelias. O jeigu yra daugiau kaip vienas kelias, jungiantis viršūnių porą? Tada toks grafas tikrai nėra medis, nes jungiantys tas pačias dvi viršūnes du skirtingi keliai (arba jų dalys) būtinai sudarys ciklą (7.6 pav.).

1 savybė. Jei grafas yra medis, tai bet kurias dvi jo viršūnes jungia vienas ir tik vienas kelias. Atvirkščiai, grafas, kurio bet kurias dvi viršūnes jungia tik vienas kelias, yra medis.

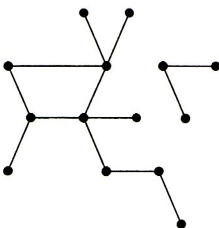
Viena praktiška 1 savybės išvada yra tokia: medis sujungtas labai netvirtai – pašalinus iš jo bet kurią briauną, jis tampa nejungus (23 pratimas). Kitaip tariant, visos medžio briaunos yra *tiltai.*

2 savybė. Visos medžio briaunos yra tiltai. Atvirkščiai, jungusis grafas, kurio visos briaunos – tiltai, yra medis.

Intuityviai visiškai akivaizdu, kad medis yra skurdus briaunų. Didelis briaunų skaičius tam tikra prasme prieštarauja medžio prigimčiai. Kartu medis turi būti jungusis, todėl būtinas tam tikras minimalus briaunų skaičius. Labai svarbi medžio savybė – tiksli sąsaja tarp briaunų ir viršūnių skaičių: bendras briaunų skaičius yra visada vienetu mažesnis už viršūnių skaičių.

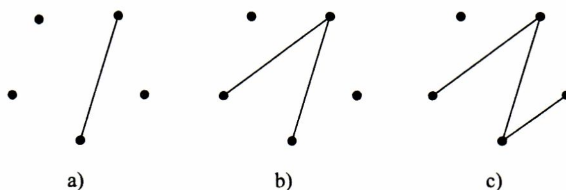
3 savybė. N viršūnių medis turi $N-1$ briauną.

3 savybė turi ir atvirkštinį teiginį, tačiau reikia būti atsargiems. Ar visada galima teigti, kad grafas, kurio briaunų skaičius yra vienetu mažesnis už viršūnių skaičių, yra medis? 7.7 pav. grafas rodo, kad nebūtinai – jis turi 14 viršūnių ir 13 briaunų, tačiau nėra medis. Tai todėl, kad jis nejungusis. Jungiajam grafui 3 savybės atvirkštinis teiginys yra teisingas.


7.7 pav. 14 viršūnių ir 13 briaunų grafas, kuris nėra medis.

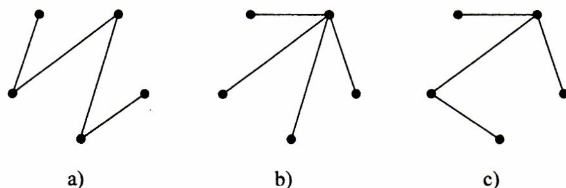
4 savybė. Jungusis N viršūnių ir $N-1$ briaunos grafas yra medis.

3 pavyzdys. Šiuo pavyzdžiu pailiustruosime anksčiau aptartus dalykus. Tarkime, kad imame jungti briaunomis penkias viršūnes. Vienos, dviejų arba trijų briaunų nepakanka, kad grafas būtų jungusis (7.8 a)–c) pav.).



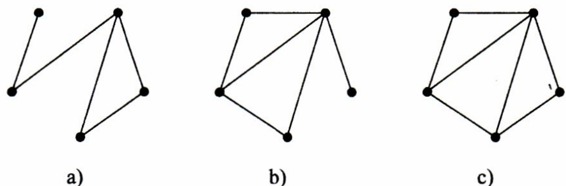
7.8 pav. Nejungieji grafai – nepakanka briaunų.

Imdami keturias briaunas, jau galime padaryti grafą jungųjį. Tokiu atveju gauname medį (7.9 a)–c) pav.).



7.9 pav. Trys skirtingi medžiai, turintys tas pačias viršūnes. Briaunų lygiai tiek, kiek reikia (keturios).

Imant daugiau briaunų (penkias, šešias ir t.t.), jungiajame grafe atsiranda ciklų, ir jis nustoja būti medžiu (7.10 a)–c) pav.).

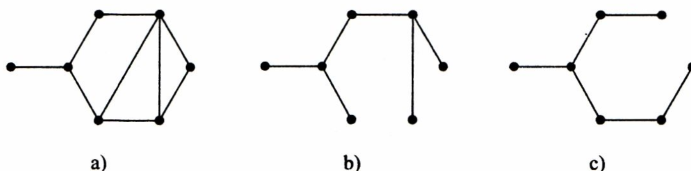


7.10 pav. Grafai, turintys ciklų. Per daug briaunų, kad jie būtų medžiai.

MINIMALŪS JUNGIANTIEJI MEDŽIAI

7.10 pav. pateikėme tris jungiųjų grafų pavyzdžius, kurie nėra medžiai: jie turi daugiau briaunų, negu reikia. Tokiame grafe visada galime rasti medį, jungiantį visas viršūnes – kažką panašaus į skeletą, laikantį visą likusį kūną. Tokį medį vadinsime pradinio grafo jungiančiuoju medžiu (karkasu). Trumpam atidėję tikslų jungiančiojo medžio apibrėžimą, panagrinėkime keletą pavyzdžių.

4 pavyzdys. Žvilgtelėkime į 7.11 a) pav. grafą. Jis jungusis, turi septynias viršūnes ir devynias briaunas, tačiau nėra medis. Jo viduje galime rasti pografį (7.11 b) pav.), turintį tas pačias septynias viršūnes, tačiau tik šešias briaunas. Toks jungiantis visas pradinio grafo viršūnes pografis yra medis, vadinamas 7.11 a) grafo **jungiančiuoju medžiu.** Grafas gali turėti daugiau kaip vieną jungiantįjį medį: 7.11 c) pav. parodytas kitas 7.11 a) grafo jungiantysis medis. Mes paliekame skaitytojui (žr. 6 a) pratimą) rasti kitus 7.11 a) pav. grafo jungiančiuosius medžius.

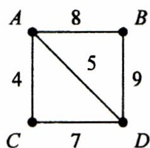


7.11 pav.

Bet koks jungusis grafas G turi bent vieną jungiantįjį medį. Jei G yra medis, tai jo jungiantysis medis yra jis pats; priešingu atveju bet koks medis grafe G, turintis tas pačias viršūnes kaip ir G, yra jungiantysis medis. Apskritai skirtingų jungiančiųjų medžių skaičius jungiajame grafe gali būti labai didelis. Panagrinėkime tokį pavyzdį.

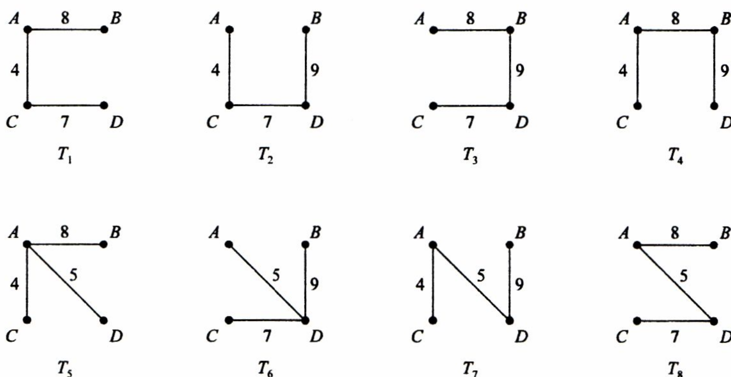
---

5 pavyzdys. Svorinis 7.12 pav. grafas turi aštuonis skirtingus jungiančiuosius medžius $T_1, T_2, \ldots, T_8$, parodytus 7.13 pav.



7.12 pav.

Įsivaizduokime, kad 7.12 pav. grafo briaunos nurodo galimas jungtis tarp keturių miestų (A, B, C ir D), o svoriai reiškia tokių jungčių įrengimo kainą. 7.13 pav. pavaizduoti jungiantieji medžiai rodo aštuonis galimus miestų sujungimo į medžio pavidalo tinklą būdus. Peržiūrėję juos, nesunkiai įsitikiname, kad T_5 yra pigiausias. Toks medis vadinamas pradinio svorinio grafo *minimaliuoju jį jungiančiuoju medžiu.*

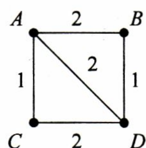


7.13 pav.

Dabar jau esame pasirengę tiksliai suformuluoti apibrėžimus.

1. Tarkime, kad G yra bet koks jungusis grafas. Tada G turi bent vieną (dažniausiai – daugiau) jungiantįjį medį. Grafo G pografis vadinamas grafo G **jungiančiuoju medžiu**, jei
   a) jo viršūnės sutampa su grafo G viršūnėmis;
   b) jo briaunos yra grafo G briaunos;
   c) jis yra medis.

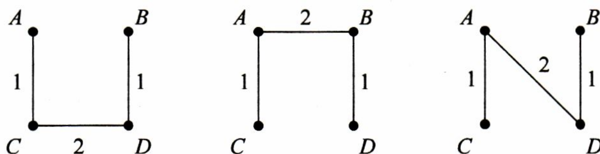
2. Tarkime, kad G yra jungusis svorinis grafas. Tarp visų grafo G jungiančiųjų medžių yra vienas (galbūt ir keli), kurio bendrasis svoris yra mažiausias. Toks medis vadinamas grafo G **minimaliuoju jungiančiuoju medžiu.**



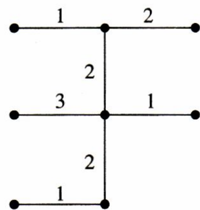
7.14 pav.

6 pavyzdys. Pastebėsime, kad svorinis grafas gali turėti daugiau kaip vieną minimalųjį jungiantįjį medį.

7.14 pav. svorinis grafas turi tris skirtingus minimaliuosius jungiančiuosius medžius, kurių kiekvieno bendrasis svoris lygus 4. Jie parodyti 7.15 pav.



7.15 pav.



7.16 pav.

7 pavyzdys. 7.16 pav. svorinis grafas yra medis, todėl jis turi vienintelį jungiantįjį medį – patį save; kartu jis yra ir minimalusis jungiantysis medis.

Naudodamiesi naujaisiais terminais, galime performuluoti skyriaus pradžioje pateiktą telefonų tinklo (ar panašų) uždavinį kaip uždavinį, kuriame reika rasti duotojo grafo minimalųjį jungiantįjį medį. Todėl tokio tipo uždaviniai vadinami **minimaliojo jungiančiojo medžio (MJM) uždaviniais.**

KRUSKALO ALGORITMAS

Dabar nagrinėsime paprastą algoritmą, kurį taikant *visada* galima rasti jungiojo svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį. Šis algoritmas, žinomas **Kruskalo algoritmo*** vardu, yra beveik identiškas pigiausiosios jungties algoritmui, nagrinėtam 6 skyriuje. Faktiškai tai tik taupumo ir sveiko proto derinio išraiška.

* J. Kruskalas (Joseph Kruskal), matematikas, dirbęs Bello laboratorijose, atrado šį algoritmą 1956 metais. Vėliau paaiškėjo, kad algoritmą anksčiau buvo nepriklausomai atradę keli Čekoslovakijos, Lenkijos ir Prancūzijos matematikai.

Kruskalo algoritmas

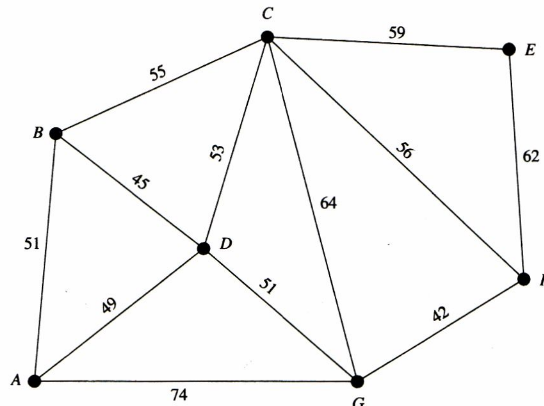
1 žingsnis. Rask pigiausią grafo briauną (jei tokių yra ne viena, pasirink bet kurią). Pažymėk ją raudonai (be abejo, nedraudžiamos ir kitos spalvos).

2 žingsnis. Rask grafe pigiausią dar nepažymėtą (t.y. neraudoną) briauną, kurią pažymėjus raudonai, nesusidarytų raudono ciklo (prisiminkime: jokių ciklų!). Jei tokių yra ne viena, pasirink bet kurią. Pažymėk briauną raudonai.

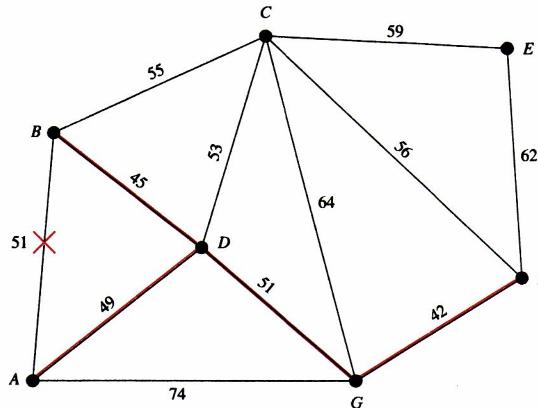
3, 4 ir t.t. žingsniai. Kartok 2 žingsnį tol, kol raudonųjų briaunų galai (viršūnės) panaudos visas grafo viršūnes. Pažymėtos briaunos ir sudaro ieškomą minimalųjį jungiantįjį medį.

8 pavyzdys. Pabandykime pritaikyti Kruskalo algoritmą telefonų tinklo uždaviniui (7.17 pav. yra tas pats 7.2 pav., tik miesteliai pažymėti raidėmis A, B, ...).

- **1 žingsnis.** Pigiausios jungties Gilučiai–Fermos kaina yra 42 tūkst. litų. Pažymime šią jungtį raudonai. (Beje, tai nebūtinai reiškia, kad šie du miesteliai bus sujungti pirmieji; tinklą popieriuje sudarome tam tikra nuoseklia tvarka, tačiau tiesti telefono linijas bus galima bet kuria tvarka.)
- **2 žingsnis.** Kita pigiausia jungtis yra tarp miestelių Bijūnai ir Darėnai, kainuojanti 45 tūkst. litų. Pažymime šią jungtį raudonai.
- **3 žingsnis.** Dabar pigiausia jungtis yra tarp Aukštikų ir Darėnų miestelių, kainuojanti 49 tūkst. litų. Pažymime šią jungtį raudonai.
- **4 žingsnis.** Dabar pigiausios jungtys yra dvi: tarp Aukštikų ir Bijūnų miestelių bei tarp Darėnų ir Gilučių. Abi kainuoja po 51 tūkst. litų.



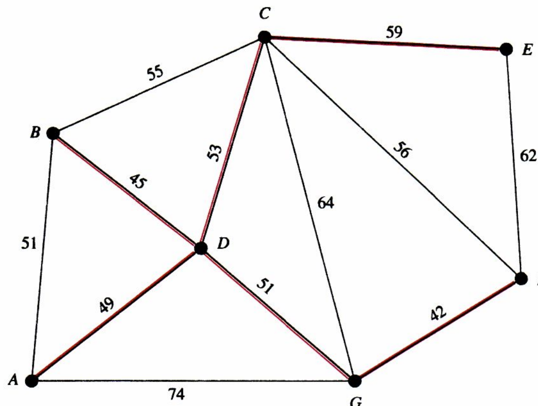
7.17 pav. Galimų telefonų tinklo jungčių kainos (tūkst. litų).



7.18 pav. Taip atrodo tinklas po keturių žingsnių. Bijūnai ir Aukštikai jau gali palaikyti tarpusavio telefoninį ryšį ir neturėdami tiesioginės jungties.

Deja, Aukštikų–Bijūnų jungtis „perteklinga" (Aukštikai–Darėnai–Bijūnai), todėl ją atmetame (geriausia būtų ją iš viso ištrinti). Kita vertus, Darėnų–Gilučių jungtis yra visai tinkama, tad ją pažymime raudonai.

- **5 žingsnis.** Dabar pigiausia jungtis yra Cijūnai–Darėnai, kainuojanti 53 tūkst. litų. Problemų nekyla, tad pažymime šią jungtį raudonai.
- **6 žingsnis.** Dabar pigiausia jungtis yra Bijūnai–Cijūnai, kainuojanti 55 tūkst. litų, tačiau ji perteklinga (sudvejinta), todėl ją atmetame. Tada galima pigiausia jungtis yra Cijūnai–Fermos, kainuojanti 56 tūkst. litų, tačiau ji taip pat perteklinga (telefoniniai pokalbiai tarp Cijūnų ir Fermų projektuojamame tinkle šiame etape jau galimi), todėl tęsiame paieškas toliau. Jungtis Cijūnai–Eičiūnai, kainuojanti 59 tūkst. litų, tinka, todėl ją pažymime raudonai.
- **7 žingsnis.** Stop! – mes gi jau baigėme! Tai matome, žvilgtelėję į sudarytą raudoną tinklą ir įsitikinę, kad tai ir yra jungiantysis medis. Arba dar paprasčiau: šešios briaunos, taigi ir šeši žingsniai yra lygiai tiek, kiek reikia septynių viršūnių medžiui sudaryti.



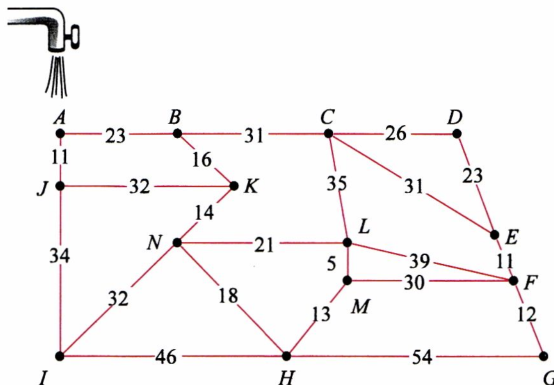
7.19 pav. Telefonų tinklo minimalusis jungiantysis medis (MJM). Tinklo mazgai – Darėnai, Cijūnai ir Gilučiai.

Bendra sudaryto telefonų tinklo kaina yra 299 tūkst. litų, ir tai yra optimalus uždavinio sprendinys – pigesnio jungiančiojo tinklo nėra! Atkreipiame skaitytojo dėmesį į kitą svarbų faktą, kuris bus reikalingas šiame skyriuje vėliau: sudarytas tinklas turi tris *mazginius taškus* (arba tiesiog *mazgus*) – keturgubą mazgą Darėnų miestelyje ir dvigubus mazgus Cijūnų ir Gilučių miesteliuose.

Baigdami skyrelį, panagrinėkime dar vieną minimaliųjų jungiančiųjų medžių pritaikymą, šį kartą – drėkinimo uždaviniui spręsti.

---

9 pavyzdys. 7.20 pav. grafo viršūnės yra taškai (pavyzdžiui, vandens purkštuvai), į kuriuos turi būti tiekiamas vanduo. Viršūnė A yra centrinis vandens rezervuaras. Grafo briaunos vaizduoja kelius, kuriais galima tiesti vandentiekio vamzdžius, o svoriai nurodo galimų jungčių kainas.



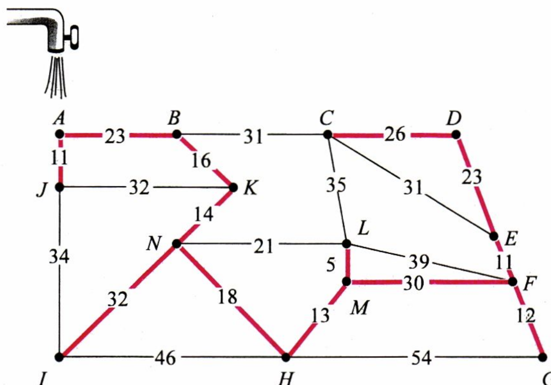
7.20 pav.

Mes norime taip nutiesti vamzdyną, kad vanduo iš A patektų į visus vandens purkštuvus. Kartu norime šį darbą atlikti kaip galima pigiau. Aišku, kad tai MJM uždavinys. Minimalųjį jungiantįjį medį rasime Kruskalo algoritmu.

- **1 žingsnis.** Pažymime LM.
- **2 žingsnis.** Pažymime AJ.
- **3 žingsnis.** Pažymime EF.
- **4 žingsnis.** Pažymime FG.
- **5 žingsnis.** Pažymime HM.
- **6 žingsnis.** Pažymime NK.
- **7 žingsnis.** Pažymime BK.
- **8 žingsnis.** Pažymime HN.

- **9 žingsnis.** Dabar pigiausia briauna yra NL, tačiau ji netinka, nes susidarytų ciklas. Briauna AB yra tinkama. Pažymime AB.
- **10 žingsnis.** Dabar pigiausia briauna yra JK, tačiau ji užbaigia ciklą, todėl jos atsisakome. Pažymime DE.
- **11 žingsnis.** Pažymime CD.
- **12 žingsnis.** Atmetame CE. Pažymime FM.
- **13 žingsnis.** Atmetame CL, FL, GH ir BC. Pažymime IN.

Ir štai baigėme! Minimalusis jungiantysis medis, nusakantis pigiausią drėkinimo sistemą* (visa kaina – 234 Lt), parodytas 7.21 pav.



7.21 pav.

Skaitytojas, be abejo, pastebėjo didelį Kruskalo algoritmo ir pigiausiosios jungties algoritmo (nagrinėto 6 skyriuje) panašumą. Faktiškai jie abu remiasi ta pačia strategija: būk taupus (t.y. visada rinkis pigiausią galimą variantą), tačiau laikykis nustatytų taisyklių, sudarydamas reikalingą struktūrą (jungiantįjį medį ar Hamiltono ciklą). Anksčiau patyrėme, kad už šią strategiją paprastai tenka mokėti – trumparegiškas taupumas gali duoti blogą galutinį rezultatą. Tačiau Kruskalo algoritmas yra maloni išimtis. Šiuo atveju taupumo strategija garantuoja optimalumą: Kruskalo algoritmu visada gaunamas pigiausias jungiantysis medis. Tai reiškia, kad Kruskalo algoritmas yra *optimalus algoritmas*.

Praktiniu požiūriu Kruskalo algoritmas yra *efektyvusis algoritmas*. Kaip ir pigiausiosios jungties algoritmu, šimtų viršūnių uždavinį Kruskalo algoritmu įmanoma įveikti „rankiniu būdu“, o šimtų tūkstančių viršūnių uždavinį –

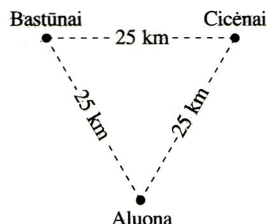
* Žinoma, čia neatsižvelgėme į kitus praktiškai svarbius faktorius, susijusius su drėkinimo vamzdžių tiesimu (pvz., vandens spaudimas).

kompiuteriu. Trumpai tariant, minimaliojo jungiančiojo medžio radimo uždavinys – tai vienas iš tų retų atvejų, kai viskas yra gerai: turime lengvai suprantamą ir lengvai atliekamą algoritmą, be to, jis yra *optimalus* ir tuo pat metu *efektyvus* – ar galima norėti geriau? Argi nebūtų nuostabu, jei viskas visada klostytųsi taip puikiai?

TRUMPIAUSIEJI TINKLAI

Paskatinti sėkmės su MJM uždaviniais, dar kartą žvilgtelėkime į optimalaus skirtingas vietoves jungiančio tinklo sudarymo uždavinį, tačiau šiek tiek pakeiskime sąlygas: kas atsitiktų, jei, vaizdžiai kalbant, mums nereikėtų *laikytis kelio*? Jei galėtume eiti iš vienos vietos į kitą bet kaip? Situaciją paaiškinsime keletu paprastų pavyzdžių.

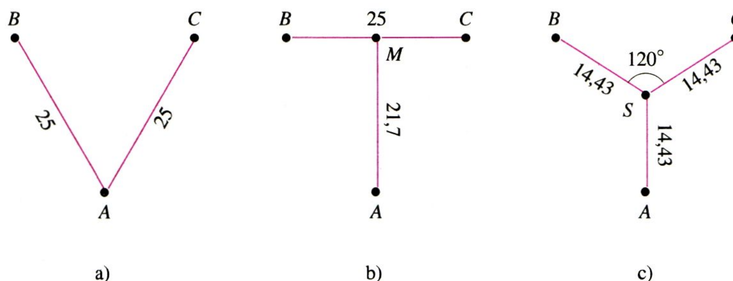
10 pavyzdys. (**Dar vienas telefonų tinklo uždavinys**.) Tai pasakojimas apie tris mažas gyvenvietes (Aluoną, Bastūnus ir Cicėnus), kurias dėl tam tikrų svarbių priežasčių reikia sujungti bendru telefonų tinklu. Šie miesteliai sudaro lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi 25 kilometrams (7.22 pav.). Reikia suprojektuoti telefonų tinklą, kuris jungtų šiuos tris miestelius pigiausiu būdu. Kaip sujungti miestelius?



7.22 pav.

Nors šis pavyzdys atrodo tik kaip lengvas ankstesnio telefonų tinklo uždavinio atvejis, tačiau taip nėra. Situacija čia visai kita dėl vietovės pobūdžio. Čia beprasmiška reikalauti linijas tiesti išilgai kelių dėl labai paprastos priežasties – šias tris gyvenvietes jungiančių kelių tiesiog nėra. Todėl telefono linijas galime tiesti kur norime, o vieno kilometro kaina visur ta pati.

Tad klausimas toks: koks tinklas, jungiantis tris taškus, yra trumpiausias? Pradėkime nuo, atrodytų, logiškiausio kandidato – tris gyvenvietes aprėpiančio minimaliojo jungiančiojo medžio. 7.23 a) pav. parodytas minimalusis jungiantysis medis, kurio bendras ilgis yra 50 kilometrų.



7.23 pav. a) Minimalaus jungiančiojo medžio tinklas, kurio bendras ilgis 50 km. b) Trumpesnis tinklas (bendras ilgis – apie 46,7 km), turintis raidės T formos mazgą taške M. c) Trumpiausias tinklas (bendras ilgis – apie 43,3 km), turintis raidės Y formos mazgą taške S. Trys atšakos jungiasi vienodais kampais (120°).

Nesunku įsitikinti, kad MJM nėra trumpiausias tinklas. Pažiūrėkite į 7.23 b) pav. Jame matome tinklą, kuris tikrai yra trumpesnis nei 50 kilometrų. Jis turi raidės T formos *mazgą* naujame taške, kurį pažymėsime M. Pakanka vidurinės mokyklos geometrijos žinių (Pitagoro teoremos) ir skaičiuoklio, norint patikrinti, jog nuo Aluonos iki mazgo M yra apie 21,7 kilometro, todėl tinklo ilgis yra apie 46,7 kilometro ilgio (žr. 19 pratimą).

Ar galima tai padaryti dar geriau? Kodėl gi ne? Šiek tiek pamąstę, galime gauti tinklą, parodytą 7.23 c) pav. Čia naujame taške S trikampio viduje turime Y raidės formos *mazgą*. Šio tinklo ilgis yra apie 43,3 kilometro (žr. 20 pratimą). Svarbiausia šio tinklo ypatybė yra ta, kad trys atšakos sueina mazgo taške *S vienodais kampais*, lygiais 120 laipsnių. Beje, skaitytojas nelabai nustebs, kad tai – geriausia, ką galima padaryti: 7.23 c) pav. matome *trumpiausią tinklą, jungiantį tris lygiakraščio trikampio viršūnes* (šį teiginį galima gana įtikinamai paaiškinti tuo, kad tai – vienintelis medis, atrodantis vienodai, žiūrint iš Aluonos, Bastūnų ar Cicėnų; besidomintiems griežtesniu matematiniu įrodymu siūlome 36 pratimą).

Pabandykime reziumuoti 10 pavyzdį: jei nereikalaujama, kad tinklo viršūnės (mazgai) būtų kuri nors gyvenvietė (kitaip tariant, leista kurti tinkle naujus mazgus), tai minimalusis jungiantysis medis gali ir nebūti geriausias gyvenviečių sujungimo būdas. 10 pavyzdyje geriausias sprendinys yra tinklas, turintis naują mazgą, kuriame trys atšakos sueina 120 laipsnių kampais. Palyginę šio sprendinio ilgį (43,3 km) su MJM sprendiniu (50 km), matome, kad naujasis mazgas sutaupo 6,7 kilometro (arba 13,4%).

Pereidami prie kito pavyzdžio, pasitelkime keletą naujų terminų.

- Trumpiausias iš visų tinklų, jungiančių taškų aibę, vadinamas, be abejo, **trumpiausiuoju tinklu***.
- Bet kuris tinklo mazgas, kuriame trys atšakos susieina 120 laipsnių kampu, vadinamas tinklo **Šteinerio tašku****.

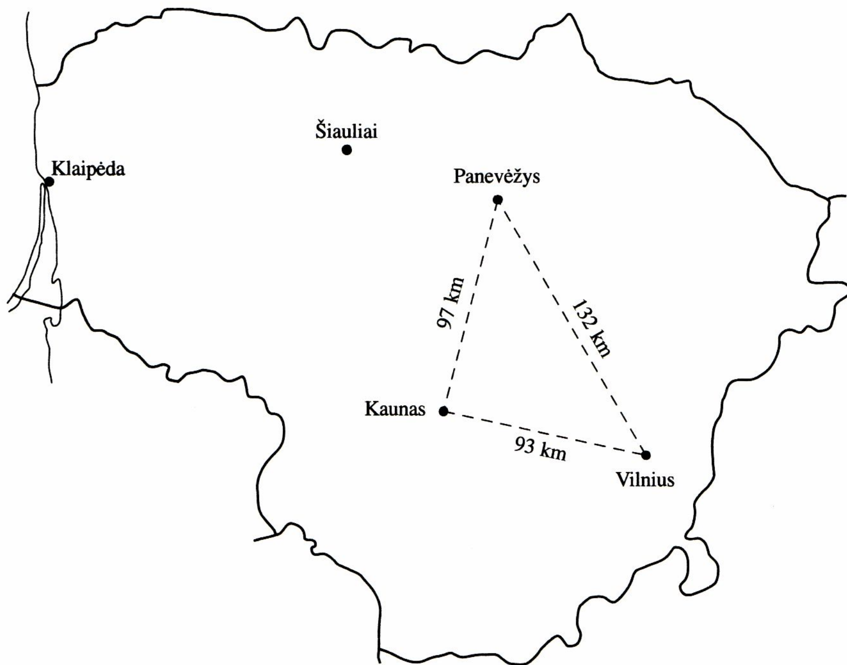
Dabar panagrinėkime dar vieną pavyzdį.

---

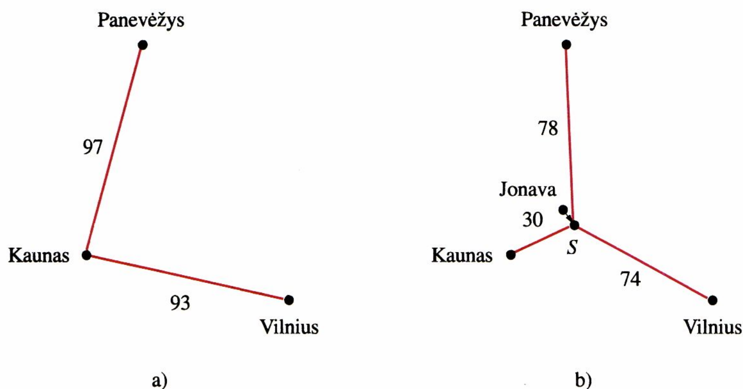
11 pavyzdys. (**Fantastinis greitojo traukinio projektas.**) Šiais laikais nemažai kalbama apie greitaeigius traukinius, važiuojančius specialiai įrengtais magnetiniais keliais. Nutarta suprojektuoti pirmą tokią sistemą ir Lietuvoje: planuojama greitojo geležinkelio tinklu sujungti tris miestus – Vilnių, Kauną ir Panevėžį. 7.24 pav. parodytas tikslus trijų miestų geografinis išsidėstymas ir juos jungiančios tiesios linijos. Brangiausia projekto dalis yra

* Tiesą sakant, teoriškai gali būti daugiau nei vienas toks tinklas, tačiau praktiškai tai pasitaiko retai.

** J. Šteineris (Jacob Steiner, 1796–1863) – Berlyno universiteto matematikas.



7.24 pav. Lietuvos žemėlapis. Atstumai tiese tarp miestų: Vilnius–Kaunas – 93 km; Kaunas–Panevėžys – 97 km; Vilnius–Panevėžys – 132 km.



7.25 pav. a) Minimalusis jungiantysis medis; jo bendras ilgis yra 190 km. Mazgo taškas yra Kaunas. b) Trumpiausias tinklas, kurio bendras ilgis 182 km. Mazgas *S* yra Šteinerio taškas apie 8,4 km į pietryčius nuo Jonavos.

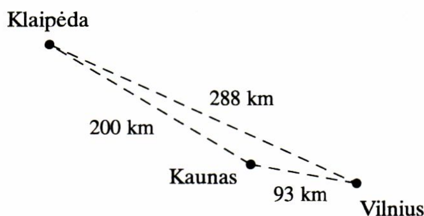
naujo specialaus kelio tiesimas. Kadangi Lietuvos paviršius yra santykinai plokščias, galima laikyti, kad kaina proporcinga atstumui. Todėl pigiausias kelio variantas nusakomas trumpiausiu tinklu, jungiančiu tris miestus. Kaip jį rasti?

Pradėkime nuo minimalaus šiuos tris miestus jungiančio medžio. Jį sudaro atkarpos Vilnius–Kaunas ir Kaunas–Panevėžys (7.25 a) pav.), kurių bendras ilgis yra 190 kilometrų. Prisiminus 10 pavyzdį, galima eiti lažybų, kad šį tinklą įmanoma sutrumpinti įvedant trikampio Vilnius–Kaunas–Panevėžys viduje tam tikrus mazgo taškus. Ar tai turėtų būti vienas, ar keli mazgo taškai?

Kokioje vietoje jie turėtų būti? Pasirodo, *vienintelis* mazgo taškas turi būti parinktas taip, kad trys tinklo atšakos susieitų tame taške 120 laipsnių kampais, – kitaip sakant, jis turi būti tinklo Šteinerio taškas. Pasitelkus geometriją, galima įrodyti (tai ne taip jau paprasta), kad 7.25 b) pav. pavaizduotas trumpiausias tris miestus jungiantis tinklas. Jo bendras ilgis yra apie 182 kilometrai, t.y. 8 kilometrais trumpesnis už minimaliojo jungiančiojo medžio tinklą. Galėtų pasirodyti, kad tai visai nedaug, bet juk vienas kelio kilometras kainuoja milijonus litų!

Įdomu, kad tikslią mazgo vietą *S* galima rasti geometriškai, remiantis išradinga *Toričelio* procedūra, aprašyta šio skyriaus pabaigoje. Šiame pavyzdyje mazgo taškas *S* yra apie 8,4 kilometro į pietryčius nuo Jonavos.

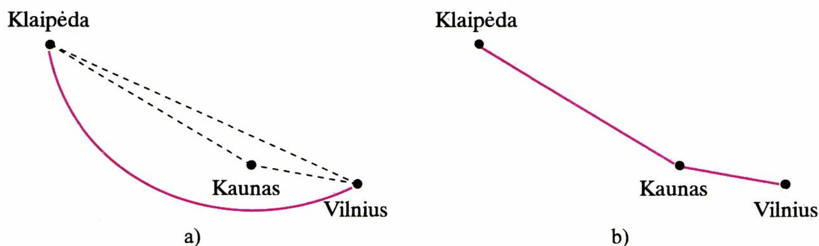
12 pavyzdys. Vėl tarkime, kad reikia suprojektuoti greitaeigių traukinių sistemą, šį kartą jungiančią Vilnių, Kauną ir Klaipėdą. Koks yra trumpiausias tinklas, jungiantis šiuos tris miestus? 7.26 pav. parodyti atstumai tiese tarp šių trijų miestų.



7.26 pav.

10 ir 11 pavyzdžiuose įgyta patirtis sako, kad, norėdami sudaryti trumpiausią tinklą, turime ieškoti mazgo – Šteinerio taško trikampio Vilnius–Kaunas–Klaipėda viduje. Deja, esame pasmerkti likti tuščiomis rankomis: trikampio viduje tokio Šteinerio taško nėra! Kodėl? Kaltas Kaunas, o tiksliau – trikampio viršūnės „Kaunas" kampas, apytikriai lygus 157 laipsniams. Iš elementariosios geometrijos žinome (o ir šiaip beveik aišku), kad bet kurį tašką *P* trikampio viduje sujungus su Vilniumi ir Klaipėda, susidarys dar didesnis kampas. Iš čia išplaukia, kad Šteinerio taško trikampio viduje negali būti.

O ką gi daryti, jei nėra Šteinerio taško trikampio viduje? Kaip rasti trumpiausią tinklą? Atsakymas visai nenuliūdina: šiuo atveju *trumpiausias tinklas sutampa su minimaliuoju jungiančiuoju medžiu.* Taigi šiame pavyzdyje 293 kilometrų tinklas, parodytas 7.27 b) pav. ir susidedantis iš atkarpų Vilnius–Kaunas bei Kaunas–Klaipėda, ir yra trumpiausias.

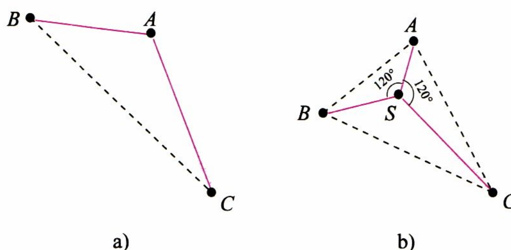


7.27 pav. a) Raudonas lankas rodo visus taškus, kuriuos sujungus su Vilniumi ir Klaipėda, gautume 120 laipsnių kampą. Nė vienas iš šių taškų nepatenka į trikampio Vilnius–Kaunas–Klaipėda vidų. b) Trumpiausias tinklas, jungiantis šiuos tris miestus, yra minimalusis jungiantysis medis.

Reziumuokime visa, ką sužinojome 10, 11 ir 12 pavyzdžiuose apie trumpiausią tinklą, jungiantį tris taškus A, B ir C.

Kaip rasti tris taškus jungiantį trumpiausią tinklą

1. Jei vienas iš trikampio ABC kampų yra 120° arba didesnis, tai trumpiausiasis tinklas sutampa su minimaliuoju jungiančiuoju medžiu (7.28 a) pav.). Rasti tokį tinklą labai paprasta (tereikia paimti dvi trumpesnes trikampio kraštines).
2. Jei visi trikampio kampai yra mažesni už 120°, tai trumpiausiasis tinklas ir minimalusis jungiantysis medis nebesutampa. Trumpiausiąjį tinklą gauname, radę Šteinerio mazgo tašką S ir sujungę S su visomis viršūnėmis A, B ir C (7.28 b) pav.).



7.28 pav. Trumpiausias tinklas, jungiantis A, B ir C. a) Pirmas atvejis: yra kampas $\geqslant 120^\circ$. Mazgas – viena iš viršūnių. b) Antras atvejis: visi kampai $< 120^\circ$. Mazgas S – Šteinerio taškas.

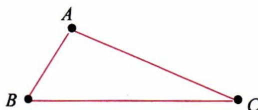
Mums dar reikėtų apsvarstyti vieną dalyką, susijusį su antru atveju: kaip rasti patį Šteinerio mazgo tašką S? Toliau aprašysime paprastą ir elegantišką geometrinę procedūrą jam rasti.

Toričelio procedūra (Šteinerio taško trikampio viduje radimas)
Tarkime, kad trikampio ABC visi kampai yra mažesni už 120° ir kad kraštinė BC (žr. 7.29 pav.) yra ilgiausia.

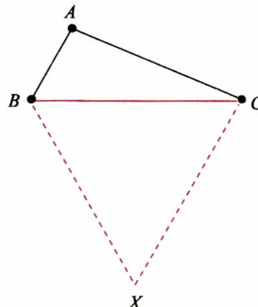
1 žingsnis. Sudarykite lygiakraštį trikampį BCX (žr. 7.29 pav.; BC – ilgiausia trikampio ABC kraštinė).

2 žingsnis. Aplink lygiakraštį trikampį BCX apibrėžkite apskritimą.

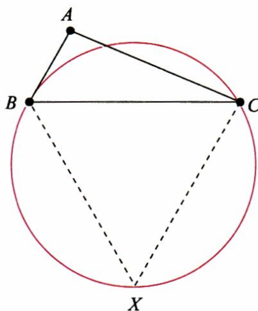
3 žingsnis. Tašką X sujunkite su tašku A. Taškas, kuriame atkarpa XA kerta apskritimą, yra ieškomasis Šteinerio taškas S.



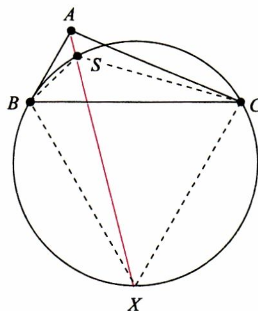
Pradinis trikampis



Pirmas žingsnis



Antras žingsnis



Trečias žingsnis

7.29 pav. Šteinerio taško *S* radimas trikampio viduje.

Kodėl Toričelio* procedūra tinka? Pirmiausia, kampas BXC lygus 60° (BXC – lygiakraštis trikampis). Todėl kampas BSC lygus 120° (įbrėžto į

* Ši procedūra aprašyta italų fiziko ir matematiko E. Toričelio (Evangelista Torricelli, 1608–1647) darbuose. Toričelis buvo Galilėjaus mokinys, geriausiai žinomas kaip barometro išradėjas.

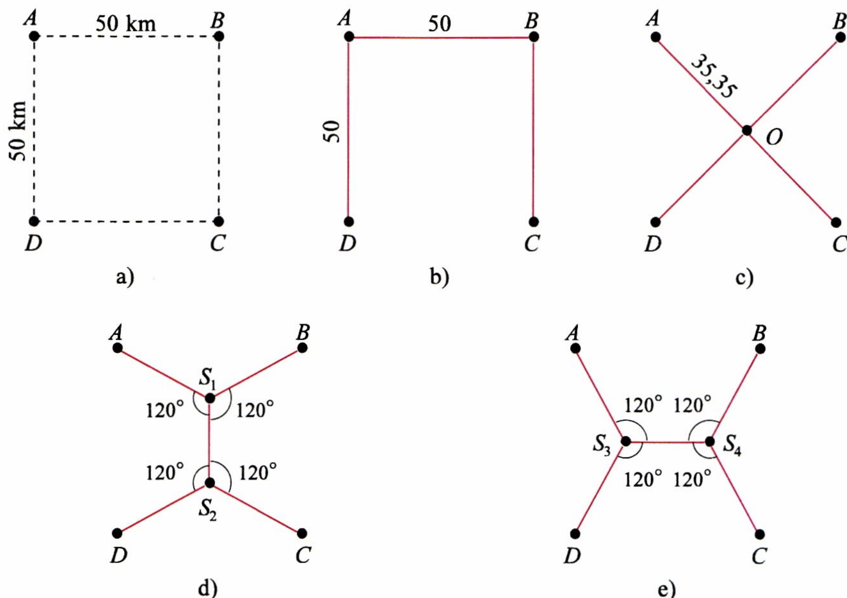
apskritimą keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°). Kampai BSX ir XSC lygūs 60° (jie yra lygūs atitinkamai kampams BCX ir XBC). Iš čia gauname, kad kampai BSA ir CSA yra po 120° ir todėl taškas S yra ieškomasis Šteinerio taškas. Be to, matome, kad viso tinklo ilgis $SA + SB + SC$ sutampa su atkarpos AX ilgiu.

Dabar, kai viską išsiaiškinome trijų miestų trumpiausiojo tinklo uždavinyje, panagrinėkime kai kuriuos keturių miestų atvejus.

---

13 pavyzdys. Keturi miestai A, B, C ir D turi būti sujungti į telefonų tinklą. Iš pradžių tarkime, kad tie keturi miestai išsidėstę kvadrato su kraštine, lygia 50 kilometrų, viršūnėse (7.30 a) pav.). Kaip atrodo šiuos keturis miestus jungiantis optimalus tinklas?

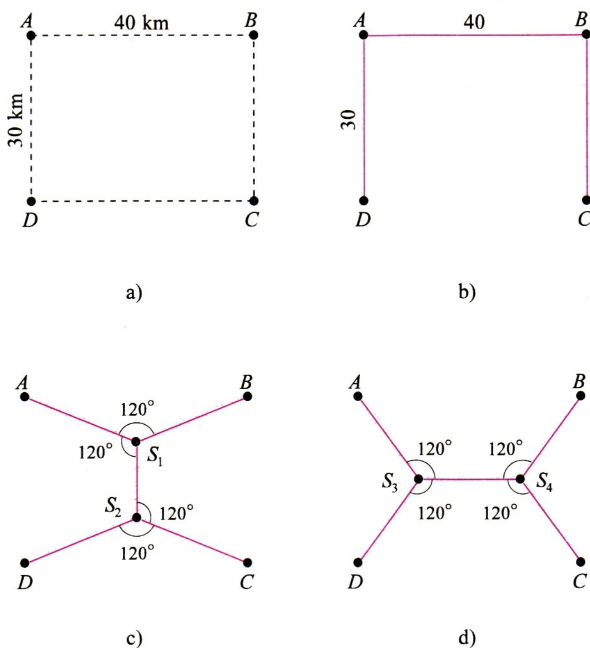
Jei į tinklą *neleidžiama* įjungti naujų mazgų, tai sprendinys yra minimalusis jungiantysis medis, parodytas 7.30 b) pav. Šio tinklo ilgis yra 150 kilometrų, o jo mazgo taškai yra A ir B. Kita vertus, jei vidiniai mazgo taškai yra leidžiami, tai galima sukonstruoti trumpesnį tinklą. Vienas iš akivaizdžių pagerinimų yra tinklas, parodytas 7.30 c) pav. ir turintis X raidės pavidalo mazgą kvadrato centre O. Šio tinklo ilgis yra apie 141,4 kilometro (žr. 29 pratimą). Dar įspūdingiau tinklas pagerintas 7.30 d) paveikslėlyje. Jis turi du mazgo taškus S_1 ir S_2, kurie, be to, yra ir šio tinklo Šteinerio taškai. Pasitelkę truputį vidurinės mokyklos geometrijos (žr. 30 pratimą), galime apskaičiuoti, kad šio tinklo ilgis yra apie 136,6 kilometro, arba 13,4 kilometro (apie 9%) mažiau



7.30 pav. a) Keturi miestai, išsidėstę kvadrato viršūnėse. b) Minimaliojo jungiančiojo medžio tinklas, kurio bendras ilgis – 150 km. Mazgo taškai – A ir B. c) Trumpesnis tinklas, kurio bendras ilgis apie 141,4 km, gautas paėmus naują mazgą O kvadrato centre. d) Trumpiausias tinklas, kurio bendras ilgis apie 136,6 km. Taškai S_1 ir S_2 yra Šteinerio taškai. e) Kitas trumpiausias tinklas, kurio Šteinerio taškai yra S_3 ir S_4.

už 150 kilometrų minimaliojo jungiančiojo medžio tinklą. Bet svarbiausia tai, kad 7.30 d) pav. tinklas yra trumpiausias, taigi jo pagerinti nebepavyks (tiesa, yra dar vienas trumpiausias tinklas – jį matome 7.30 e) pav.).

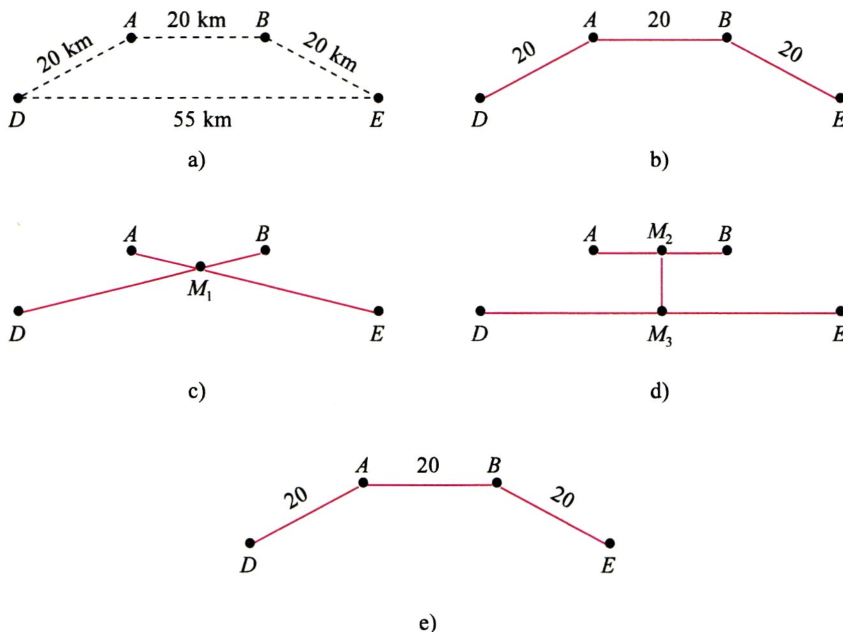
14 pavyzdys. Pakartokime tai, ką darėme 13 pavyzdyje, tik šį kartą tarkime, kad keturi miestai yra išsidėstę stačiakampio su kraštinėmis 40 km ir 30 km viršūnėse (7.31 a) pav.). Kadangi jau turime patirties, galime iškart imtis darbo. Žinome, kad minimalusis jungiantysis medis yra 100 kilometrų ilgio (7.31 b) pav.), ir jau esame pakankamai mokyti, kad pabandytume suprojektuoti tinklą, turintį *du* vidinius mazgo taškus, kurie yra Šteinerio taškai. Pasinaudoję 13 pavyzdžio 7.30 d) ir e) pav. užuomina, galime pasiūlyti du priimtinus variantus, kurie parodyti atitinkamai 7.31 c) ir d) pav. Nesunku įsitikinti, kad šie variantai, kaip ir 13 pavyzdyje, yra vieninteliai būdai tinklui, turinčiam Šteinerio mazgus, sudaryti. Tačiau vienas dalykas yra naujas: 7.31 c) pav. tinklo ilgis yra apie 99,3 kilometro, tuo tarpu 7.31 d) pav. tinklo ilgis yra apie 91,95 kilometro (žr. 31 b) pratimą). Šiuo požiūriu geriausias kandidatas į trumpiausius tinklus yra parodytas 7.31 d) pav. (apie 91,95 kilometro). Jei šiame matematiniame pasaulyje esama teisybės, tai būtent šis tinklas turėtų būti trumpiausias. Iš tikrųjų taip ir yra! (Vis dėlto dar neskubėkite daryti platesnių apibendrinimų apie teisingumą!)



7.31 pav. a) Keturi miestai stačiakampio viršūnėse. b) Minimaliojo jungiančio medžio tinklas, kurio bendras ilgis yra 100 km. c) Tinklas su dviem Šteinerio taškais (S_1 ir S_2). Bendras ilgis – maždaug 93,3 km. d) Kitas tinklas su dviem Šteinerio taškais (S_3 ir S_4). Tai – trumpiausias tinklas.

15 pavyzdys. Dabar panagrinėkime keturis miestus siauros trapecijos viršūnėse (7.32 a) pav.). Minimalųjį jungiantįjį medį matome 7.32 b) pav. Jo ilgis – 60 kilometrų. Na, o trumpiausias tinklas? Mes vėl beveik tikri, kad reikėtų ieškoti tinklo, turinčio du vidinius mazgus – Šteinerio taškus. Tačiau po keleto bandymų suvokiame, kad viskas veltui! Ši trapecija – per siaura arba, tiksliau kalbant, kampai A ir B yra per dideli. Taigi trapecijos viduje negalimas nė vienas Šteinerio taškas. Todėl trumpiausias tinklas, koks jis bebūtų, Šteinerio mazgo taškų neturi.

Na, gerai – nėra Šteinerio taškų, tai nėra. Gal tada tiktų kokie nors kiti vidiniai mazgo taškai? Pavyzdžiui, X ar T raidės pavidalo mazgai arba kitokie, ne Šteinerio – Y raidės pavidalo mazgai? Kad ir kaip šie pasiūlymai atrodytų tinkami, pasirodo, trumpiausiems tinklams yra teisingas toks nuostabus teiginys: *bet kokiame trumpiausiame tinkle vidiniai mazgo taškai gali būti tik Šteinerio taškai* (tarsi trumpiausias tinklas įsako savo vidiniams mazgo taškams arba virsti Šteinerio taškais, arba išnykti). Tai svarbus ir nepaprastai reikšmingas faktas, prie kurio greitai vėl grįšime. O kol kas išsiaiškinkime, ką jis mums sako šiame pavyzdyje. Ogi tai, kad trumpiausias tinklas negali turėti vidinių mazgų, nes tai arba Šteinerio taškai, arba nieko! Bet mes jau žinome, kad geriausias tinklas be vidinių mazgo taškų – tai minimalusis jungiantysis medis! Išvada: keturiems miestams, parodytiems 7.32 a) pav., *trumpiausias tinklas ir minimalusis jungiantysis medis sutampa*.

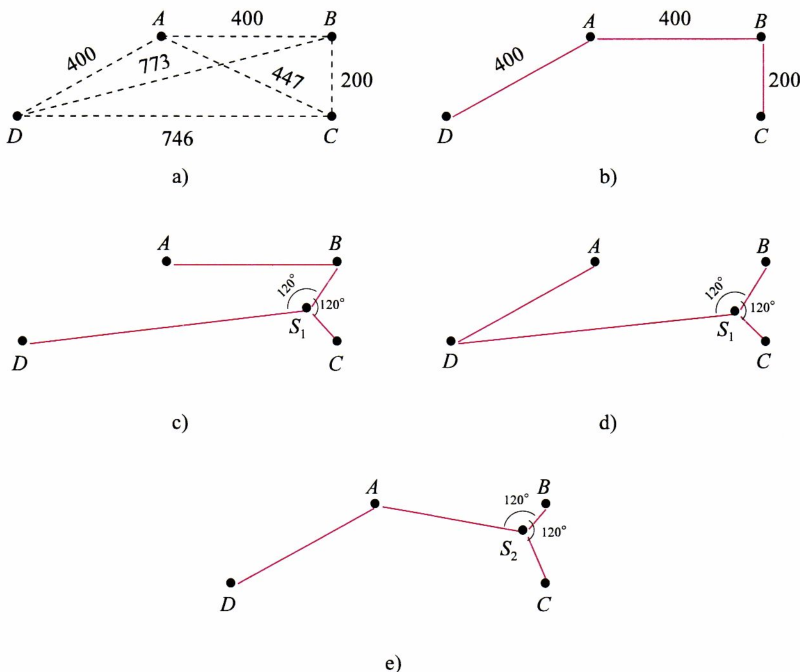


7.32 pav. a) Keturi miestai trapecijos viršūnėse. b) Minimalusis keturis miestus jungiantis medis (bendras ilgis – 60 km). c) Tinklas, turintis X formos mazgą taške M_1, negali būti trumpesnis, negu MJM (jo bendras ilgis – 77,46 km). d) Tinklas, turintis T formos mazgų porą taškuose M_2 ir M_3, yra dar blogesnis (bendras ilgis – 84,68 km). e) Trumpiausias tinklas ir MJM sutampa!

29.– 76

16 pavyzdys. Žvilgtelėkime į dar kitus keturis miestus A, B, C ir D. Šį kartą jų išsidėstymas parodytas 7.33 a) pav., minimalusis jungiantysis medis parodytas 7.33 b) pav. Jo ilgis – 1000 kilometrų. Po 15 pavyzdžio jį galime laikyti rimtu kandidatu į trumpiausio tinklo vardą. Dabar mes žinome dar daugiau: bet koks tinklas, geresnis už MJM, turi turėti vidinių mazgo taškų, ir būtų geriausia, kad jie būtų Šteinerio taškai. Miestai čia išsidėstę taip, kad dviejų vidinių Šteinerio mazgų būti negali – tai geometriškai neįmanoma (pabandykite jų paieškoti, jei galvojate priešingai!). Kita vertus, galimi trys tinklai, turintys vieną vidinį mazgo tašką (žr. 7.33 c), d) ir e) pav.). Tai visi galimi MJM konkurentai. Dviejų iš jų (7.33 c) ir d)) bendras ilgis yra po 1325 kilometro, t.y. jie net nepriartėja prie MJM. O štai tinklo, parodyto 7.33 e) pav., ilgis yra apie 982 kilometro. Kadangi tai – geriausias iš visų variantų, tai jis ir yra trumpiausias tinklas.

Pagrindinę 14, 15 ir 16 pavyzdžių pamoką sudaro dvi dalys. Pirma, jei trumpiausias tinklas yra ne MJM, tai jame yra vidinių mazgo taškų, kurie turi būti Šteinerio taškai (viena nauja naudinga sąvoka: nuo šiol visus medžio tipo tinklus, kurių visi vidiniai mazgai yra Šteinerio taškai, vadinsime **Šteinerio medžiais**). Antra, tai, kad tinklas yra Šteinerio medis, dar negarantuoja, kad jis yra trumpiausias tinklas. Kaip matėme 16 pavyzdyje, ne visi iš galimų Šteinerio medžių sudaro trumpiausią tinklą.



7.33 pav. a) Atstumai tarp keturių miestų.
b) Minimalusis jungiantysis medis (bendras ilgis – 1000 km).
c) ir d) Abu šie tinklai turi po vieną Šteinerio tašką, jungiantį miestus B, C ir D. Abiejų tinklų ilgiai vienodi – apie 1325 km, o tai kur kas daugiau už MJM ilgį.
e) Kitas pretendentas, turintis vieną Šteinerio tašką. Jo ilgis – apie 982 km – mažesnis už MJM, taigi jis ir yra trumpiausias tinklas, jungiantis keturis miestus.

Kas atsitinka, didinant miestų skaičių? Kaip tada ieškoti trumpiausio tinklo? Atsakymas paprastas: „labai atidžiai“. Deja, kaip ir 6 skyriaus keliaujančiojo pirklio uždavinyje, mes atsiduriame ant tokio pat netvirto pagrindo – nėra efektyvaus algoritmo, kuris visada garantuotų trumpiausio tinklo radimą. Tokiu atveju geriausia, ką galime padaryti – tai pasinaudoti minėtuose pavyzdžiuose pastebėta taisykle.

Trumpiausias tinklas, jungiantis grupę miestų, yra arba

- Minimalusis jungiantysis medis (nėra vidinių mazgų), arba
- Šteinerio medis (yra vidinių mazgų).

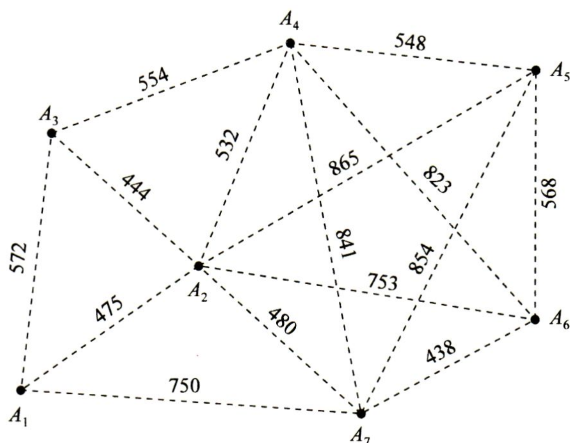
Tai reiškia, kad mes visada galime rasti trumpiausią tinklą, peržiūrėję visus galimus Šteinerio medžius, išrinkę iš jų trumpiausią ir palyginę pastarąjį su MJM. Trumpesnysis ir bus trumpiausias tinklas. Tai skamba gana gerai, tačiau problemą vėl sudaro „sprogstamas“ Šteinerio medžių skaičiaus augimas. Turint viso labo 10 miestų, galimų Šteinerio medžių, kuriuos reikės peržiūrėti, bus jau šimtai tūkstančių; dvidešimčiai miestų jų bus jau milijardai.

Kokia gi būtų išeitis? Jeigu, kaip 6 skyriuje, atsisakytume maksimalizmo ir pasitenkintume trumpu, bet nebūtinai trumpiausiu tinklu, galėtume imtis uždavinio su bet kuriuo miestų skaičiumi. Tam reikia kokio nors efektyvaus apytikrio algoritmo. Šiuo metu yra žinomi keli labai geri trumpų tinklų paieškos algoritmai. Gana įdomu, kad vienas iš geriausių algoritmų yra stulbinančiai paprastas, ir jį mes jau žinome – tai Kruskalo MJM sudarymo algoritmas. Kurį laiką buvo žinoma, kad MJM paprastai nedaug skiriasi nuo trumpiausio tinklo, tačiau tik 1990 metais matematikai F. Vangas (Frank Hwang) iš Bello laboratorijų ir Ding Žu Du (Ding-Zhu Du) iš Prinstono Universiteto nustatė ryšį tarp jų: *MJM ir trumpiausio tinklo skirtumas niekada nėra didesnis kaip* 13,4% (*o dažniausiai jis net mažesnis už* 5%).

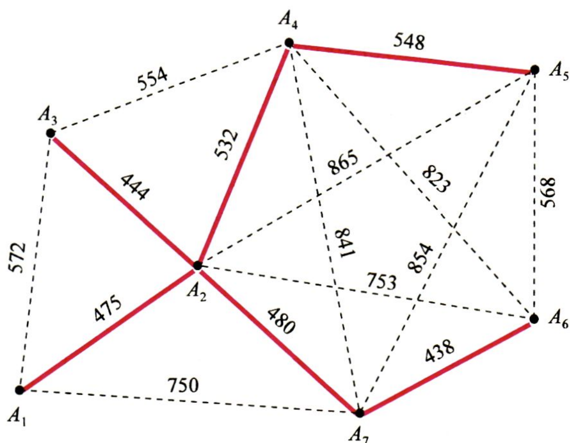
Skyrelį užbaigsime dar vienu pavyzdžiu. Čia ketiname ne tiek knebinėti detales, kiek trumpai žvilgtelėti į bendrą vaizdą.

---

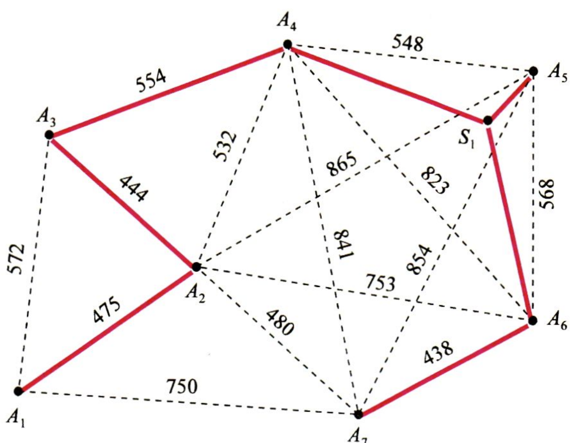
17 pavyzdys. Veiksmas vyksta 2125 metais. Veiksmo vieta: Romulako planeta. Septynios skirtingos humanoidų tyrinėtojų grupės turi įsikurti kosminėse kolonijose (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ir A_7), pavaizduotose 7.34 a) pav. Atstumas žvaigždėlapyje nurodytas *romulėmis* (viena romulė lygi maždaug 5 kilometrams). Reikia sujungti visas kolonijas taip, kad kolonijų gyventojai galėtų keliauti ir prekiauti vieni su kitais. Tuo tikslu mums reikia suprojektuoti *romulvamzdžių* tinklą (romulvamzdis – milžiniškas siurbiamasis vamzdis, kuriuo transportas ir kroviniai gali keliauti svaiginamais greičiais). Romulvamzdžiai yra labai brangūs (maždaug milijardas *roteksų* už vieną *romulę*), todėl svarbu rasti trumpiausią tinklą. Kandidatai yra MJM ir visi septynias



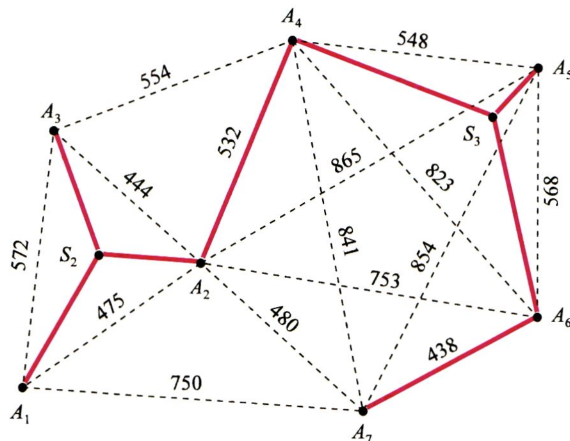
7.34 a) pav. Septynios Romulako planetos humanoidų kolonijos. Atstumai tarp kolonijų nurodyti romulėmis.



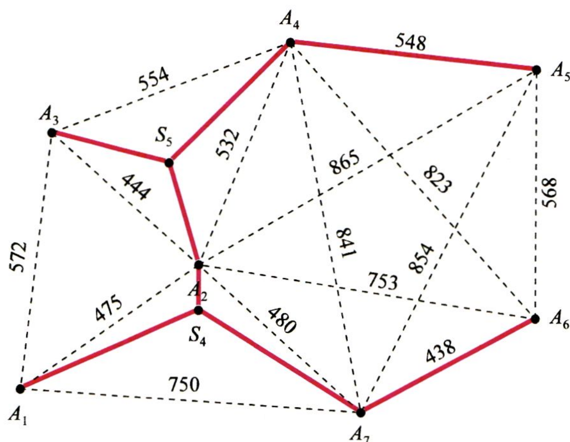
7.34 b) pav. Septynias kolonijas jungiantis MJM. Bendras ilgis – 2914 romulių.



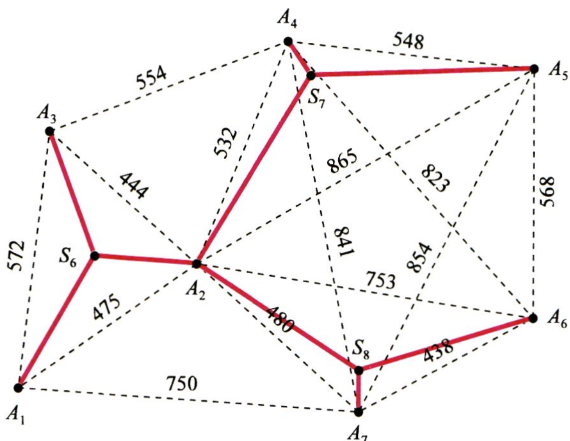
7.34 c) pav. Šteinerio medis su vienu Šteinerio tašku. Bendras ilgis – 2968 romulės.



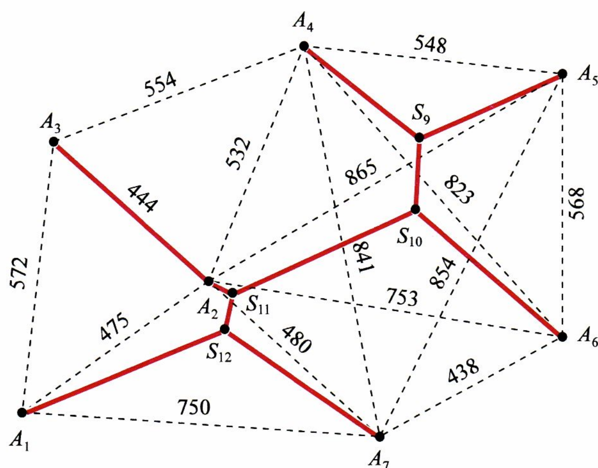
7.34 d) pav. Šteinerio medis su dviem Šteinerio taškais. Bendras ilgis – 2882,5 romulės.



7.34 e) pav. Šteinerio medis su dviem Šteinerio taškais. Bendras ilgis – 2809 romulės.



7.34 f) pav. Šteinerio medis su trimis Šteinerio taškais. Bendras ilgis – 2840 romulių.



7.34 g) pav. **Šteinerio medis su keturiais Šteinerio taškais. Bendras ilgis – 3060 romulių.**

kolonijas jungiantys Šteinerio medžiai. Tokių Šteinerio medžių yra tūkstančiai, o keli iš jų parodyti 7.34 c)–g) pav. MJM pavaizduotas 7.34 b) pav. Ieškant trumpiausio kelio, visiems Šteinerio medžiams patikrinti reikalingas kompiuteris. Atlikus tūkstančius skaičiavimų, gautas toks atsakymas: trumpiausias tinklas – tai Šteinerio tinklas, parodytas 7.34 e) pav.

Ar daug laimėjome tiek vargę? Spręskite patys: MJM ilgis – 2914 romulių, o trumpiausias tinklas, turintis 2809 romules, sutaupo 105 romules...

IŠVADOS

Šiame skyriuje nagrinėjome, kaip taškų aibę optimaliai sujungti į tinklą (žodis „optimalus" dažniausiai reiškia pigiausią arba trumpiausią). Gyvenime tinklo taškai reiškia geografines vietoves (miestus, siurblines, vandens purkštuvus ir pan.), o jungtys gali būti greitkeliai, vamzdynai, telefonų linijos ir pan. Priklausomai nuo aplinkybių mes nagrinėjome du skirtingus uždavinio sprendimo variantus.

1 *variantas.* Pirmoje skyriaus dalyje mes turėjome konstruoti tinklą, kai neleistini jokie nauji mazgai (viršūnės), išskyrus jau esančius. Tokiu atveju optimalus tinklas yra *minimalusis jungiantysis medis.* Minimaliojo jungiančiojo medžio ieškojimas buvo istorija su laiminga pabaiga – optimalų atsakymą galima efektyviai rasti Kruskalo algoritmu.

2 *variantas.* Antroje skyriaus dalyje nagrinėjome iš pirmo žvilgsnio nedidelę pirmo varianto modifikaciją, kai nedraudžiama naudoti naujų mazgų. Šiuo atveju reikia rasti taškus jungiantį *trumpiausią tinklą.* Ši situacija, pasirodo, yra gerokai sudėtingesnė, tačiau mes žinome keletą dalykų:

1. Kartais minimalusis jungiantysis medis ir yra trumpiausiasis tinklas (12 ir 15 pavyzdžiai), tačiau dažniausiai taip nėra. Kai trumpiausiasis tinklas yra trumpesnis už minimalųjį jungiantįjį medį, kyla klausimas:

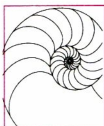
ar daug trumpesnis? Kelis dešimtmečius matematikai ieškojo atsakymo į šį klausimą, ir paaiškėjo, kad minimaliojo jungiančiojo medžio ir trumpiausiojo tinklo skirtumas dažniausiai yra santykinai mažas ir *niekada nėra didesnis už* 13,4%.

2. Trumpiausiame tinkle bet koks naujas mazgo taškas (juos vadiname *vidiniais* taškais) turi būti raidės Y pavidalo mazgas su lygiais kampais (tokius mazgo taškus vadiname *Šteinerio* taškais). Pradinius taškus jungiantis tinklas vadinamas *Šteinerio medžiu*, jei jis yra medis (t. y. neturi ciklų), o jo visi vidiniai mazgai yra Šteinerio taškai. Taigi, *jei trumpiausiasis tinklas turi vidinių mazgo taškų, tai jis yra Šteinerio medis, o jei ne – tai jis yra minimalusis jungiantysis medis.*

3. Nors paprastai duotos taškų aibės minimalių jungiančiųjų medžių yra vos keli (dažniausiai vienas), tačiau galimų Šteinerio medžių skaičius dažniausiai yra labai didelis ir sunkiai randamas*. Pavyzdžiui, septyniems taškams Šteinerio medžių gali būti tūkstančiai, o dešimčiai taškų – milijonai.

Duotos taškų aibės Šteinerio medžių visumą (kartu su minimaliuoju jungiančiuoju medžiu) galima palyginti su šieno kupeta, kurioje reikia rasti adatą – trumpiausią tinklą. Mes tikrai žinome, kad adata ten yra, bet vargu ar visos kupetos perrinkimas po šiaudelį būtų geriausias paieškos būdas. Deja, jokių geresnių metodų, išskyrus kelis palyginti nedidelius pagerinimus, nėra žinoma. Taškų aibę jungiančio trumpiausio tinklo uždavinys daug kuo panašus į keliaujančiojo pirklio uždavinį: nėra žinoma jokių efektyvių algoritmų ir labai panašu, kad jų iš viso nėra. Kita vertus, pastaraisiais metais atrasta labai efektyvių apytikrių algoritmų, ir vienas iš jų yra mūsų geras pažįstamas – Kruskalo algoritmas. Taigi galima būtų pasakyti, kad šieno kupetoje ne viena adata, ir jeigu auksinę rasti ir sunku, tai sidabrinę – visiškai įmanoma.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



jungiantysis medis
Kruskalo algoritmas
mazgas
mazgo taškas
medis
minimalaus tinklo uždavinys
minimalusis jungiantysis medis
pografis
Šteinerio medis
Šteinerio taškas
trumpiausiasis tinklas

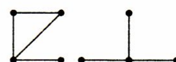
* Yra vienas originalus būdas Šteinerio medžiui (ne visada trumpiausiam) rasti, naudojantis muilo burbulais (žr. šio skyriaus priedą).

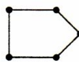
PRATIMAI

Apšilimas

1. Nustatykite, kurie iš žemiau pavaizduotų grafų yra medžiai. Paaiškinkite atsakymus.

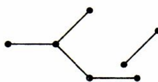

a)


b)

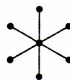

c)

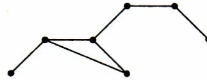

d)

2. Nustatykite, kurie iš žemiau pavaizduotų grafų yra medžiai. Paaiškinkite atsakymus.

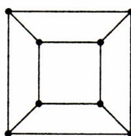

a)

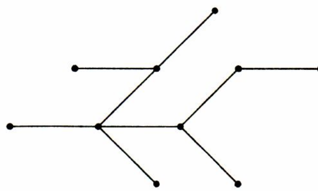

b)

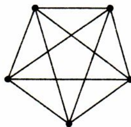

c)

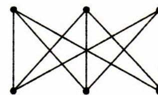

d)

3. Raskite po vieną žemiau pavaizduotų grafų jungiantįjį medį.

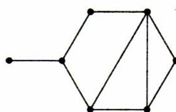

a)

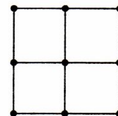

b)


c)

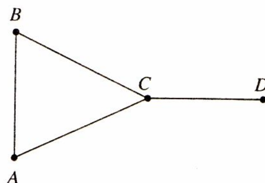

d)

4. Raskite po du žemiau pavaizduotų grafų jungiančiuosius medžius.

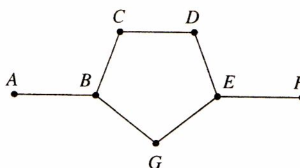

a)


b)

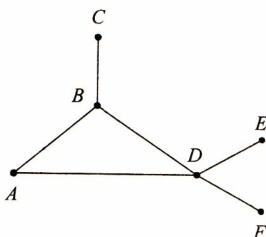
5. Raskite visus žemiau pavaizduoto grafo jungiančiuosius medžius.



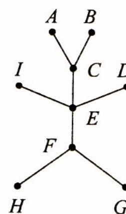
6. Raskite visus žemiau pavaizduoto grafo jungiančiuosius medžius.



7. Kiek skirtingų jungiančiųjų medžių turi kiekvienas iš žemiau pavaizduotų grafų?

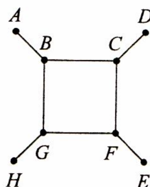


a)

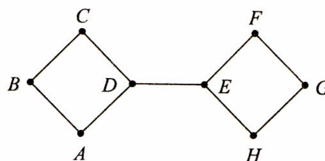


b)

8. Kiek skirtingų jungiančiųjų medžių turi kiekvienas iš žemiau pavaizduotų grafų?

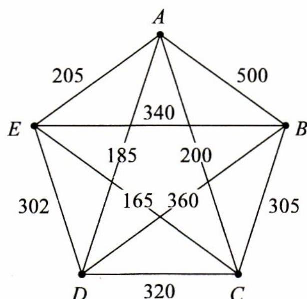


a)

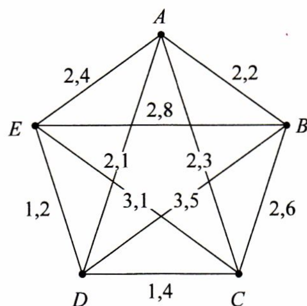


b)

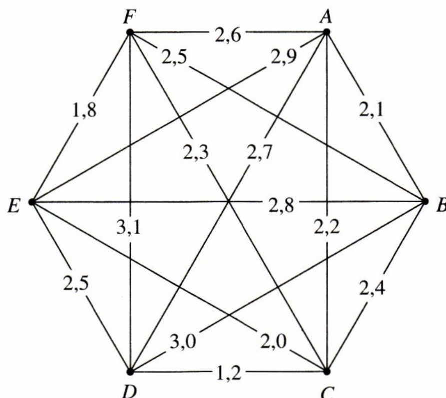
9. Kruskalo algoritmu raskite žemiau pavaizduoto svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį.



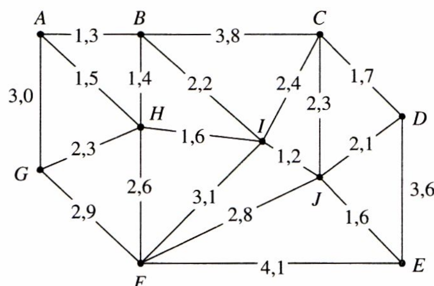
10. Kruskalo algoritmu raskite žemiau pavaizduoto svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį.



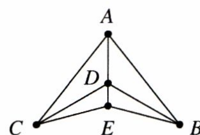
11. Kruskalo algoritmu raskite žemiau pavaizduoto svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį.



12. Kruskalo algoritmu raskite žemiau pavaizduoto svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį.



13 ir 14 pratimai susiję su žemiau pavaizduotu schema, kurioje $AC = AB$, $DC = DB$ ir kampas $CDB = 120°$.



13. a) Kas daugiau: $CD + DB$ ar $CE + ED + EB$? Paaiškinkite.

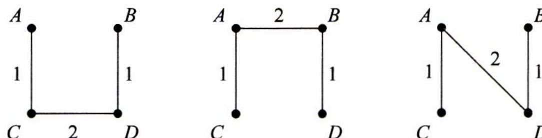
b) Koks trumpiausias tinklas jungia taškus C, D ir B? Paaiškinkite.

c) Koks trumpiausias tinklas jungia taškus C, E ir B? Paaiškinkite.

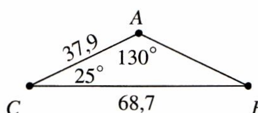
14. a) Kas daugiau: $CA + AB$ ar $DC + DA + DB$? Paaiškinkite.

b) Kas daugiau: $EC + EA + EB$ ar $DC + DA + DB$? Paaiškinkite.

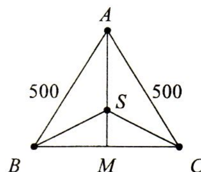
15. Raskite trumpiausio tinklo, jungiančio taškus A, B ir C, ilgį.



16. Raskite trumpiausio tinklo, jungiančio taškus A, B ir C, ilgį.



17–20 *pratimuose kalbama apie lygiašonį trikampį ABC, pavaizduotą žemiau. Šoninių kraštinių ilgiai – 500, AM – aukštinė, S – Šteinerio taškas.*



17. Įrodykite, kad trikampiai ASB, BSC ir CSA yra lygūs.

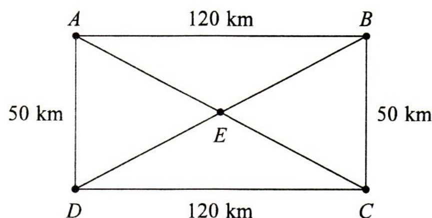
18. Įrodykite, kad $SA = SB = SC$. (*Nurodymas.* Pasinaudokite 17 pratimu.)

19. Raskite atkarpų a) MA ir b) SA ilgius.

20. Įrodykite, kad trumpiausio tinklo, jungiančio taškus A, B ir C, ilgis yra apie 966. (*Nurodymas.* Pasinaudokite 19 b) pratimu.)

Treniruotė

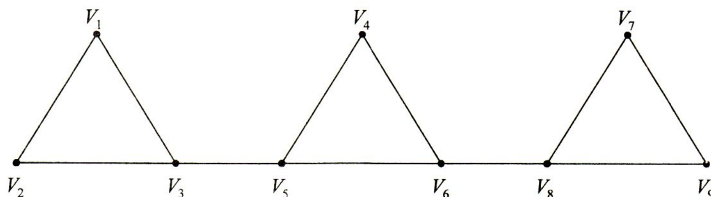
21. Penkių miestų – A, B, C, D ir E – išsidėstymas pavaizduotas schemoje žemiau. Juos reikia sujungti geležinkeliu, kurio tiesimo kaina proporcinga atstumui. Raskite pigiausiai kainuojančio geležinkelio tinklo ilgį (negalima prijungti naujų mazgo taškų).



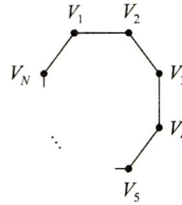
22. Paaiškinkite, kodėl, taikant Kruskalo algoritmą jungiajam N-viršūniam grafui G, reikia atlikti lygiai $N - 1$ žingsnį.

23. Paaiškinkite, kodėl visos medžio briaunos yra tiltai. Prisiminkite, kad tiltas yra briauna, kurią pašalinus grafas tampa nejungus.

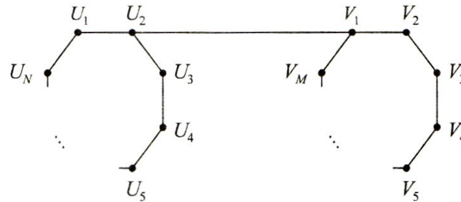
24. Kiek skirtingų jungiančiųjų medžių turi žemiau pavaizduoti grafai?
a)



b)



c)



25. a) Ar egzistuoja keturviršūnis medis, kurio viršūnių laipsniai yra 2, 2, 3 ir 3? Jei taip, pateikite pavyzdį. Jei ne, paaiškinkite kodėl.

b) Ką gausime sudėję keturviršūnio medžio visų viršūnių laipsnius?

c) Ką gausime sudėję penkiaviršūnio medžio visų viršūnių laipsnius?

d) Ką gausime sudėję N-viršūnio medžio visų viršūnių laipsnius?

26. Pateikite pavyzdžius

a) keturviršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra 1, 1, 2 ir 2;

b) šešiaviršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra 1, 1, 2, 2, 2 ir 2;

c) N-viršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra $1, 1, 2, 2, 2, \ldots, 2$.

27. Pateikite pavyzdžius

a) keturviršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra 1, 1, 1 ir 3;

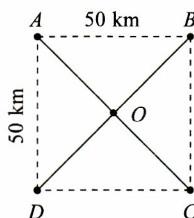
b) penkiaviršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra 1, 1, 1, 1, 4;

c) N-viršūnio medžio, kurio viršūnių laipsniai yra $1, 1, 1, \ldots, 1, N-1$.

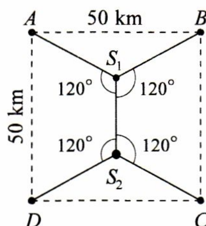
28. Reikia nutiesti devynis miestus ($C_1, C_2, C_3, \ldots, C_9$) jungiantį greitkelį. Lentelėje kitame puslapyje matome kelio tiesimo tarp kiekvienų dviejų miestų kainas (milijonais litų). Kruskalo algoritmu raskite šio uždavinio minimalųjį jungiantįjį medį.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
C_1	*	1,3	3,4	6,6	2,6	3,5	5,7	1,1	3,8
C_2	1,3	*	2,4	7,9	1,7	2,3	7,0	2,4	3,9
C_3	3,4	2,4	*	9,9	3,4	1,0	9,1	4,4	6,5
C_4	6,6	7,9	9,9	*	8,2	9,7	0,9	5,5	4,9
C_5	2,6	1,7	3,4	8,2	*	4,8	7,4	3,7	3,5
C_6	3,5	2,3	1,0	9,7	4,8	*	8,9	4,4	5,8
C_7	5,7	7,0	9,1	0,9	7,4	8,9	*	4,7	3,9
C_8	1,1	2,4	4,4	5,5	3,7	4,4	4,7	*	2,8
C_9	3,8	3,9	6,5	4,9	3,5	5,8	3,9	2,8	*

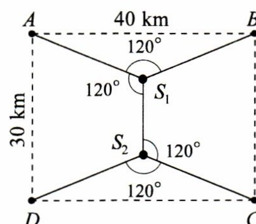
29. Įrodykite, kad žemiau pavaizduoto tinklo ilgis lygus $100\sqrt{2} \approx 141{,}4$.



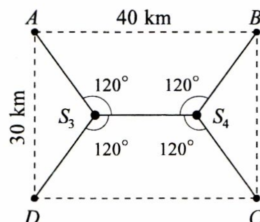
30. Remdamiesi 30° kampo savybe, įrodykite, kad žemiau pavaizduoto tinklo ilgis lygus $50\sqrt{3} + 50 \approx 136{,}6$.



31. a) Remdamiesi 30° kampo savybe, įrodykite, kad žemiau pavaizduoto tinklo ilgis lygus $40\sqrt{3} + 30 \approx 99{,}3$.



b) Įrodykite, kad žemiau pavaizduoto tinklo ilgis yra $30\sqrt{3}+40 \approx 91,96$.

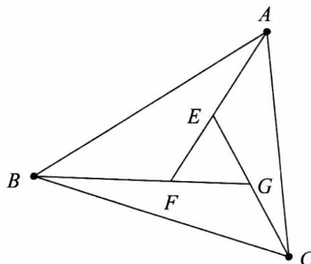


32. Trikampio ABC, parodyto žemiau, viduje yra lygiakraštis trikampis EFG.

a) Raskite kampus BFA, AEC ir CGB.

b) Paaiškinkite, kodėl visi trikampio ABC kampai yra mažesni už $120°$.

c) Paaiškinkite, kodėl trikampio ABC Šteinerio taškas yra trikampio EFG viduje.



Varžybos

33. a) Įrodykite, kad medžio, turinčio ne mažiau kaip dvi viršūnes, bent dviejų (gali būti ir daugiau) viršūnių laipsniai lygūs 1. (*Nurodymas*. Pasinaudokite 25 d) pratimu.)

b) Medis turi ne mažiau kaip tris viršūnes. Paaiškinkite, kodėl jos negali turėti vienodų laipsnių.

34. a) Tarkime, kad reikia rasti svorinio grafo minimalųjį jungiantįjį medį, kuriam priklausytų iš anksto nurodyta jo briauna. Aprašykite modifikuotąjį Kruskalo algoritmą šiai užduočiai atlikti.

b) Grįžkime prie 28 pratimo. Tarkime, kad C_3 ir C_4 yra du didžiausi miestai, kuriuos būtinai reikia tiesiogiai sujungti greitkelio ruožu. Raskite minimalųjį jungiantįjį medį, kuriame viena iš briaunų jungia C_3 ir C_4.

35. Primo algoritmas minimaliajam jungiančiajam medžiui rasti:

- **0 žingsnis.** Pasirenkame pradinę (bet kokią) viršūnę S. Pažymėkime ją raudonai.

- **1 žingsnis.** Raskime artimiausią viršūnės kaimynę P_1. Pažymėkime P_1 ir briauną SP_1 raudonai.
- **2 žingsnis.** Raskime raudonojo pografio artimiausią kaimynę (t.y. viršūnę, artimiausią kuriai nors raudonai viršūnei). Pažymėkime raudonai ją ir briauną, jungiančią viršūnę su raudonu pografiu. Ištrinkime visas juodas briaunas, jungiančias dvi raudonas viršūnes.

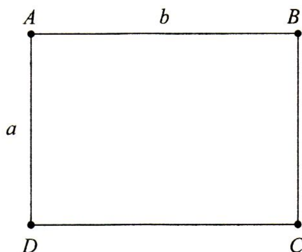
2 žingsnį kartojame tol, kol visos grafo viršūnės bus pažymėtos raudonai. Raudonasis pografis yra minimalusis jungiantysis medis.

Dabar pabandykime Primo algoritmą pritaikyti grafui, pavaizduotam 7.1 pav. Pradinį tašką imkime B ir pažymėkime jį raudonai.

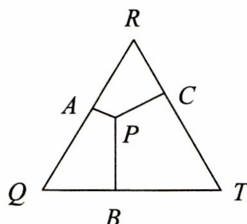
- **1 žingsnis.** Viršūnės B artimiausia kaimynė yra A. Pažymėkime viršūnę A ir briauną AB raudonai.
- **2 žingsnis.** Artimiausia raudonosioms viršūnėms yra viršūnė E, nes iš visų briaunų, išeinančių iš A arba B, trumpiausia yra EB (1,9 mln. Lt). Pažymime viršūnę E ir briauną EB raudonai. Ištriname EA.
- **3 žingsnis.** Artimiausia raudonųjų viršūnių juoda kaimynė yra F (briaunos FE kaina 1,2 mln. Lt). Pažymime viršūnę F ir briauną FE raudonai. Ištriname FA ir FB.
- **4 žingsnis.** Artimiausia raudonųjų viršūnių juoda kaimynė yra D (briaunos DE kaina – 1,5 mln. Lt). Pažymime viršūnę D ir briauną DE raudonai. Ištriname DA, DB ir DF.
- **5 žingsnis.** Artimiausia raudonųjų viršūnių juoda kaimynė yra C (briaunos DE kaina – 2,9 mln. Lt). Pažymime viršūnę C ir briauną CB raudonai. Tuo ir baigiame, nes visos viršūnės jau raudonos.

Primo algoritmu raskite 9 pavyzdžio drėkinimo sistemos minimalųjį jungiantįjį medį.

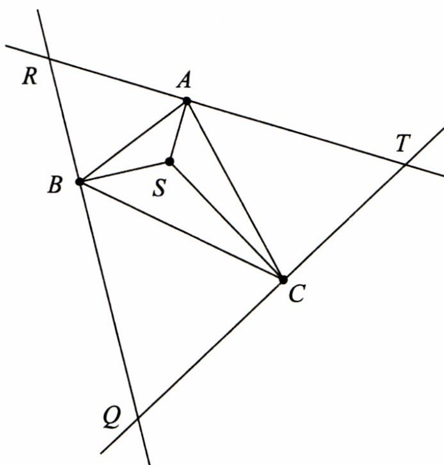
36. Nagrinėkime keturis taškus A, B, C ir D – stačiakampio, kurio ilgis b ir plotis a ($a < b$), viršūnes (žr. brėžinį žemiau). Kokias sąlygas turi tenkinti a ir b, kad minimaliojo jungiančiojo medžio ilgis būtų mažesnis už *vieno* (iš dviejų) Šteinerio medžio ilgį.



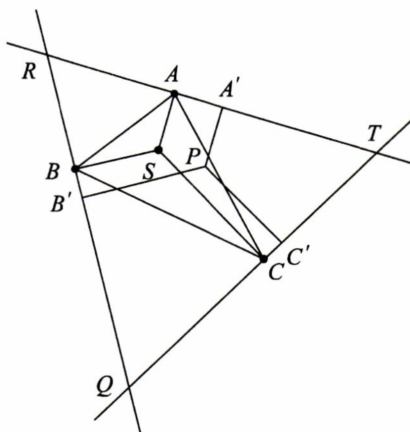
37. a) Sakykime, taškas P yra lygiakraščio trikampio RQT viduje (žr. brėžinį). Iš P į visas tris kraštines nuleisti statmenys. Įrodykite, kad atkarpų PA, PB ir PC ilgių suma yra lygi trikampio aukštinei. (*Nurodymas*. Apskaičiuokite trikampių RPQ, QPT ir TPR plotus. Prilyginkite šių trijų plotų sumą trikampio RQT plotui.)



b) Sakykime, ABC yra trikampis, kurio visi kampai mažesni už $120°$, o S – trikampio viduje esantis Šteinerio taškas. Nubrėžkime tieses, statmenas SA, SB ir SC. Paaiškinkite, kodėl šios tiesės sudaro lygiakraštį trikampį RQT.



c) Sakykime, kad P yra kitas trikampio ABC taškas (ne S), iš kurio į trikampio RQT kraštines nuleisti statmenys. Pasinaudoję a) dalimi, įrodykite, kad $PA'+PB'+PC' = SA+SB+SC$ ir, be to, $PA \geqslant PA'$, $PB \geqslant PB'$ bei $PC \geqslant PC'$ (kodėl?), taigi $PA + PB + PC \geqslant SA + SB + SC$.



d) Remdamiesi punktu c), įrodykite, kad, imant kitą mazgo tašką P, negalima gauti trumpesnio tinklo nei su Šteinerio tašku S.

PRIEDAS. Muilo burbulų metodas

Kiekvienas vaikas žino magiškus muilo burbulus: paėmę vielos ar plastmasės žiedą, įmerkę jį į muilo tirpalą, ištraukę ir papūtę, gauname nuostabius vaivorykštės spalvų balionus, žadinančius mūsų fantaziją. Suaugusieji mielai taip pat kartą kitą pūsteli.

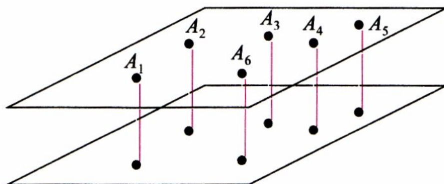
Kas gi ypatinga yra muiliname vandenyje, kad taip atsitinka? Labai supaprastintas muilo burbulus sukuriančių gamtos jėgų paaiškinimas padės mums suprasti, kaip tos pačios jėgos padeda rasti taškų aibę jungiantį Šteinerio medį.

Paimkime bet kokį skystį ir įpilkime jį į indą. Kai skystis yra ramybės būsenos, vienos molekulės yra viduje, kitos – paviršiuje. Vidinės molekulės apsuptos tokių pat molekulių ir todėl yra puikiai subalansuotos – molekulių tarpusavio traukos jėgos kompensuojamos. Tačiau paviršiuje esančios molekulės yra nesubalansuotos, nes jos tik iš vienos pusės apsuptos tokių pat molekulių. Todėl reikia dar atsižvelgti į vadinamąsias *įtempio jėgas.* Dėl paviršiaus įtempimo skysčio viršutinis sluoksnis yra toks, lyg būtų padarytas iš labai plonos ir elastingos medžiagos. Paviršiaus sluoksnio elastingumas priklauso nuo skysčio molekulių struktūros. Muilo ar kitos plaunamosios medžiagos molekulės yra ypač tinkamos nepaprastai elastingam paviršiui sukurti. Idealus muilo tirpalas gaunamas, sumaišius maždaug lygias indų plovimo miltelių ir vandens dalis bei įpylus į gautąjį tirpalą šiek tiek glicerino (tik ne nitroglicerino!)

Pasitelkime fundamentalų fizikos principą: fizikinė sistema lieka tam tikros būsenos tik tada, kai ji negali *lengvai* pereiti į kitą, mažiau energijos turinčią būseną. Dėl savo didelio elastingumo muilo tirpalo paviršiaus sluoksnis

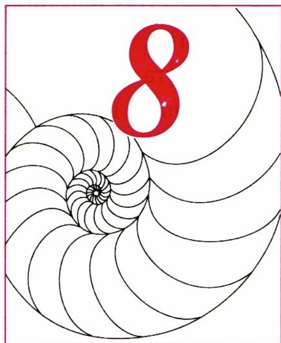
nesunkiai keičia savo pavidalą, kol nepereina į pakankamai „patogią“, santykinai mažiausią energiją turinčią būseną. Štai čia ir galima įžiūrėti ryšį su Šteinerio medžiais.

Tarkime, kad norime rasti trumpiausią taškų aibės $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ tinklą. Šiuos taškus jungiančio Šteinerio medžio ieškosime įmantriu prietaisu, kurį pavadinsime *muilo burbulų kompiuteriu.* Iš pradžių taškus $A_1, A_2, \dots, A_N$ tiksliai pažymime popieriaus lape. Mastelis turi būti toks, kad taškai neatsidurtų per arti vienas kito (ne mažiau kaip 3–4 centimetrai tarp taškų). Imkime dvi organinio stiklo plokšteles ir, naudodamiesi popieriniu planu kaip šablonu, išgręžkime abiejose plokštelėse mažas skylutes taškus atitinkančiose vietose. Pro šias skylutes prakiškime metalinius ar plastmasinius strypelius, palikdami tarp plokštelių 2–3 centimetrų tarpą. Gautasis įrenginys turėtų atrodyti maždaug taip.



Įmerkus prietaisą į muilo tirpalą ir po to jį ištraukus, muilo burbulų kompiuteris ima veikti. Plėvelė, susidariusi tarp plokštelių, jungia skirtingus strypelius. Kurį laiką ji judės, ieškodama minimalios energijos būsenos, bet gana greitai nurims Šteinerio medžio padėtyje.

Truputį gaila, kad gautasis Šteinerio medis nebūtinai yra trumpiausiasis tinklas. Aiškindamiesi, kodėl taip yra, per toli nukryptume nuo nagrinėjamos temos. Vis dėlto turime būti dėkingi gamtai už galimybę pasinaudoti paprastu įrenginiu, sugebančiu per sekundę apskaičiuoti tai, kas popieriuje užimtų ištisas valandas.



8 Tvarkaraščių sudarymas

Koks sunkiausias pasaulyje darbas? – Galvoti.

R. V. EMERSONAS (RALPH WALDO EMERSON)

Orientuotieji grafai ir kritiniai keliai

Kiek ilgai statomas namas? Į šį iš pirmo žvilgsnio lengvą klausimą nėra taip paprasta atsakyti. Viena vertus, akivaizdu, kad atsakymas priklauso nuo namo tipo ir jo dydžio, nuo darbininkų skaičiaus ir jų įgūdžių, nuo to, kokia technika ir įrankiai naudojami ir t.t. Mažiau akivaizdūs, nors lygiai taip pat svarbūs, yra kiti faktoriai – sugebėjimas taip organizuoti ir koordinuoti darbininkus, techniką ir darbų tvarką, kad viskas būtų daroma kuo efektyviau. Ši paskutinė problema daugiau ar mažiau tolygi matematiniam uždaviniui iš vienos didelės uždavinių klasės – *matematinės tvarkaraščių sudarymo teorijos*. Šiame skyriuje ir nagrinėsime tos teorijos pagrindus.

Grįžkime prie mūsų pradinio klausimo. Kaip skelbia JAV Statybos pramonės asociacija, vidutinio namo statyba trunka 1092 žmogaus darbo valandas. (Labai nesismulkinkime ir sakykime, kad tai 1100 valandų.) Ką šis skaičius reiškia, galima paaiškinti taip: vienam darbininkui, kuris išmano visus iki vieno namo statybos darbus, reikėtų dirbti apie 1100 valandų, kad pastatytų įsivaizduojamą vidutinį amerikietišką namą.

Dabar šį teiginį apverskime aukštyn kojomis: jei yra 1100 darbininkų, kurie moka dirbti bet kokį namų statybose reikalingą darbą, tai ar gali jie tą namą pastatyti per vieną valandą? Žinoma, atsakymas yra neigiamas. Iš tiesų net jeigu sukviestume tam darbui milijoną statybininkų, mes vis tiek nepastatytume namo per valandą. Namo statybos greitis atsiremia į tam tikrus fizinius apribojimus, kurie nepavaldūs statybininkams – kai kurių darbų negalima pagreitinti, kad ir kiek darbininkų sutrauktume tam darbui atlikti ir, kas dar svarbiau, tam tikri darbai gali būti pradėti, tik užbaigus kitus darbus (pavyzdžiui, stogą galima dengti tik pastačius sienas).

Gerai, sakysime, namo neįmanoma pastatyti per vieną valandą. Tačiau per kiek laiko galėtume jį pastatyti, jei turėtume neribotą darbininkų skaičių ir tesirūpintume vien tik namo statybos greičiu? (Kiek mums žinoma, namo statybos greičio rekordas yra 24 valandos.) Arba: per kiek laiko pastatytume namą, jei turėtume 10 vienodai dirbančių darbininkų? O jeigu tik 3? O kas, jeigu vietoje fiksuoto darbininkų skaičiaus mes turime tam tikrą darbų užbaigimo terminą – tarkime, mums duotas dviejų savaičių laikotarpis nuo darbo pradžios iki pabaigos. Ar mums samdyti 50 darbininkų? O gal užtektų 40? Koks yra mažiausias jų skaičius, kad suspėtume įvykdyti užduotį? Visus šiuos klausimus ir nagrinėja tvarkaraščių sudarymo teorija, ir nors tie klausimai gali skambėti paprastai, tačiau, net visiškai sumažinus reikalavimus, į juos atsakyti labai sunku.

Tvarkaraščių sudarymo uždaviniai, analogiški namo statybos uždaviniui, iškyla pačiose įvairiausiose gyvenimo situacijose, pradedant nuo gana lengvabūdiškų (banketo ruošimas), kasdieninių (mechanizmų naudojimas) ir baigiant pačiomis rimčiausiomis (kompiuterių programų vykdymo tvarka sistemose, panašiose į „žvaigždžių karų“ gynybines sistemas). Nors kiekvienas iš tokių uždavinių turi savo ypatumų ir retai kada du skirtingi tvarkaraščio sudarymo uždaviniai turi visiškai vienodą formą, vis dėlto daugumos šių uždavinių pagrindiniai elementai yra tie patys.

TVARKARAŠČIŲ SUDARYMAS: PAGRINDINIAI ELEMENTAI

Dabar aptarsime pagrindinius elementus, būdingus bet kokiam planavimui.

• **Vykdytojai.** Tai žodis, kuriuo apibūdinsime „darbininkus“, atliekančius užduotį. Žodis *vykdytojas* labiau tinka žmogui, tačiau tas vykdytojas nebūtinai turi būti žmogus. Tvarkaraštyje vykdytojas gali būti tiek robotas, tiek kompiuteris, tiek karvių melžimo agregatas ar netgi tuščia dėžė. Patogumo dėlei vykdytojus žymėsime raidėmis $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_N$ (N yra vykdytojų skaičius).

Vykdytojų skaičius gali būti nuo vieno vienintelio iki dešimčių tūkstančių, tačiau jeigu vykdytojas yra tik vienas, tai visi tvarkaraščio sudarymo klausimai yra paprasti ir nelabai įdomūs. Galima sakyti, kad tvarkaraščių sudarymo uždaviniai prasideda, kai N yra du ir daugiau.

• **Užduotys.** Įgyvendinant bet kokį sudėtingą projektą, atliekami atskiri darbai, dažnai vadinami *užduotimis*. Čia mums reikėtų būti tikslesniems. Užduotis apibrėšime kaip nedalomus veiklos vienetus, kurie (dėl savo esmės arba tiesiog mums taip nusprendus) negali būti padalyti į mažesnius vienetus. Dar daugiau – ir tai yra svarbiausia – šiame apibrėžime turima galvoje, kad *vieną užduotį visada atlieka vienas vykdytojas*.

Kad būtų aiškiau, išnagrinėkime paprastą pavyzdį. Jeigu meistras paveda vienam elektrikui išvedžioti name elektros instaliaciją, ir šis darbas truks šešias valandas, tai instaliavimą mes laikysime viena šešias valandas trunkančia užduotimi. Žinoma, jis galėjo tą patį darbą pavesti atlikti dviem elektrikams, kurie kartu būtų užtrukę, tarkime, keturias valandas. Tokiu atveju mes laikytume instaliavimo darbą kaip dvi atskiras keturių valandų užduotis. Užduotis žymėsime didžiosiomis raidėmis A, B, C ir t.t., nors kartais patogumo dėlei vartosime santrumpas (SS – sienų surinkimas, VT – vandentiekio tiesimas ir pan.).

Kiekvienu projekto įgyvendinimo momentu užduotis gali būti **neparengta** (tuo momentu ji negali būti pradėta vykdyti, nes nepatenkinti tam tikri kiti reikalavimai), **parengta** (t.y. ją jau galima vykdyti), **vykdoma** (kai tam tikras vykdytojas ją jau atlieka) arba **įvykdyta**.

• **Vykdymo trukmės.** Kiekvienai užduočiai yra skirtas skaičius, vadinamas užduoties *vykdymo trukme*. Jis reiškia nepertraukiamą laiko intervalą, per kurį vienas vykdytojas atlieka užduotį. Skaitytojas galėtų paklausti: „Kuris vykdytojas tiek užtrunka? Juk užduotį, kurią Arūnas atlieka per keturias valandas, Birutė padarytų per vieną valandą. Be to, yra Simas, kuris iš viso negali atlikti tos užduoties“. Tai tikrai komplikuoja padėtį, todėl padarysime svarbią prielaidą. Nuo šiol mes laikysime, kad *visi vykdytojai yra visiškai vienodi ir sugeba viską*. (Kitaip sakant, kiekvienas vykdytojas gali atlikti kiekvieną užduotį, ir užduoties vykdymo trukmė nepriklauso nuo vykdytojo.) Kad reikalai klostytųsi geriau, padarysime ir antrą prielaidą: *kai tik užduotis pradėta, vykdytojas ją tęsia be sustojimų*. Vykdytojas negali sustoti užduoties viduryje ir pradėti vykdyti kitą užduotį ar daryti pertrauką. Padarius šias prielaidas, jau galima kalbėti apie kiekvienos užduoties vykdymo trukmę – teigiamą skaičių, kurį rašysime skliausteliuose užduoties pavadinimo dešinėje. Taigi užrašas $A(5)$ reikš, kad užduoties A vykdymas truks 5 laiko vienetus (minutes, valandas ar kita), ir nesvarbu, ar tai daro V_1, V_2, ar dar kuris kitas vykdytojas.

• **Nuoseklumo sąryšiai.** Tai apribojimai užduočių vykdymo tvarkai. Būdinga nuoseklumo nurodymo forma yra tokia: *užduotis X eina prieš užduotį Y*, ir tai reiškia, kad užduotis Y negali būti pradėta vykdyti tol, kol neįvykdyta užduotis X.

Tokią tvarką patogu žymėti $X \to Y$. Neverta nė sakyti, kad nuoseklumas atspindi tai, jog realaus pasaulio reiškiniai vyksta tam tikra tvarka – juk

neįmanoma apsiauti batų anksčiau negu kojinių. Tvarkaraščio sudarymo uždavinys gali turėti šimtus ir net tūkstančius nuoseklumo sąryšių, kiekvienas iš kurių apriboja tvarkaraščio sudarytojo laisvę. (Praktiškai yra taip, kad kuo daugiau nuoseklumo sąryšių, tuo sunkiau sudaryti gerą tvarkaraštį.)

Žinoma, nuoseklumo tarp užduočių sąryšiai nėra būtina taisyklė, ir daugeliu atvejų nėra jokių apribojimų dviejų užduočių vykdymo tvarkai – kai kurie žmonės aunasi batus prieš apsivilkdami marškinius, kiti velkasi marškinius prieš audamiesi batus, o kai kurie gudruoliai sugeba autis batus ir vilktis marškinius vienu metu. Jei užduočių pora nepavaldi jokiam nuoseklumo sąryšiui (nei $X \rightarrow Y$, nei $Y \rightarrow X$), tai sakysime, kad užduotys X ir Y yra **nepriklausomos**. Yra ir tokių tvarkaraščių sudarymo uždavinių, kuriuose visos užduotys nepriklausomos (nėra nuoseklumo sąryšių, kuriais reikėtų rūpintis). Tokią situaciją smulkiau nagrinėsime šio skyriaus pabaigoje.

Dar dvi paskutinės pastabos apie nuoseklumo sąryšius. Pirma, nuoseklumo sąryšiai yra *tranzityvūs*: jei $X \rightarrow Y$ ir $Y \rightarrow Z$, tai turi būti teisinga, kad $X \rightarrow Z$. Taigi paskutinysis nuoseklumo sąryšis gaunamas iš dviejų pirmųjų, ir visai nebūtina specialiai jo nurodyti. Antra, *nuoseklumo sąryšiai neturi sudaryti ciklo*. Jei turėtume užduotis X, Y ir Z, kurioms teisingi nuoseklumo sąryšiai $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$ ir $Z \rightarrow X$, tai atėjus laikui sudaryti joms tvarkaraštį, mes atsidurtume panašioje padėtyje, kaip filosofas, klausiantis „Kas buvo pirmiau – višta ar kiaušinis?“ Nuo šiol laikysime, kad tvarkaraščių sudarymo uždaviniuose nuoseklumo sąryšiai yra tranzityvūs ir juose nėra ciklų.

Vykdytojai, užduotys, vykdymo trukmės ir nuoseklumo sąryšiai yra pagrindiniai kiekvieno tvarkaraščio sudarymo uždavinio elementai. Jie, vaizdžiai kalbant, duoda mums kortas į rankas. Tačiau kaip žaisti šiomis kortomis? Kaip užuominą išnagrinėkime visai paprastą pavyzdį.

---

1 pavyzdys. Turime du vykdytojus V_1 ir V_2, kuriems reikia sudaryti tvarkaraštį tokioms keturioms užduotims atlikti (vykdymo trukmės valandomis nurodytos skliausteliuose): $A(4)$, $B(5)$, $C(7)$, $D(3)$. Vienintelis nuoseklumo sąryšis yra $A \rightarrow C$. Netgi šioje paprastoje situacijoje galimi įvairūs tvarkaraščiai, keli iš jų parodyti 8.1 pav.

8.1 a) pav. parodytas tvarkaraštis, kuris, tiesą sakant, neprotingas. Visos trumpalaikės užduotys buvo pavestos vienam vykdytojui (V_1), o visos ilgalaikės – kitam vykdytojui (V_2). Tai aiškiai neišmintinga strategija. Šiame tvarkaraštyje **darbo trukmė** (laikas nuo projekto vykdymo pradžios iki paskutinės užduoties užbaigimo momento) yra 12 valandų.

8.1 b) pav. parodytas jau geresnis tvarkaraštis, tačiau jis pažeidžia nuoseklumo sąryšį $A \rightarrow C$. Mes paprasčiausiai negalime pradėti užduoties C po trijų valandų. Tiesą sakant, šis reikalavimas galioja ne tik šiam tvarkaraščiui, bet ir visiems kitiems tvarkaraščiams, kuriuos galėtume sugalvoti. Kad

Laikas: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

V_1 $A(4)$ $D(3)$ Prastova

V_2 $B(5)$ $C(7)$

a)

Laikas: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

V_1 $A(4)$ $B(5)$ Prastova

V_2 $D(3)$ $C(7)$

b)

Laikas: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

V_1 $A(4)$ $B(5)$ Prastova

V_2 $D(3)$ Prastova $C(7)$

c)

Laikas: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

V_1 $A(4)$ $C(7)$

V_2 $B(5)$ $D(3)$ Prastova

d)

8.1 pav. Keletas galimų 1 pavyzdžio tvarkaraščių.

ir kokie protingi mes būtume (bei kad ir kiek turėtume savo dispozicijoje vykdytojų), *užduotis C negali būti pradėta po trijų valandų*. Tačiau kodėl? Ogi todėl, kad pirma turi būti užbaigta užduotis $A(4)$. Kita vertus, jei mes priversime V_2 palaukti vieną valandą, kol, taip sakant, užsidegs žalia šviesa užduoties C startui, mes gausime visiškai gerą tvarkaraštį, parodytą 8.1 c) pav. Jo darbo trukmė yra 11 valandų. Kadangi užduoties $C(7)$ negalima pradėti vykdyti anksčiau kaip po keturių valandų – tai yra trumpiausias įmanomas tvarkaraštis. *Joks tvarkaraštis neleidžia baigti šio projekto greičiau kaip per* 11 *valandų*. Kalbant apie darbo trukmę, 8.1 c) pav. parodytas tvarkaraštis yra *optimalus*. Bendru atveju gali būti daugiau kaip vienas optimalus tvarkaraštis. 8.1 d) pav. parodytas kitas tvarkaraštis, kurio darbo trukmė taip pat yra 11 valandų.

Kalbant apie tvarkaraščių sudarymo uždavinius, 1 pavyzdys buvo labai jau paprastas. Bet netgi iš tokio paprasto pavyzdžio galime nemažai pasimokyti. Pirmiausia, turėdami keturias užduotis ir du vykdytojus, mes galėjome sudaryti keletą skirtingų tvarkaraščių, ir tie keturi, kuriuos nagrinėjome, dar nėra visi galimi – yra ir kitų tvarkaraščių, kurių nagrinėti nesivarginome. Įsivaizduokite, kas atsitiktų, jei turėtume šimtus užduočių ir dešimtis vykdytojų – galimų tvarkaraščių gausybė išvestų mus iš proto. Ieškodami optimalaus ar netgi gero tvarkaraščio, turėtume nuosekliai išrūšiuoti daugybę galimybių – kitaip sakant, čia mums praverstų geras *tvarkaraščių sudarymo algoritmas*.

Kitas naudingas dalykas, kurį mes sužinojome iš 1 pavyzdžio, – yra projekto darbo trukmės apatinė riba – minimalaus laiko barjeras, kurio negali peržengti joks tvarkaraštis, kad ir kokį gerą algoritmą turėtume ir kiek daug vykdytojų tą užduotį atliktų. Vienas iš svarbiausių dalykų, kurio išmoksime šiame skyriuje – kaip suskaičiuoti šį teorinį minimumą, vadinamą projekto **kritiniu laiku**.

Kad sukaltume sceną tvarkaraščių sudarymo algoritmų spektakliui, pateiksime pagrindinį šio skyriaus pavyzdį. Šis pavyzdys, nors ir aptaisytas mokslinės fantastikos rūbais, aprašo ne visiškai išgalvotą situaciją.

---

2 pavyzdys. (**Svajonių namo statyba Marse.**) Dabar yra 2250 metai. Atsilygindama už puikų darbą, kompanija nusprendė jus perkelti į naują vietą – mokslinę bazę K1, kuri yra Marse. Kaip priedas prie atlyginimo jums priklauso namas – nuosavas prabangus Marso tipinis būstas (MTB). Bėda ta, kad MTB atvežamas iš Erdvinės Stoties ES3 kaip atskirų dalių komplektas ir surenkamas statybos vietoje, o tai sudėtingas ir nemalonus darbas. Nenorėdamas dirbti šio sunkaus darbo pats, jūs nusprendėte pasamdyti porelę TBSR (tipinių būstų surinkimo robotų), trumpiau vadinamų Tibsais. Tibsus galima išsinuomoti vietiniame robotų nuomos punkte, tačiau neverta nei sakyti, kad jų nuoma kainuoja labai brangiai. Dar prieš apmokėdami sąskaitą, jūs norite sudaryti tokį Tibsų darbo tvarkaraštį, kad jie kiek galima greičiau pabaigtų darbus.

MTB statybą sudaro 15 skirtingų užduočių. Jų pavadinimai ir vykdymo trukmė tibsvalandėmis nurodyta 8.1 lentelėje. Be to, MTB statybos instrukcijoje nurodyta 17 skirtingų užduočių nuoseklumo sąryšių, kurie išvardyti 8.2 lentelėje.

Prieš imdamiesi sudaryti geriausią MTB statybos tvarkaraštį, padarysime trumpą, bet svarbų nukrypimą į šalį.

Užduotis	Santrumpos (Vykdymo trukmė)
Pamatų surinkimas	$PS(7)$
Grindų surinkimas	$GS(5)$
Sienų surinkimas	$SS(6)$
Kupolo surinkimas	$KS(8)$
Grindų tvirtinimas	$GT(5)$
Vidinių sienų tvirtinimas	$ST(7)$
Kupolo tvirtinimas	$KT(5)$
Vandentiekio tiesimas	$VT(4)$
Branduolinės jėgainės įrengimas	$BJ(4)$
Slėgimo prietaiso įrengimas	$SP(3)$
Šildymo prietaiso įrengimas	$SI(4)$
Kanalizacijos įrengimas	$KO(1)$
Vidinės apdailos darbai	$VA(6)$
Sandarinimas	$SK(3)$
Svetainės įrengimas (tikrovės TV, kompiuteris, muzikos centras, ryšių aparatūra ir t.t.)	$SV(2)$

8.1 lentelė.

Nuoseklumo sąryšiai
$PS \to GT$
$GS \to GT$
$GT \to ST$
$SS \to ST$
$KS \to KT$
$ST \to KT$
$GT \to VT$
$ST \to BJ$
$BJ \to SP$
$KT \to SP$
$BJ \to SI$
$VT \to KO$
$SI \to KO$
$SP \to SV$
$SI \to SV$
$KO \to VA$
$SI \to SK$

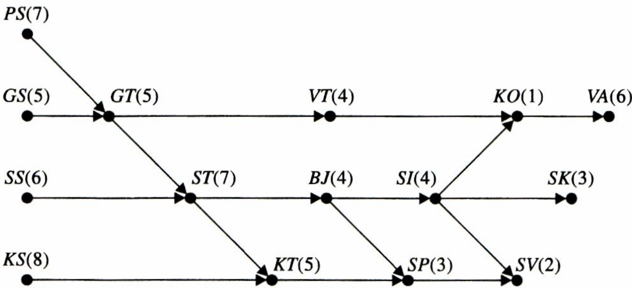
8.2 lentelė.

ORIENTUOTIEJI GRAFAI

Yra vienas labai patogus būdas visą aukščiau 8.1 ir 8.2 lentelėse pateiktą informaciją apibendrinti, kaip parodyta 8.2 pav. Šiame paveikslėlyje užduotys yra grafo viršūnės, o nuoseklumo sąryšiai – rodyklės, einančios iš vienos viršūnės į kitą, todėl rodyklė, einanti iš viršūnės X į viršūnę Y, reiškia, kad užduotis Y gali būti pradėta tik tada, kai įvykdyta užduotis X.

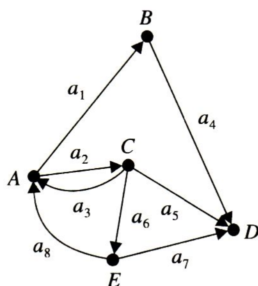
Matome, kad 8.2 pav. atrodo kaip įprastas grafas, tik briaunos nukreiptos į tam tikrą pusę. Grafas, kurio briaunos turi kryptį, vadinamas **orientuotuoju grafu**, arba trumpiau – **orgrafu.**

Panašiai kaip ir grafai, orgrafai aprašo sąryšius tarp objektų, tačiau dabar šie sąryšiai nebūtinai yra abipusiai. Kai objektas X yra susijęs su objektu Y, mes parodome tai rodykle, nukreipta iš taško X į tašką Y. Skirdami orgrafus



8.2 pav.

nuo paprastųjų grafų, vartosime truputį skirtingus terminus. Vietoj „briaunos" vartosime žodį **lankas**, ir tai reikš, jog briauna turi tam tikrą kryptį; užuot sakę „X ir Y yra gretimos viršūnės", sakysime „X **eina prieš** Y", jei lanko rodyklė nukreipta į Y, ir „X **eina po** Y", jei lanko rodyklė nukreipta į X; kalbėdami apie viršūnių laipsnius, papildomai turėsime viršūnės įeičių ir išeičių laipsnius (**įeičių laipsnis** yra į viršūnę nukreiptų rodyklių skaičius; **išeičių laipsnis** yra iš viršūnės einančių rodyklių skaičius). Kelias iš viršūnės X į viršūnę Y orgrafe yra kryptinių lankų seka, prasidedanti X ir pasibaigianti Y.



8.3 pav.

3 pavyzdys. Nagrinėkime orgrafą, parodytą 8.3 pav. Tai yra orgrafas, turintis 5 viršūnes (A, B, C, D ir E) ir aštuonis lankus (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 ir a_8).

Iš šio orgrafo galima sužinoti, pavyzdžiui, kad C yra susijusi su D, bet D nėra susijusi su C. O štai sąryšis tarp A ir C yra abipusis. Kiekvienos viršūnės įeičių ir išeičių laipsniai yra parodyti lentelėje.

Viršūnės	Įeičių laipsnis	Išeičių laipsnis	Bendrasis laipsnis
A	2	2	4
B	1	1	2
C	1	3	4
D	3	0	3
E	1	2	3

Matome, kad A, C, D ir A, B, D ir netgi A, C, A, B, D yra keliai iš A į D, tačiau A, E, D nėra kelias (nėra rodyklės iš A į E).

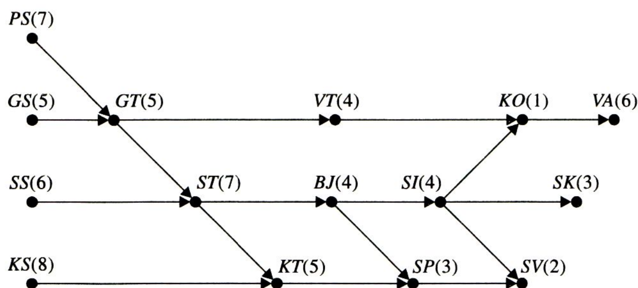
Realiame gyvenime yra daugybė situacijų, kurias galima aprašyti orgrafais. Štai keletas iš jų:

- **Pervežimas.** Čia *viršūnės* gali reikšti mieste esančias vietas, o *lankai* gali reikšti vienpusio eismo gatves.
- **Komunikacijos.** Čia *viršūnės* gali reikšti informacijos centrus ar pranešimo šaltinius, o *lankai* – galimas informacijos perdavimo kryptis.
- **Drėkinimo sistema.** Čia *viršūnės* gali reikšti siurblines, o *lankai* – vandens tekėjimo kryptis.
- **Komandų grandinė.** Karinėje organizacijoje orgrafu galima aprašyti komandų grandinę. *Viršūnės* yra žmonės, o lankas iš X į Y reiškia, kad X gali įsakinėti Y (yra viršesnis už Y).
- **Asimetriniai sąryšiai.** Asimetriniai sąryšiai – tai sąryšiai, kurie ne visada apgręžiami, ir juos patogu aprašyti orgrafu. Pavyzdžiu galėtų

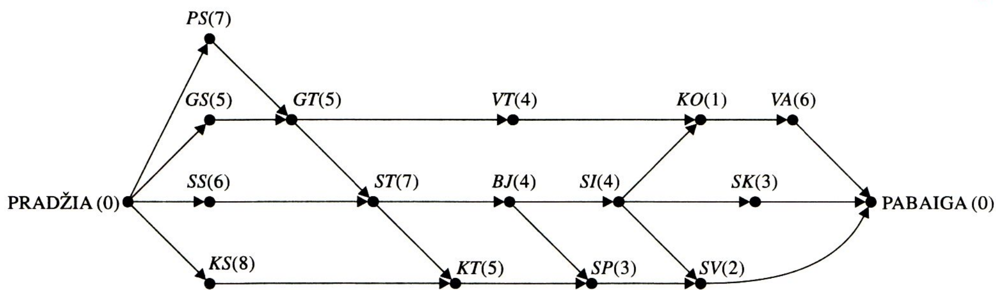
būti įsimylėjimas. Šiuo atveju *viršūnės* yra žmonės; ir mes brėšime rodyklę iš X į Y, jei X yra įsimylėjęs (-usi) Y. Kartais gali būti ir rodyklė iš Y į X, bet kartais (deja!) jos gali nebūti.

TVARKARAŠČIŲ SUDARYMAS: PAGRINDINĖS PRIEMONĖS

Vėl grįžkime prie MTB statybos tvarkaraščio sudarymo uždavinio. Dabar jau žinome, kad pagrindiniai uždavinio etapai patogiai aprašomi orientuotoju grafu, parodytu 8.2 a) pav. (tai tas pats 8.2 pav., dar kartą parodytas skaitytojo patogumui). 8.4 b) pav. parodyta nedidelė 8.2 a) pav. modifikacija. Čia mes pridėjome dvi fiktyvias užduotis – PRADŽIĄ ir PABAIGĄ – kurių vykdymo trukmė yra 0. Tai tik patogumas, leidžiantis pavaizduoti visą projektą kaip seką nuo PRADŽIOS iki PABAIGOS. Šios fiktyvios nulinės trukmės užduotys neturi įtakos laikui, reikalingam atlikti visam darbui. Grafas, parodytas 8.4 b) pav., vadinamas **projekto orgrafu**.



8.4 a) pav.



8.4 b) pav.

Prioritetų sąrašo modelis

Projekto orgrafas yra pagrindinė priemonė, kurioje atsispindi visi tvarkaraščio sudarymo uždavinio parametrai, tačiau jame nėra nieko, kas nurodytų, kaip sudaryti tvarkaraštį. Sudarant konkretų tvarkaraštį, mums reikės dar kažko, būtent – instrukcijų, kokia tvarka turi būti vykdomos užduotys. Pagrindinė pagalbinė priemonė, kuria naudosimės, yra **prioritetų sąrašas**. Prioritetų sąrašas – tai nieko daugiau, kaip užduotys, išrašytos tam tikra jų atlikimo tvarka. Tvarka gali būti bet kokia (ji gali neturėti jokios prasmės ir būti

nesusijusi su nuoseklumo sąryšiais). Pakeiskite užduočių tvarką ir gausite kitą prioritetų sąrašą. Taigi, prioritetų sąrašų yra tiek, kiek gali būti užduočių išdėstymo būdų. (Turint 3 užduotis, galimi 6 prioritetų sąrašai; 4 užduotims galimi 24 prioritetų sąrašai; 10 užduočių turi daugiau kaip tris milijonus prioritetų sąrašų, o 100 užduočių turi prioritetų sąrašų daugiau, negu mūsų Visatoje molekulių. Aišku, kad prioritetų sarašų stoka negalėsime skųstis!) Skaitytojas čia turbūt prisiminė sąvoką, su kuria susidūrėme 2 skyriuje ir vėliau 6 skyriuje – skaičiaus **faktorialo** sąvoką.

M užduočių projekto galimų prioritetų sąrašų skaičius yra

$$M! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times M.$$

Kaip, sudarant tvarkaraštį, naudotis prioritetų sąrašu? Galvokime apie prioritetų sąrašą kaip apie tvarką, kuria tvarkaraščio sudarytojas pageidautų matyti vykdomas užduotis. Vienintelė priežastis, kodėl negalima tiksliai pasinaudoti ta tvarka, gali būti nuoseklumo sąryšiai, draudžiantys tai daryti. Nuoseklumo sąryšiai nepaiso prioritetų sąrašo, tačiau, tik naudodamiesi prioritetų sąrašu, galime skirti užduotis vykdytojams.

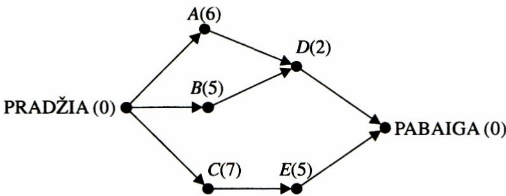
Aprašysime pagrindines taisykles, pagal kurias, remdamiesi prioritetų sąrašu, skiriame užduotis vykdytojams. Bet kokiu konkrečiu projekto vykdymo momentu galimos trys skirtingos situacijos:

1. Visi vykdytojai yra *užimti*. Mums nieko nelieka daryti, tik laukti.
2. Vienas vykdytojas yra laisvas. Mes peržvelgiame prioritetų sąrašą nuo pradžios, ieškodami pirmos *parengtos* užduoties, ir ją radę, skiriame tam vykdytojui. (Prisiminkite, kad užduotis yra *parengta*, jei visos užduotys, kurios projekto orgrafe nukreiptos į ją, yra užbaigtos.) Jei tuo momentu nėra parengtų užduočių, tai vykdytojas turi laukti, kol padėtis pasikeis.
3. Daugiau kaip vienas vykdytojas yra laisvas. Tokiu atveju pirma prioritetų sąraše esanti parengta užduotis skiriama pirmam laisvam vykdytojui, antra parengta užduotis skiriama antram laisvam vykdytojui ir t.t. Jei laisvų vykdytojų yra daugiau negu parengtų užduočių, tai kai kurie vėliau atsilaisvinę vykdytojai turi laukti. Kadangi visi vykdytojai yra vienodi ir (bent jau teoriškai) vienodai gabūs, tai visai nesvarbu, kuris laisvas vykdytojas gaus kurią parengtą užduotį (žinoma, galėtume tai nustatyti ir mesdami monetą). Tiesiog mums patogu turėti aiškią taisyklę, pasirenkant vykdytoją.

Prieš sugrįždami prie MTB statybos pavyzdžio, panagrinėsime kelis kitus pavyzdžius, kaip, pasitelkus prioritetų sąrašą, sudaromas tvarkaraštis.

4 pavyzdys. Nagrinėkime projektą, aprašytą 8.5 pav. parodytu orgrafu, ir tarkime, kad mums duotas toks prioritetų sąrašas:

Prioritetų sąrašas: $A(6)$, $B(5)$, $C(7)$, $D(2)$, $E(5)$.



8.5 pav.

Koks būtų tvarkaraštis, jei turime du vykdytojus V_1 ir V_2? Štai visi žingsniai, aprašyti smulkiai:

- Laikas $T = 0$ (projekto pradžia). Tik užduotys $A(6)$, $B(5)$ ir $C(7)$ yra parengtos. Laikydamiesi prioritetų sąrašo, $A(6)$ skiriame vykdytojui V_1, o $B(5)$ – vykdytojui V_2.
- Laikas $T = 5$. V_1 dar užimtas užduotimi $A(6)$; V_2 jau atliko $B(5)$. $C(7)$ yra vienintelė parengta užduotis. Vykdytojui V_2 skiriame $C(7)$.
- Laikas $T = 6$. V_1 jau baigė užduotį $A(6)$; V_2 vykdo užduotį $C(7)$. $D(2)$ jau tapo parengta užduotimi (prieš ją turėjo būti atliktos užduotys $A(6)$ ir $B(5)$). V_1 skiriame $D(2)$.
- Laikas $T = 8$. V_1 jau baigė $D(2)$; V_2 užimtas $C(7)$. Šiuo momentu nėra jokios parengtos užduoties, todėl V_1 priverstas laukti.
- Laikas $T = 12$. V_1 laukia, V_2 ką tik baigė $C(7)$. Abu vykdytojai pasirengę dirbti. $E(5)$ yra vienintelė likusi užduotis, todėl vykdytojui V_1 skiriame ją. V_2 lieka be darbo.
- Laikas $T = 17$. V_1 ką tik baigė $E(5)$. Projektas įgyvendintas. Darbo trukmė $F = 17$ valandų. Sudarytas tvarkaraštis parodytas 8.6 pav.

Laikas: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

V_1	A(6)	D(2)	Prastova	E(5)
V_2	B(5)	C(7)	Prastova	

↑ $F = 17$

8.6 pav.

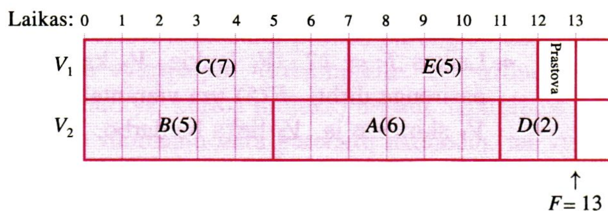
Ar gautas tvarkaraštis geras? Pažiūrėkime į prastovų trukmę. Matome, kad tai labai blogas tvarkaraštis. Kalbant apie darbo trukmę, sunku būtų surasti blogesnį tvarkaraštį. Galbūt verta pabandyti dar kartą?

5 pavyzdys. Pamėginkime dar kartą sudaryti 4 pavyzdžio projekto tvarkaraštį, tik šį kartą pasinaudokime kitu prioritetų sąrašu. (Projekto orgrafas tas pats, parodytas 8.5 pav., o vykdytojai – tie patys du.) Sudarykime naują prioritetų sąrašą.

Prioritetų sąrašas: $E(5)$, $D(2)$, $C(7)$, $B(5)$, $A(6)$.

Žingsniai bus tokie:

- Laikas $T = 0$ (projekto pradžia). Parengtos tik užduotys $C(7)$, $A(6)$ ir $B(5)$. Laikydamiesi prioritetų sąrašo, $C(7)$ skiriame vykdytojui V_1, o $B(5)$ – vykdytojui V_2.
- Laikas $T = 5$. V_1 dar užimtas užduotimi $C(7)$; V_2 jau atliko $B(5)$. $A(6)$ yra vienintelė parengta užduotis. Vykdytojui V_2 skiriame $A(6)$.
- Laikas $T = 7$. V_1 jau baigė $C(7)$; V_2 vykdo užduotį $A(6)$. $E(5)$ jau tapo parengta užduotimi, ir ją skiriame V_1.
- Laikas $T = 11$. V_2 jau baigė užduotį $A(6)$; V_1 vykdo užduotį $E(5)$. $D(2)$ jau parengta, ir ją skiriame V_2.
- Laikas $T = 12$. V_1 ką tik baigė užduotį $E(5)$. V_2 vykdo užduotį $D(2)$. Užduočių nebėra, todėl V_1 laisvas.
- Laikas $T = 13$. V_2 ką tik baigė užduotį $D(2)$. Projektas įgyvendintas. Darbo trukmė $F = 13$ valandų. Sudarytas tvarkaraštis parodytas 8.7 pav.

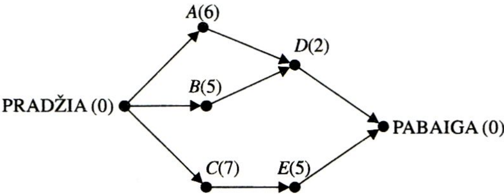


8.7 pav.

Ar gautas tvarkaraštis geras? Atsakymas yra teigiamas. Ar galima sugalvoti ką nors geresnio (turint tuos pačius du vykdytojus)? Pasirodo – ne (pasiaiškinkite, kodėl). Ar galėtume sudaryti geresnį tvarkaraštį, jei turėtume tris vykdytojus? Norime manyti – taip. Pabandykime.

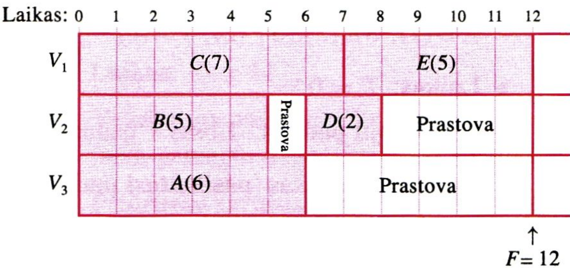
6 pavyzdys. Šį kartą tvarkaraštį sudarysime 5 pavyzdžiui (tas pats projekto orgrafas ir prioritetų sąrašas), tik turėsime tris vykdytojus (V_1, V_2 ir V_3). Skaitytojo patogumui 8.8 pav. pakartotinai pateikiame projekto orgrafą ir prioritetų sąrašą.

Prioritetų sąrašas: $E(5)$, $D(2)$, $C(7)$, $B(5)$, $A(6)$.



8.8 pav.

- Laikas $T = 0$ (projekto pradžia). Parengtos tik užduotys $C(7)$, $B(5)$ ir $A(6)$. $C(7)$ skiriame vykdytojui V_1, $B(5)$ – vykdytojui V_2, o $A(6)$ – vykdytojui V_3.
- Laikas $T = 5$. V_1 vykdo užduotį $C(7)$; V_2 jau atliko užduotį $B(5)$; V_3 vykdo užduotį $A(6)$. V_2 neturi tinkamų parengtų užduočių, todėl priverstas laukti ($E(5)$ negali būti pradėta, kol neatlikta $C(7)$, o $D(2)$ negali būti pradėta, kol neatlikta $A(6)$).
- Laikas $T = 6$. V_3 jau baigė užduotį $A(6)$; V_2 laukia, o V_1 vykdo $C(7)$. $D(2)$ ką tik tapo parengta užduotimi, ir ją skiriame vykdytojui V_2.
- Laikas $T = 7$. V_1 jau užbaigė $C(7)$, ir $E(5)$ tapo parengta užduotimi, kurią ramiausiai skiriame V_1. Daugiau užduočių nebėra.
- Laikas $T = 12$. V_1 ką tik baigė užduotį $E(5)$, todėl projektas įgyvendintas. Darbo trukmė $F = 12$ valandų. Sudarytas tvarkaraštis parodytas 8.9 pav.



8.9 pav.

4, 5 ir 6 pavyzdžių tikslas buvo parodyti, kaip, pasitelkus prioritetų sąrašą, sudaromas tvarkaraštis. Matome, kad pagrindinė idėja lengvai suprantama, tačiau reikia vesti kruopščią apskaitą, kuri darosi komplikuota, kai užduočių skaičius didelis. Yra trys dalykai, kuriuos visą laiką reikia turėti galvoje, atliekant kiekvieną tvarkaraščio sudarymo etapą: reikia stebėti, kurios užduotys *parengtos*, kurios *vykdomos* ir kurios jau *įvykdytos*. Paprastas būdas tam yra nuolat atnaujinti prioritetų sąrašą, naudojantis tokiu metodu: parengtos užduotys apibraukiamos, vykdomos užduotys perbraukiamos vienu brūkšniu, o jau įvykdytos užduotys perbraukiamos dviem brūkšniais. Neišskirtos užduotys paprasčiausiai dar nėra parengtos.

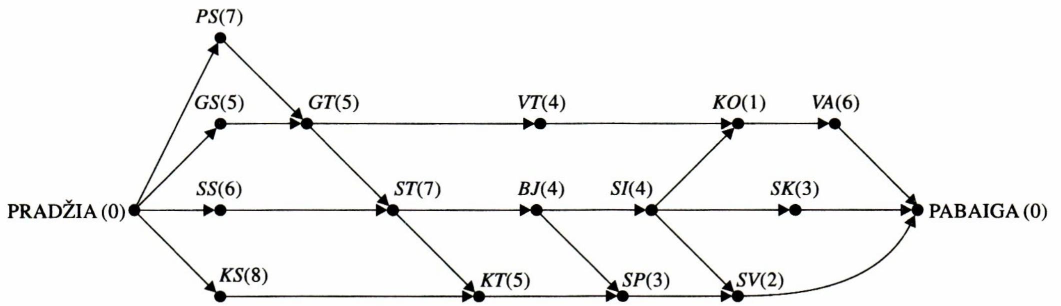
Dabar pažiūrėkime, kaip realizuoti šią strategiją Marso tipinio būsto statybos uždaviniui (2 pavyzdys).

---

7 pavyzdys. Mes rengiamės sudaryti tvarkaraštį MTB statybai, kai yra du vykdytojai – Tibsas 1 ir Tibsas 2. Skaitytojo patogumui vėl pateikiame projekto orgrafą (8.10 pav.). Tvarkaraštis remsis tokiu prioritetų sąrašu.

Prioritetų sąrašas: $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

8.10 pav.



Prioritetų sąrašas (pradinė padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

- **Laikas**: $T = 0$.

  Vykdytojų padėtis: Tibsas 1 gauna KS; Tibsas 2 gauna SS.

  Prioritetų sąrašas (pasikeitusi padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

Laikas:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
Tibsas 1			KS																							
Tibsas 2		SS																								

- **Laikas**: $T = 6$.

  Vykdytojų padėtis: Tibsas 1 užsiėmęs (vykdo KS); Tibsas 2 gauna GS.

Prioritetų sąrašas (pasikeitusi padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

Laikas: 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50

Tibsas 1: *KS*

Tibsas 2: *SS* *GS*

- **Laikas**: $T = 8$.

Vykdytojų padėtis: Tibsas 1 gauna PS; Tibsas 2 užsiėmęs (vykdo GS).

Prioritetų sąrašas (pasikeitusi padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

Laikas: 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50

Tibsas 1: *KS* *PS*

Tibsas 2: *SS* *GS*

- **Laikas**: $T = 11$.

Vykdytojų padėtis: Tibsas 1 užsiėmęs (vykdo PS); Tibsas 2 ilsisi (nėra parengtų užduočių, kurių galėtų imtis).

Prioritetų sąrašas (pasikeitusi padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

Laikas: 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50

Tibsas 1: *KS* *PS*

Tibsas 2: *SS* *GS*

- **Laikas**: $T = 15$.

Vykdytojų padėtis: Tibsas 1 atliko PS. GT yra parengta ir priskiriama Tibsui 1. Tibsas 2 vis dar laukia.

Prioritetų sąrašas (pasikeitusi padėtis): $KS(8)$, $SS(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SP(3)$, $SI(4)$, $KO(1)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $VA(6)$.

Laikas: 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50

Tibsas 1	*KS* (0–8)	*PS* (8–15)	*GT* (15–20)
Tibsas 2	*SS* (0–6)	*GS* (6–11)	

Ties šia vieta sustosime, palikdami skaitytojui pačiam užbaigti tvarkaraščio sudarymą. Atminkite, kad svarbiausia yra išmokti sekti kiekvienos užduoties būklę, ir vienintelis būdas tai padaryti yra praktinis darbas. (Be to, tų pačių dalykų nuolatinis aiškinimas gali nusibosti tiek mokiniui, tiek ir mokytojui.)

Įdėję šiek tiek triūso, gauname tvarkaraštį, parodytą 8.11 pav. Projektas baigiamas po 44 valandų.

8.11 pav.

Laikas: 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50

Tibsas 1	*KS* (0–8)	*PS* (8–15)	*GT* (15–20)	*ST* (20–27)	*KT* (27–32)	*SP* (32–35)	*KO* (35–36)	*SV* (36–38)	*VA* (38–44)
Tibsas 2	*SS* (0–6)	*GS* (6–11)	Prastova (11–20)	*VT* (20–24)	Prastova (24–27)	*BJ* (27–31)	*SI* (31–35)	*SK* (35–38)	Prastova (38–44)

$F = 44$

MAŽĖJANČIŲ TRUKMIŲ ALGORITMAS

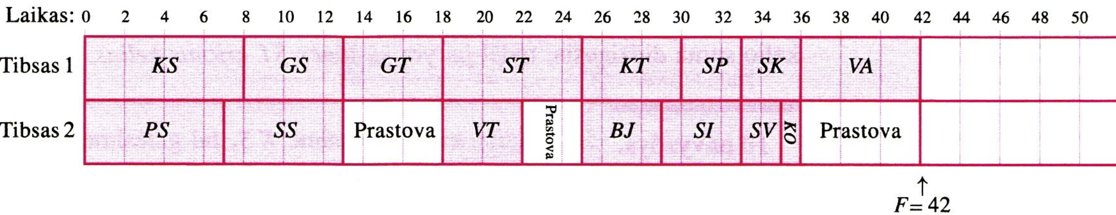
Nesunku patiems įsitikinti, kad 6 pavyzdyje gautas tvarkaraštis nėra labai geras. Kodėl jis išėjo blogas? Priežastis ta, kad turėjome nei šiokį, nei tokį prioritetų sąrašą. Jei rengiamės gerinti tvarkaraštį, turime mąstyti apie prioritetų sąrašo pasirinkimą. Intuityviai kyla mintis, kuria žmonės praktiškai ir vadovaujasi: ilgiau trunkantys darbai turėtų būti daromi pirmiau, negu trumpalaikiai. Tai ir yra tas pagrindas, kuriuo remiantis galima protingai pasirinkti prioritetų sąrašą. Užduotis reikia išdėstyti jų vykdymo trukmių mažėjimo tvarka. (Lygiųjų atveju galima rinktis atsitiktinai.) Tokį sąrašą vadinsime **mažėjančių trukmių sąrašu**, o juo besiremiantį patį tvarkaraščio sudarymo procesą vadinsime **mažėjančių trukmių algoritmu**.

8 pavyzdys. Mažėjančių trukmių sąrašas 15-ai užduočių, reikalingų pastatyti MTB, atrodo taip:

$KS(8)$, $PS(7)$, $ST(7)$, $SS(6)$, $VA(6)$, $GS(5)$, $GT(5)$, $KT(5)$, $BJ(4)$, $VT(4)$, $SI(4)$, $SP(3)$, $SK(3)$, $SV(2)$, $KO(1)$.

Remdamiesi mažėjančių trukmių sąrašu kaip prioritetų sąrašu, gauname tvarkaraštį, parodytą 8.12 pav., kur darbo trukmė yra 42 valandos. Detales paliekame skaitytojui.

8.12 pav.



Pažiūrėjus į darbo trukmę, gautą taikant mažėjančių trukmių algoritmą, galima nusivilti. Tokia puiki idėja apie ilgalaikių darbų atlikimą pirmiau, o trumpalaikių – vėliau, vis dėlto pasirodė niekam tikusi – bent jau šiame pavyzdyje! Kodėl taip įvyko? Nueikime mūsų kelią priešinga kryptimi. Matome, kad 33 valandą mes priėmėme blogą sprendimą. Tuo metu buvo trys galimos užduotys ($KO(1)$, $SK(3)$ ir $SV(2)$) ir du laisvi vykdytojai. Mažėjančių trukmių algoritmas patarė mums rinktis dvi ilgiausias užduotis – $SK(3)$ ir $SV(2)$. Tai buvo trumparegiška strategija. Jei mes būtume pažvelgę, kas mūsų laukia toliau, būtume pamatę, kad $KO(1)$ yra kur kas geresnė užduotis negu kitos dvi, nes mes negalėsime pradėti $VA(6)$, kol nepabaigsime $KO(1)$. Taigi dar kartą įsitikinome, kad, siekdami greitos naudos ir neatsižvelgdami į ilgalaikes savo veiksmų pasekmes, mes galime priimti blogą sprendimą.

Pateiksime dar vieną pamokomą pavyzdį apie tai, kaip mažėjančių trukmių algoritmas nuo pat pradžių veda prie blogo užduočių pasirinkimo. Mes neatsižvelgėme į tai, kad labai svarbu kiek galima anksčiau pradėti užduotis $PS(7)$ ir $GS(5)$. Nebaigę jų, mes negalime pradėti $GT(5)$; nebaigę GT, negalime pradėti $ST(7)$; nebaigę ST, negalime pradėti $BJ(4)$ ir $KT(5)$ ir taip toliau. Iš čia galima spręsti, kad vertėtų teikti prioritetus užduotims, remiantis visų prieš ją einančių užduočių bendra vykdymo trukme. Paprasčiau sakant, kuo daugiau darbo reikia atlikti prieš tam tikrą užduotį, tuo anksčiau ši užduotis turi būti pradėta.

KRITINIŲ KELIŲ ALGORITMAS

Formalizuosime šią idėją ir apibrėšime iš viršūnės einančio kritinio kelio sąvoką. Suskaičiuosime visų kelių, einančių iš viršūnės X į viršūnę PABAIGA, vykdymo trukmių sumas. Didžiausią sumą turintis kelias yra vadinamas viršūnės X **kritiniu keliu**.

Toliau pateikiame keletą pavyzdžių, kuriuose remiamasi MTB projekto orgrafu.

9 pavyzdys. Raskime viršūnės SI kritinį kelią. Iš viso yra trys keliai, einantys iš SI į viršūnę PABAIGA. Tai a) SI, KO, VA, PABAIGA; b) SI, SK, PABAIGA; c) SI, SV, PABAIGA. Kelio a) vykdymo trukmių suma yra $4 + 1 + 6 = 11$, kelio b) $4 + 3 = 7$, kelio c) $4 + 2 = 6$. Pirmojo kelio suma didžiausia, todėl jis yra *viršūnės SI kritinis kelias*.

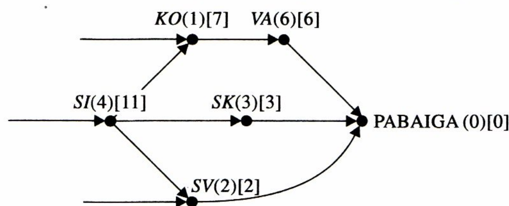
10 pavyzdys. Jei pradinę viršūnę imsime KS, tai galėsime sudaryti vienintelį kelią iš KS į viršūnę PABAIGA – tai KS, KT, SP, SV, PABAIGA. Kadangi tai vienintelis kelias, tai jis yra *KS kritinis kelias*. Jo bendra vykdymo trukmė yra 18 valandų.

11 pavyzdys. Nors kelių iš viršūnės PRADŽIA į viršūnę PABAIGA yra nemažai, tačiau, atidžiau pasižiūrėję į projekto orgrafą, matome, kad ilgiausios trukmės kelias yra PRADŽIA, PS, GT, ST, BJ, SI, KO, VA, PABAIGA. Jo vykdymo trukmė yra 34 valandos. Šis kelias yra *viršūnės* PRADŽIA *kritinis kelias*.

11 pavyzdyje, faktiškai naudodamiesi bandymų ir klaidų metodu, mes radome kritinį kelią, kuris prasideda viršūnėje PRADŽIA. Būtent šis kritinis kelias bet kuriame projekto orgrafe yra ypač svarbus, todėl jis turi savo pavadinimą – **projekto kritinis kelias**. Taigi MTB projekto kritinis kelias yra PRADŽIA, PS, GT, ST, BJ, SI, KO, VA, PABAIGA (tai iš tikrųjų reiškia PS, GT, ST, BJ, SI, KO, VA, nes PRADŽIA ir PABAIGA yra fiktyvios užduotys, kurios buvo pridėtos patogumo dėlei). Kritinio kelio visų užduočių vykdymo trukmių suma yra vadinama **projekto kritiniu laiku**. Mūsų MTB projekto kritinis laikas yra 34 valandos.

Greitai mes vėl įsitikinsime projekto kritinio kelio ir kritinio laiko svarba. O dabar pasiaiškinkime, kaip rasti projekto orgrafo bet kurios viršūnės kritinį kelią. Žinoma, mums sunku tikėtis rasti kritinį kelią taip, kaip tat darėme 9, 10 ir 11 pavyzdžiuose (vien tik metę akį į paveikslėlį), jei yra daug viršūnių ir daug galimų kelių. Dabar aprašysime paprastą procedūrą, vadinamą **priešsrovio algoritmu**. Ji padės mums rasti kiekvienos projekto orgrafo viršūnės kritinio kelio ilgį. Pagrindinė mintis yra pradėti iš viršūnės PABAIGA ir keliauti atgal viršūnės PRADŽIA link. Prie kiekvienos viršūnės laužtiniuose skliaustuose žymime tos viršūnės kritinio kelio ilgį. Kai grįždami einame į naują viršūnę, mes paprasčiausiai pridedame tos viršūnės (užduoties) vykdymo trukmę prie ilgiausio kritinio kelio, einančio pabaigos link, visų užduočių vykdymo trukmių sumos.

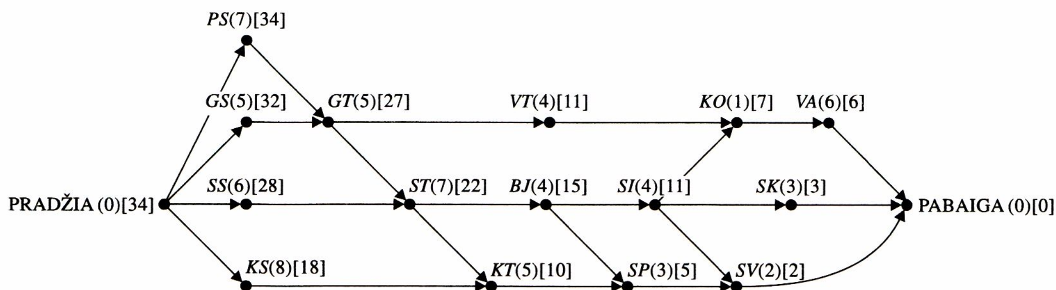
12 pavyzdys. Dabar, remdamiesi MTB projekto orgrafu (8.13 pav.), pasiaiškinkime, kaip veikia priešsrovio algoritmas.



8.13 pav.

- **1 žingsnis**. Užrašome kritinių kelių iš $VA[6]$, $SK[3]$ ir $SV[2]$ ilgius.
- **2 žingsnis**. Užrašome kritinio kelio iš $KO\ [6+1=7]$ ilgį.
- **3 žingsnis**. Užrašome kritinio kelio iš $SI[7+4=11]$ ilgį. Iš tikrųjų, iš trijų kritinių kelių, esančių „prieš" SI (iš KO, iš SK ir iš SV), ilgiausio kelio ilgis yra 7, o pridėję 4, gauname viršūnės SI kritinio kelio ilgį 11.

Taip tęsdami, gauname kiekvienos orgrafo viršūnės kritinio kelio ilgį (8.14 pav.). Skaitytojui paliekame patikrinti detales.



8.14 pav.

Kodėl projekto kritinis kelias ir kritinis laikas taip svarbūs? Yra dvi priežastys. 1) Skyrelio pradžioje sakėme, jog kiekvienas projektas turi savo darbo trukmės teorinę ribą – tam tikrą minimalų laiką, anksčiau kurio projektas negali būti atliktas, nesvarbu, koks gudrus būtų tvarkaraščio sudarytojas ir kiek būtų vykdytojų. *Ši teorinė riba yra projekto kritinis laikas.* 2) Jei projektą norime įgyvendinti per patį mažiausią laiką (t.y. per kritinį laiką), tai absoliučiai būtina visas kritinio kelio užduotis atlikti kiek tik įmanoma anksčiau: bet koks uždelsimas pradėti vykdyti bet kurią kritinio kelio užduotį neišvengiamai padidina viso projekto darbo trukmę. (Būtent todėl tas kelias ir vadinamas *kritiniu.*)

Deja, ne visada galima sudaryti tokį tvarkaraštį, kad visos kritinio kelio užduotys eitų viena paskui kitą žąsele, be pertrūkių. Viena priežastis – ne visada, kai reikia, yra laisvų vykdytojų (prisiminkime vieną iš mūsų taisyklių – vykdytojas negali sustoti kurios nors užduoties viduryje ir, ją atidėjęs

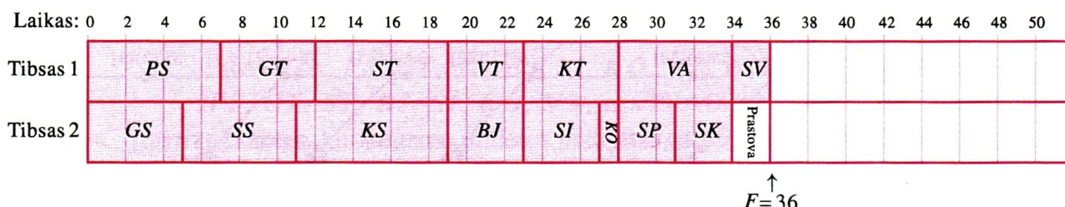
vėlesniam laikui, imtis naujos užduoties). Kita priežastis – gali būti dar neįvykdytos ankstesnės, kritiniame kelyje nesančios užduotys. Mes negalime galvoti vien tik apie tas užduotis, kurios yra kritiniame kelyje, ir neatsižvelgti į likusias, – juk jos veikia pirmąsias nuoseklumo sąryšiais. Yra ištisas tinklas tarpusavio sąryšių, į kuriuos turime atsižvelgti.

Tačiau, remiantis kritinio kelio sąvoka, galima sudaryti labai gerą (nors nebūtinai optimalų) tvarkaraštį. Idėja yra ta pati, kaip ir mažėjančių trukmių algoritme, tik abstrakcijos lygmuo didesnis: užuot rėmęsi užduočių vykdymo trukmėmis, sudarydami prioritetų sąrašą remsimės kritinių kelių laikais. Kitaip sakant, sudarome prioritetų sąrašą, į kurį pirmąją rašome užduotį, kurios kritinis kelias ilgiausias, antrąją – užduotį, kurios kritinis kelias yra antras pagal ilgį ir t.t. (Kaip visada, lygiąsias galima spręsti atsitiktinai.) Taip sudarytas prioritetų sąrašas vadinamas **kritinių kelių sąrašu**. Tvarkaraščio sudarymo procesas, kuris remiasi šiuo sąrašu, vadinamas **kritinių kelių algoritmu**.

13 pavyzdys. 12 pavyzdyje mes matėme, kaip apskaičiuoti bet kurios MTB projekto orgrafo viršūnės kritinį kelią. Išrikiavę užduotis pagal kritinių kelių ilgį, gausime tokį sąrašą.

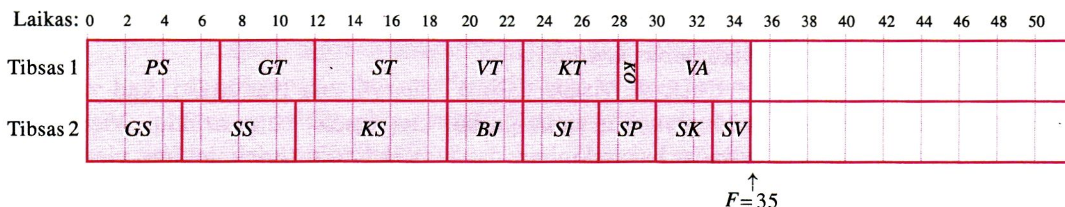
Kritinių kelių sąrašas: $PS[34], GS[32], SS[28], GT[27], ST[22], KS[18], BJ[15], VT[11], SI[11], KT[10], KO[7], VA[6], SP[5], SK[3], SV[2]$.

8.15 pav. MTB projekto tvarkaraštis, gautas kritinių kelių algoritmu.



Naudodamiesi kritinių kelių sąrašu kaip prioritetų sąrašu dviem vykdytojams, gausime tvarkaraštį, kuris parodytas 8.15 pav. Skaitytojui siūlome įsigilinti į detales. Darbo trukmė pagal šį tvarkaraštį yra 36 valandos, o tai kur kas geriau negu mažėjančių trukmių algoritmu gautas 42 valandų trukmės tvarkaraštis. Ar tai geriausia, ką galime padaryti?

8.16 pav. MTB projekto optimalus tvarkaraštis dviems vykdytojams.



Apskritai kritinių kelių algoritmas yra labai geras projekto tvarkaraščio sudarymo metodas (daugeliu atveju pranokstantis mažėjančių trukmių algoritmą), tačiau jis negarantuoja, kad sudarytas tvarkaraštis bus optimalus. Net MTB projekte galima veikti geriau, negu kritinio kelio algoritmu. Tai matome 8.16 pav. parodytame optimaliame tvarkaraštyje.

Kadangi nė vienas vykdytojas nestovi be darbo per visą vykdymo laiką, tai šis tvarkaraštis yra optimalus. Tai gerai. Tvarkaraštis buvo gautas, taikant šiek tiek patobulintą bandymų ir klaidų metodą, o ne kokią nors gudrią nuoseklią strategiją. O tai jau nieko gera. Aišku, kad tvarkaraščių sudarymo uždaviniai turi daug bendra su keliaujančiojo pirklio uždaviniu (6 skyrius) ir trumpiausiojo tinklo uždaviniu (7 skyrius). Nors ir yra efektyvių algoritmų, kuriais galima sudaryti gerą tvarkaraštį, bet nėra žinomas joks efektyvus algoritmas, kuris garantuotų, kad gautas tvarkaraštis bus optimalus. Iš visų tvarkaraščių sudarymo algoritmų kritinio kelio algoritmas yra vienas geriausių ir dažniausiai naudojamų. Pastaraisiais dešimtmečiais buvo ištobulinti kiti, daug sudėtingesni algoritmai, kurie, esant tam tikroms sąlygoms, gali pranokti kritinių kelių algoritmą, tačiau savo universalumu kritinių kelių algoritmas nepralenkiamas.

NEPRIKLAUSOMŲ UŽDUOČIŲ TVARKARAŠČIAI

Šiame skyrelyje trumpai apžvelgsime, kaip atrodys tvarkaraščių sudarymo uždaviniai tuo specialiu atveju, kai nėra nuoseklumo sąryšių, kuriais reikėtų rūpintis. Tokia situacija susidaro, kai reikia sudaryti tvarkaraštį nepriklausomoms užduotims – pavyzdžiui, sudarant tvarkaraštį grupei mašininkių, spausdinančių įvairaus ilgio tekstus.

Galima pamanyti, kad tuo atveju, kai virš mūsų galvų nebekabo nuoseklumo sąryšių kardas, tvarkaraščių sudarymas turėtų būti lengvas uždavinys, ir bet kas turėtų sugebėti rasti optimalų tvarkaraštį be didelio vargo. Tačiau šis paprastumas apgaulingas. *Nėra žinoma optimalaus ir efektyvaus algoritmo nepriklausomų užduočių tvarkaraščiams sudaryti.*

Teoriškai mes ne ką geriau sugebame sudaryti tvarkaraščius nepriklausomoms užduotims, negu esant nuoseklumo sąryšiams, tačiau, žiūrint iš praktinių pozicijų, yra keletas skirtumų. Pirma, negalima ignoruoti to fakto, kad visa procedūra, naudojama sudarant tvarkaraščius pagal prioritetų sąrašą, labai supaprastėja, kai netrukdo jokie nuoseklumo sąryšiai. Tada mes paprasčiausiai skiriame užduotis vykdytojams, kai tik jie pasidaro laisvi, ta eilės tvarka, kuri nurodyta prioritetų sąraše. Antra, kai nėra nuoseklumo sąryšių, užduoties kritinio kelio laikas lygus to kelio užduočių vykdymo trukmių sumai. Tai reiškia, kad *kritinių kelių sąrašas* ir *mažėjančių trukmių sąrašas* sutampa, todėl kritinių kelių algoritmas yra tas pats, kaip ir mažėjančių trukmių algoritmas. Prieš tęsdami, išanalizuokime keletą nepriklausomų užduočių tvarkaraščių sudarymo pavyzdžių.

14 pavyzdys. Tarkime, kad turime tokias devynias nepriklausomas užduotis: $A(70)$, $B(90)$, $C(100)$, $D(70)$, $E(80)$, $F(20)$, $G(20)$, $H(80)$ ir $I(10)$. Reikia sudaryti tvarkaraštį trims vykdytojams (V_1, V_2 ir V_3). Pirmiausiai tai padarykime, naudodamiesi prioritetų sąrašu.

- **Prioritetų sąrašas**: $A(70)$, $B(90)$, $C(100)$, $D(70)$, $E(80)$, $F(20)$, $G(20)$, $H(80)$ ir $I(10)$. Šiuo atveju tvarkaraštis parodytas 8.17 pav. Darbo trukmė – 220 valandų.

8.17 pav.

Laikas: 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250

V_1	$A(70)$	$D(70)$	$H(80)$		
V_2	$B(90)$	$E(80)$	Prastova		
V_3	$C(100)$	$F(20)$	$G(20)$	$I(10)$	Prastova

↑ $F = 220$

Jei naudosimės kritinių kelių algoritmu, tai prioritetų sąrašas bus mažėjančių trukmių sąrašas:

- **Mažėjančių trukmių sąrašas**: $C(100)$, $B(90)$, $E(80)$, $H(80)$, $A(70)$, $D(70)$, $F(20)$, $G(20)$, $I(10)$.

Gautas tvarkaraštis parodytas 8.18 pav., o darbo trukmė yra 180 valandų. Aišku, kad šis tvarkaraštis yra optimalus (visi trys vykdytojai dirba po 180 valandų).

8.18 pav.

Laikas: 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250

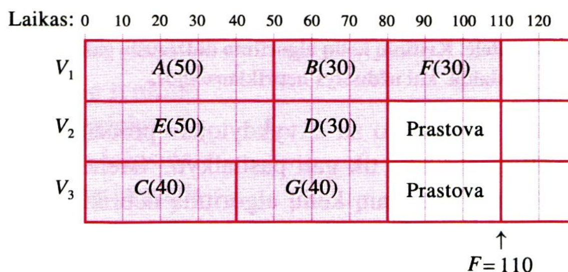
V_1	$C(100)$	$D(70)$	$I(10)$
V_2	$B(90)$	$A(70)$	$F(20)$
V_3	$E(80)$	$H(80)$	$G(20)$

↑ $F = 180$

14 pavyzdyje kritinių kelių algoritmu gavome optimalų tvarkaraštį, tačiau tai nėra taisyklė. Kai kuriose situacijose kritinių kelių algoritmu galima gauti prastokus tvarkaraščius. Tai iliustruoja toks pavyzdys.

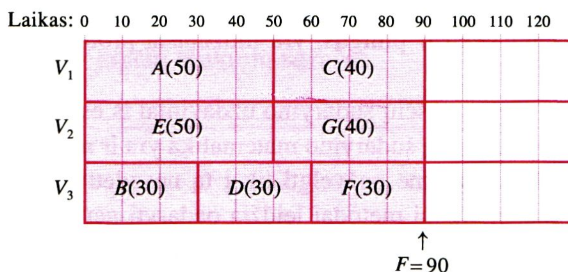
15 pavyzdys. Mes norime sudaryti tvarkaraštį septynioms nepriklausomoms užduotims ir trims vykdytojams (V_1, V_2 ir V_3). Užduotys yra tokios: $A(50)$, $B(30)$, $C(40)$, $D(30)$, $E(50)$, $F(30)$ ir $G(40)$.

Naudojant kritinių kelių algoritmą, prioritetų sąrašas yra A, E, C, G, B, D, F; gauname tvarkaraštį, parodytą 8.19 pav., kurio darbo trukmė yra 110 valandų.



8.19 pav.

Antra vertus, be didelių pastangų galima gauti optimalų tvarkaraštį; vienas iš jų parodytas 8.20 pav.



8.20 pav.

Žinodami, kad optimali darbo trukmė yra 90 valandų, mes galime išmatuoti kritinių kelių algoritmo „gerumą“ santykinės procentinės paklaidos terminais ir gauname $(110-90)/90 = 20/90 = 0{,}2222 = 22{,}22\%$. Taigi šiame konkrečiame pavyzdyje kritinių kelių algoritmu gauta darbo trukmė yra 22,22% didesnė už optimalią.

Tam tikra prasme 15 pavyzdžio situacija yra pati nepalankiausia kritinio kelio algoritmui. Prieš tris dešimtis metų amerikiečių matematikas R. L. Grehemas (Ronald L. Graham) iš Bello laboratorijų įrodė, kad kritinių kelių algoritmas nepriklausomoms užduotims visada duoda tvarkaraščius, kurių darbo trukmė gali skirtis nuo optimalios tik tam tikru palyginti nedideliu procentu, ir nustatė, kaip didžiausia procentinė paklaida priklauso nuo vykdytojų skaičiaus (8.3 lentelė).

Vykdytojų skaičius	Didžiausia paklaida
2	16,66%
3	22,22%
4	25%
5	26,66%
⋮	⋮
N	$(N-1)/(3N)$

8.3 lentelė. Kritinių kelių algoritmo didžiausia galima procentinė paklaida, kai užduotys nepriklausomos.

15 pavyzdžio su 3 vykdytojais procentinė paklaida 22,22% yra pati didžiausia, kokia tik gali pasitaikyti. Grehemo atradimas mus nuramina, kad, taikydami kritinių kelių algoritmą nepriklausomoms užduotims, labai nenuklysime į šalį.

IŠVADOS

Nebus perdėta pasakius, kad vienoks ar kitoks žmogaus veiklos organizavimas yra labai svarbus šiuolaikinio gyvenimo bruožas. Tai būdinga ir mums kasdieniniame gyvenime (mes sudarinėjame savo reikalų tvarkaraščius, net nesuprasdami, kad tai darome). O štai nuolatinis tvarkaraščių sudarymas, taupant laiką ir pinigus, yra didžiausia problema pramonėje, moksle, valdyme ir t.t.

Tvarkaraščių sudarymo uždaviniai iš esmės yra matematinės prigimties, o tvarkaraščių sudarymo matematika yra ir nesudėtinga, ir kartu labai turininga. Mes galėjome pažvelgti tik į tą nesudėtingąją pusę, tačiau suvokiame, kad matematiniai metodai leidžia padaryti gerokai daugiau, negu čia išmokome.

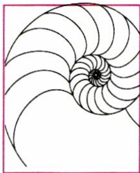
Šiame skyriuje nagrinėjome vieną iš daugelio klasikinių ir svarbių tvarkaraščių sudarymo uždavinių tipų, dažniausiai vadinamų **mechanizmų tvarkaraščių uždaviniais**. Mechanizmų tvarkaraščių sudarymo uždaviniuose mums duota *užduočių aibė*, *nuoseklumo sąryšių* aibė bei identiškų *vykdytojų* aibė. Reikia sudaryti tvarkaraštį taip skiriant užduotis vykdytojams, kad bendra visų užduočių *vykdymo trukmė* būtų kiek galima mažesnė.

Prieš imdamiesi nuosekliai nagrinėti tvarkaraščių sudarymo uždavinius, mes pirmiausiai pateikėme bazinį tvarkaraščio sudarymo modelį, vadinamą *prioritetų sąrašo modeliu*. Prioritetų sąrašo modelis mums leido kurti, lyginti ir analizuoti tvarkaraščius. Naudojant prioritetų sąrašo modelį, galima rinktis įvairias strategijas (kiekviena strategija veda prie tam tikro prioritetų sąrašo sudarymo). Šiame skyriuje mes nagrinėjome dvi pagrindines tvarkaraščių sudarymo strategijas. Pirmoji buvo *mažėjančių trukmių algoritmo* strategija, kuri nors intuityviai ir yra prasminga, tačiau praktiškai duoda ne visai efektyvius tvarkaraščius. Antroji strategija, vadinama *kritinių kelių algoritmu*,

bendru atveju yra daug pranašesnė už mažėjančių trukmių algoritmą, nors ir ji nepasiekia optimalaus ir efektyvaus algoritmo idealo. Kritinių kelių algoritmas yra geriausiai žinomas ir plačiausiai naudojamas, sudarant tvarkaraščius pramonėje ir verslininkystėje.

Nors per pastaruosius 30 metų matematikai atrado daug kitų, sudėtingesnių strategijų mechanizmų tvarkaraščiams sudaryti, tačiau iki šiol nėra žinomas toks algoritmas, kuris būtų efektyvus ir kuriuo būtų galima gauti optimalų tvarkaraštį. Bendra specialistų nuomone, toks algoritmas iš viso neįmanomas.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



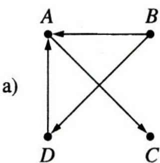
darbo trukmė
faktorialas
įeičių laipsnis
išeičių laipsnis
kelias
kritinių kelių algoritmas
kritinių kelių sąrašas
kritinis kelias
kritinis laikas
lankas
mažėjančių trukmių algoritmas
mažėjančių trukmių sąrašas
nepriklausomos užduotys
nuoseklumo sąryšis
orgrafas
priešsrovio algoritmas
prioritetų sąrašas
projekto orgrafas
tvarkaraščio sudarymo uždavinys
užduotis
vykdymo trukmė
vykdytojas
viršūnės kritinis kelias

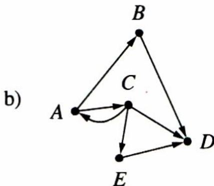
PRATIMAI

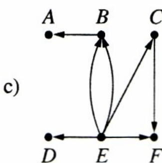
Apšilimas

1. Kiekvienam orgrafui a)–c) sudarykite ir užpildykite tokią lentelę

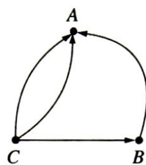
Viršūnė	Laipsnis	Įeičių laipsnis	Išeičių laipsnis	Viršūnė eina prieš viršūnes	Viršūnė eina po viršūnių
A					
B					
⋮					

a)


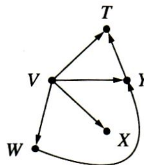
b)


c)


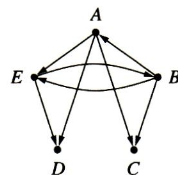
2. Surašykite kiekvieno pateikto orgrafo viršūnes ir lankus. (Lanką iš X į Y žymėkite $\overrightarrow{XY}$.) Nustatykite kiekvienos viršūnės įeičių laipsnį ir išeičių laipsnį; nurodykite visas viršūnes, prieš kurias ji eina, taip pat visas viršūnes, po kurių ji eina.



a)



b)



c)

3. Remdamiesi pateikiamais duomenimis, nubraižykite orgrafo paveikslą.

a) Viršūnės: A, B, C, D.
Lankai: A eina prieš viršūnes B ir C; D eina po viršūnių A ir B.

b) Viršūnės: A, B, C, D, E.
Lankai: A eina prieš viršūnes C ir E; B eina prieš viršūnes D ir E; C eina po viršūnių D ir E; D eina po viršūnių C ir E.

4. Remdamiesi nurodytais duomenimis, nubraižykite orgrafo paveikslą.

a) Viršūnės: A, B, C, D.
Lankai: A eina prieš viršūnes B, C ir D; C eina po viršūnių B ir D.

b) Viršūnės: V, W, X, Y, Z.
Lankai: X eina prieš viršūnes V, Z ir Y; W eina po viršūnių V, Y ir Z; Z eina prieš viršūnę Y ir eina po viršūnių W ir V.

5. Sudarykite MTB statybos tvarkaraštį vienam vykdytojui, jei iš pradžių turi būti surinkti pamatai, o grindys turi būti sutvirtintos anksčiau, negu bus atlikta bent viena iš dviejų užduočių: arba surinktas kupolas, arba surinktos sienos.

6. Sudarykite MTB statybos tvarkaraštį vienam vykdytojui, jei iš pradžių turi būti surinktos grindys, o sandarinimas turi būti atliktas anksčiau negu bus surinktas kupolas.

7. Paaiškinkite, kas yra neleistina šiame MTB statybos tvarkaraštyje vienam vykdytojui:

Užduotys	*GS*	*PS*	*KS*	*SS*	*GT*	*ST*	*VT*	*KT*	*SP*	*BJ*	*SI*	*SV*	*SK*	*KO*	*VA*

Laikas: 0 5 12 20 26 31 38 42 47 50 54 58 60 63 64 70

8. Paaiškinkite, kas yra neleistina šiame MTB statybos tvarkaraštyje vienam vykdytojui:

Užduotys	*GS*	*SS*	*KS*	*PS*	*GT*	*VT*	*ST*	*KT*	*BJ*	*SP*	*SV*	*SI*	*SK*	*KO*	*VA*

Laikas: 0 5 11 19 26 31 35 42 47 51 54 56 60 63 64 70

9. Paaiškinkite, kas yra neleistina šiame MTB statybos tvarkaraštyje dviem vykdytojams:

Laikas:	0	7	15	23	28	31	35	36	42
Tibsas 1	*PS*	*KS*	Prastova	*KT*	*SP*	*VT*	*KO*	*VA*	

Tibsas 2	*GS*	*SS*	*GT*	*ST*	*BJ*	*SI*	*SV*	*SK*	Prastova	
Laikas:	0	5	11	16	23	27	31	33	36	42

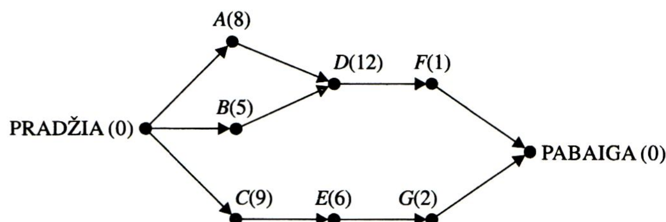
10. Paaiškinkite, kas yra neleistina šiame MTB statybos tvarkaraštyje trims vykdytojams:

Laikas:	0	8	17	24	28	29	32	34	35	41
Tibsas 1	*KS*	Prastova	*ST*	*BJ*	Prastova	*SP*	Prastova	*KO*	*VA*	

Laikas:	0	6	12	17	21	24	29	34	37	41
Tibsas 2	*SS*	Prastova	*GT*	*VT*	Prastova	*KT*	*SI*	*SK*	Prastova	

Laikas:	0	5	12	34	36	41
Tibsas 3	*GS*	*PS*	Prastova	*SV*	Prastova	

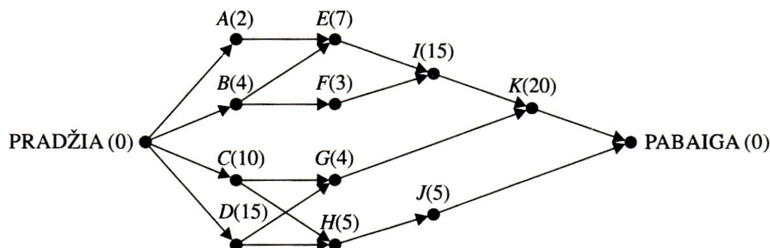
11 ir 12 pratimuose nagrinėjamas projektas, kurį sudaro septynios užduotys (A, B, C, D, E, F, G), o orgrafas yra toks:



11. Sudarykite projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami mažėjančių trukmių algoritmą.

12. a) Raskite iš kiekvienos viršūnės einančio kritinio kelio ilgį.
b) Koks yra projekto orgrafo kritinio kelio ilgis?
c) Sudarykite projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.
d) Paaiškinkite, kodėl šiuo atveju gautas tvarkaraštis yra optimalus.

13–16 *pratimuose nagrinėjamas projektas, kurį sudaro* 11 *užduočių, o projekto orgrafas yra toks*:



13. Sudarykite projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami mažėjančių trukmių algoritmą.

14. a) Raskite iš kiekvienos viršūnės einančio kritinių kelių ilgį.
b) Koks yra projekto orgrafo kritinio kelio ilgis?
c) Sudarykite projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.
d) Paaiškinkite, kodėl šiuo atveju gautas tvarkaraštis yra optimalus.

15. Sudarykite projekto tvarkaraštį trims vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.

16. Sudarykite projekto tvarkaraštį trims vykdytojams, taikydami mažėjančių trukmių algoritmą.

17. Sudarykite MTB statybos tvarkaraštį dviem vykdytojams, jei sienas ir kupolą reikia surinkti prieš pradedant rinkti pamatus.

18. Sudarykite MTB statybos tvarkaraštį trims vykdytojams, jei grindis reikia surinkti prieš pradedant rinkti pamatus.

19. Keturi vykdytojai turi atlikti darbą, susidedantį iš 10 užduočių. Yra 3 užduotys, kurių kiekvienai atlikti reikia 4 minučių; 3 užduotys, kurioms reikia po 7 minutes; 4 užduotys, kurioms reikia po 15 minučių. Nė vienos 15-minutės užduoties negalima pradėti, kol nebus baigtos visos 7-minutės užduotys.
a) Nubraižykite šio projekto orgrafą.
b) Sudarykite projekto tvarkaraštį keturiems vykdytojams, taikydami mažėjančių trukmių algoritmą.

20. Trys vykdytojai turi atlikti darbą, susidedantį iš aštuonių užduočių. Yra viena užduotis, kuriai reikia 10 minučių; dvi užduotys, kurioms reikia po 7 minutes; dvi užduotys, kurioms reikia po 12 minučių; trys užduotys, kurioms reikia po 20 minučių. Nė vienos 20-minutės užduoties negalima pradėti, kol nebus baigtos abi 7-minutės užduotys.

a) Nubraižykite šio projekto orgrafą.

b) Sudarykite projekto tvarkaraštį trims vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.

■ **Treniruotė**

21. a) Nubraižykite lentele aprašyto aštuonių užduočių projekto orgrafą.

Užduotis	Užduoties vykdymo trukmė	Užduotys, kurios turi būti pabaigtos prieš pradedant užduotį
A	5	*C*
B	5	*C*, *D*
C	5	
D	2	*G*
E	15	*A*, *B*
F	6	*D*, *H*
G	2	
H	2	*G*

b) Sudarykite šio projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.

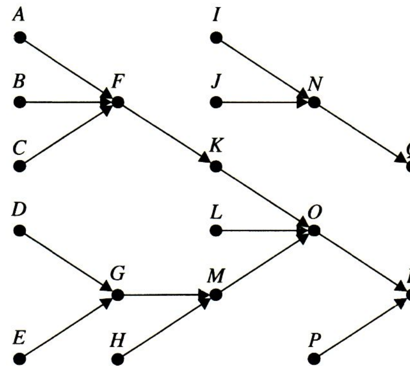
22. a) Nubraižykite lentele aprašyto aštuonių užduočių projekto orgrafą.

Užduotis	Užduoties vykdymo trukmė	Užduotys, kurios turi būti atliktos prieš pradedant užduotį
A	3	
B	10	*C*, *F*, *G*
C	2	*A*
D	4	*G*
E	5	*C*
F	8	*A*, *H*
G	7	*H*
H	5	

b) Sudarykite šio projekto tvarkaraštį dviem vykdytojams, taikydami kritinių kelių algoritmą.

Jei visų projekto užduočių vykdymo trukmės vienodos, o jo orgrafas (be viršūnių PRADŽIA *ir* PABAIGA) *yra medis, tai kritinių kelių algoritmas duoda optimalų tvarkaraštį. Minėtu teiginiu reikia remtis* 23 *pratime.*

23. Sudarykite optimalų tvarkaraštį trims vykdytojams pagal parodytą projekto orgrafą. Laikykite, kad kiekvienai užduočiai atlikti reikia 3 dienų. (Viršūnės PRADŽIA ir PABAIGA praleistos.)



24–27 *pratimuose minima nepriklausomų užduočių sąvoka. Primename, kad užduotys nepriklausomos, jei tarp jų nėra jokių nuoseklumo sąryšių.*

24. Paaiškinkite, kodėl projekte, kurio užduotys nepriklausomos, mažėjančių trukmių algoritmas ir kritinių kelių algoritmas sutampa.

25. Žemiau pateiktas tvarkaraštis keturiems vykdytojams, kai projekto užduotys yra nepriklausomos. Sudarykite šio projekto tvarkaraštį keturiems vydytojams, remdamiesi mažėjančių trukmių algoritmu.

1 vykdytojas	$A(7)$	$B(5)$	
2 vykdytojas	$C(7)$	$D(5)$	
3 vykdytojas	$E(6)$	$F(6)$	
4 vykdytojas	$G(4)$	$H(4)$	$I(4)$

26. Žemiau pateiktas tvarkaraštis trims vykdytojams, kai projekto užduotys yra nepriklausomos. Sudarykite šio projekto tvarkaraštį trims vydytojams, remdamiesi mažėjančių trukmių algoritmu.

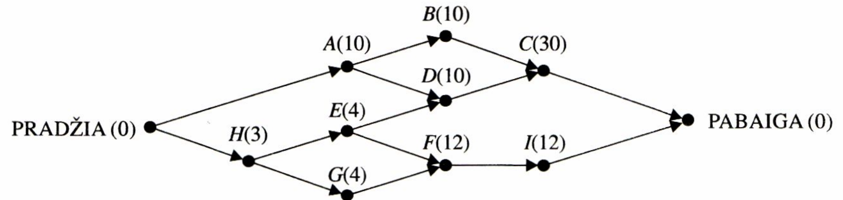
1 vykdytojas	$A(8)$	$B(2)$	
2 vykdytojas	$C(5)$	$D(5)$	
3 vykdytojas	$E(4)$	$F(3)$	$G(3)$

27. Taikydami mažėjančių trukmių algoritmą, sudarykite tvarkaraštį trims vykdytojams, kai nepriklausomų užduočių vykdymo trukmės yra 1, 1, 2,

2, 5, 7, 9, 13, 14, 16, 18 ir 20. Ar šis tvarkaraštis optimalus? Atsakymą pagrįskite.

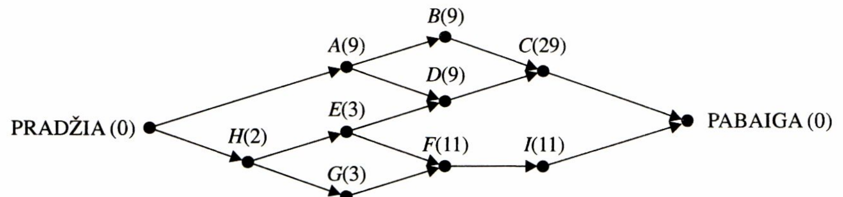
28. Greitesniojo vykdytojo paradoksas.

a) Taikydami kritinių kelių algoritmą, sudarykite tvarkaraštį dviem vykdytojams, kai projektą sudaro devynios užduotys, o jo orgrafas yra toks.



b) Paaiškinkite, kodėl punkte a) sudarytas tvarkaraštis yra optimalus.

c) Dabar sakykime, kad kiekvienos užduoties vykdymo trukmė sumažėja vienetu (vykdytojai yra greitesni). Gauname tokį projekto orgrafą.



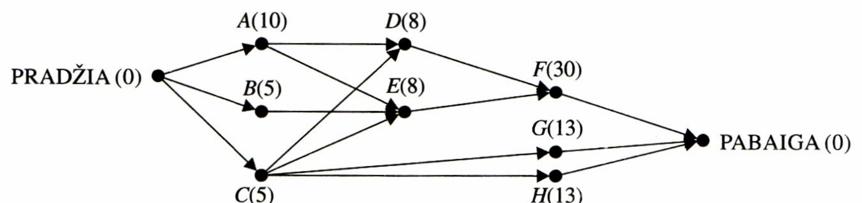
Taikydami kritinių kelių algoritmą, iš naujo sudarykite tvarkaraštį dviem vykdytojams.

d) Paaiškinkite, kodėl punkte c) sudarytas tvarkaraštis yra optimalus.

e) Palyginkite darbo trukmę punktuose a) ir c). Paaiškinkite, kas atsitiko.

29. Papildomojo vykdytojo paradoksas.

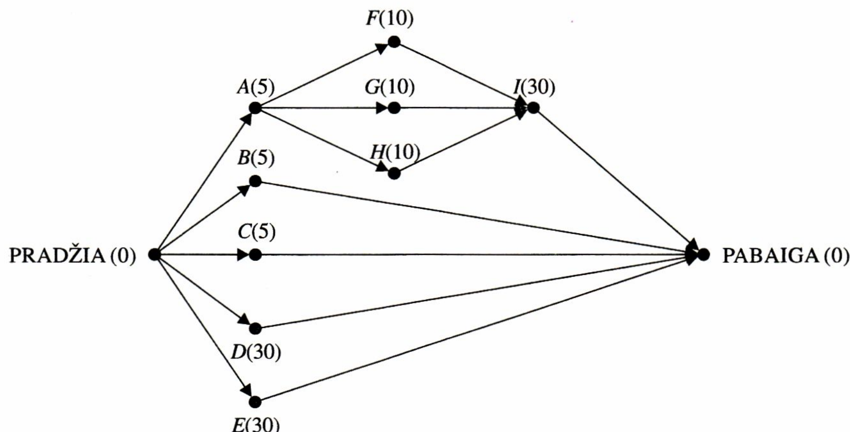
a) Taikydami kritinių kelių algoritmą, sudarykite tvarkaraštį dviem vykdytojams, kai projektą sudaro aštuonios užduotys, o jo orgrafas yra toks.



b) Paaiškinkite, kodėl punkte a) sudarytas tvarkaraštis yra optimalus.

c) Dabar sakykime, kad vykdytojų skaičius padidinamas iki trijų. Vėl taikydami kritinių kelių algoritmą, sudarykite tvarkaraštį trims vykdytojams.
d) Paaiškinkite, kodėl punkte c) sudarytas tvarkaraštis yra optimalus.
e) Palyginkite darbo trukmę punktuose a) ir c). Paaiškinkite, kas atsitiko.

30. Nagrinėkime projektą, kurį sudaro devynios užduotys, o jo orgrafas yra toks.



a) Taikydami kritinių kelių algoritmą, sudarykite projekto tvarkaraštį trims vydytojams.
b) Raskite optimalų projekto tvarkaraštį trims vykdytojams.

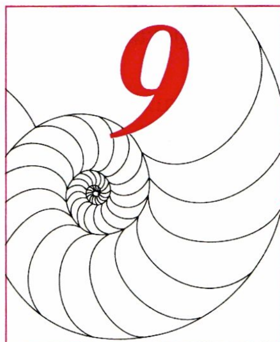
Varžybos

1966 metais R. L. Grehemas iš Bello laboratorijų įrodė, kad jeigu T_{opt} yra optimali darbo trukmė, tai bet kurio kito tvarkaraščio darbo trukmė T tenkina nelygybę $T \leqslant (2 - \frac{1}{N})T_{\text{opt}}$; čia N yra vykdytojų skaičius. Pavyzdžiui, kai vykdytojai du ($N = 2$), tai bet kurio tvarkaraščio darbo trukmė tenkina nelygybę $T \leqslant \frac{3}{2}T_{\text{opt}}$; taigi kad ir kaip būtų sudarytas tvarkaraštis, darbo trukmė negali būti daugiau kaip pusantro karto didesnė už optimalią darbo trukmę. Minėtais teiginiais reikia remtis 31–33 *pratimuose.*

31. $T_1 = 21$ ir $T_2 = 12$ yra to paties projekto dviejų skirtingų tvarkaraščių 4 vykdytojams darbo trukmės. Įrodykite, kad T_2 yra optimali darbo trukmė, o T_1 yra didžiausia įmanoma darbo trukmė.

32. Tarkime, kad sudarytas projekto tvarkaraštis dviem vykdytojams, kurio darbo trukmė $T_1 = 9$. Paaiškinkite, kodėl optimali šio projekto darbo trukmė negali būti mažesnė už 6.

33. Tarkime, kad yra sudaryti du skirtingi projekto tvarkaraščiai trims vykdytojams, o tų tvarkaraščių darbo trukmės yra $T_1 = 12$ ir $T_2 = 15$. Paaiškinkite, kodėl šio projekto optimali darbo trukmė yra tarp 9 ir 12.

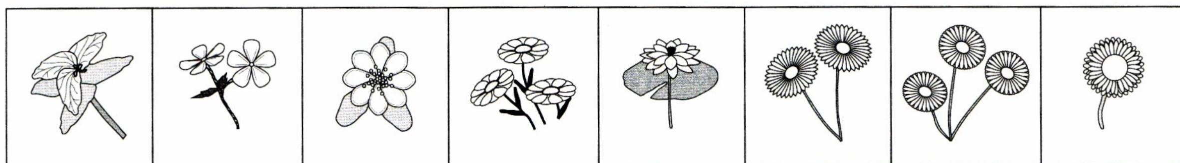


Spiralinis augimas ir Fibonačio skaičiai

Smiltelėje išvyst pasaulį,
Matyti dangų gėlėje,
Laikyt ant delno
begalybę,
Semt amžinybę dienoje.
V. Bleikas
(William Blake)

Aukso pjūvis

9.1 pav. Myli – nemyli, myli – nemyli. . .



Atsakymas į šį kiekvienam vaikinui ar merginai ypač svarbų klausimą priklauso nuo to, ar gėlės žiedlapių skaičius yra lyginis, ar ne (nelyginis reikštų, kad myli, o lyginis – kad ne). Nejaugi gėlės žiedlapių skaičius nėra atsitiktinis? Atsakymas truputį netikėtas: ne! Iš tikrųjų gėlės žiedlapių skaičių reguliuoja tam tikros taisyklės, ir, jas žinodami, galėtume palankiau nukreip-

ti meilės laivą. Bet mums įdomiausia, kad tose taisyklėse slypi neįprasta ir įdomi matematika.

Kai kurios iš tų taisyklių taip pat reguliuoja ir kitų gamtos kūrinių – ananasų, kankorėžių, sraigių kriauklių augimą. Visi šie gamtos objektai turi vieną bendrą bruožą: jie auga labai savitu spiraliniu būdu.

Spiralinis augimas ir jo matematinis nagrinėjimas yra pagrindinė šio skyriaus tema. Ją nagrinėdami, susidursime ir su kitomis matematinėmis sąvokomis, kurios įdomios ir pačios: *Fibonačio skaičiais*, *aukso pjūviu ir gnomonais*.

FIBONAČIO SKAIČIAI

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89...

9.2 pav.

9.2 pav. matome labai žinomą skaičių eilę – vadinamuosius **Fibonačio skaičius**. Taip ji pavadinta italų matematiko Leonardo iš Pizos (labiau žinomo Fibonačio pravarde) garbei*. Matome, kad visi šios eilės skaičiai, išskyrus pirmuosius tris, yra tokie pat, kaip 9.1 pav. matomų įvairių gėlių žiedlapių skaičiai. Tas nepaprastas Fibonačio skaičių pasirodymo tarp kai kurių augalų ir gėlių dažnumas susijęs su irgi nepaprastomis šių skaičių matematinėmis savybėmis. Vienas iš jų nagrinėsime dabar, o kitas – vėlesniuose skyreliuose.

Pirmiausia Fibonačio skaičių eilė yra begalinė. (Tai ir reiškia daugtaškis po skaičiaus 89.) Ta eilė dar ir sutvarkyta. Tai reiškia, kad yra pirmasis Fibonačio skaičius (1), antrasis (1), trečiasis (2), ..., septintasis (13), ..., dešimtasis (55), vienuoliktasis (89) ir t.t. Kadangi Fibonačio skaičių yra be galo daug, tai aišku, jog visų nesurašysime. Visas begalinis Fibonačio skaičių rinkinys vadinamas **Fibonačio seka**. Iškart kyla logiškų klausimų. Koks 12-tasis Fibonačio sekos skaičius? Koks 100-tasis Fibonačio skaičius? Ar yra taisyklė, kuri leistų suskaičiuoti N-tąjį Fibonačio skaičių, kad ir kokį N imtume?

Prieš atsakydami į šiuos klausimus, įsivesime patogius žymėjimus. Pirmąjį Fibonačio skaičių mes žymėsime F_1, antrąjį – $F_2, \ldots$, dešimtąjį – F_{10} ir t.t. 9.1 lentelėje matome 11 pirmųjų Fibonačio skaičių.

$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 2$	$F_4 = 3$	$F_5 = 5$	$F_6 = 8$	$F_7 = 13$	$F_8 = 21$	$F_9 = 34$	$F_{10} = 55$	$F_{11} = 89$	$F_{12} = ?$

9.1 lentelė.

* Fibonačis (apie 1170–1250) buvo pirklio sūnus ir jaunystėje daug keliavo su tėvu. Keliaudamas ir besimokydamas Šiaurės Afrikoje, jis susidūrė su arabiškąja skaičių sistema bei algebra, su kuriomis 1202 metais knygoje *Liber Abaci* (Abako knyga) supažindino krikščioniškąją Europą. Nors jis labiausiai prisimenamas kaip atskleidęs Fibonačio skaičius, bet šie tesudaro nedidelę jo knygos bei įnašo į istoriją dalį.

Fibonačio skaičių, sąraše užimantį N-tąją vietą, žymėsime F_N. Kadangi natūraliais skaičiais aprašome du skirtingus dalykus (pačius Fibonačio skaičius ir jų užimamą vietą), tai galima susipainioti. Sakysime, mes turime skirti $F_8 + 1 = 21 + 1 = 22$ nuo $F_{8+1} = F_9 = 34$. Panašiai $F_N - 1$ (atimame 1 iš N-tojo Fibonačio skaičiaus) labai skiriasi nuo F_{N-1} (tai Fibonačio skaičius, einantis prieš pat N-tąjį Fibonačio skaičių).

Dabar grįžkime prie iškeltų klausimų. Pirmiausia, kam lygus F_{12}? Pažvelgę į 9.1 lentelę, matome labai aiškų dalyką – kiekvienas Fibonačio skaičius (jau nuo F_3) yra dviejų prieš jį esančių Fibonačio skaičių suma. Jei taip, tai $F_{12} = 89 + 55 = 144$. Na, o F_{100}? Tai būtų nesunku pasakyti, jei žinotume F_{99} ir F_{98}, betgi jų nežinome. Iš tikrųjų, šiuo metu mes nežinome $F_{99}, F_{98}, F_{97}, \ldots, F_{14}$ ir F_{13}. Kita vertus, panorėję mes galėtume (pamažu, bet garantuotai) palaipčiui sukalti Fibonačio kopėčias: $F_{13} = 144+89 = 233$, $F_{14} = 233 + 144 = 377$ ir t.t. Truputį sumeluokime ir sakykime, kad $F_{97} = 83621143489848422977$ ir $F_{98} = 135301852344706746049$ sužinojome iš draugo. Dabar galime eiti prie

$$F_{99} = 135301852344706746049 + 83621143489848422977 = \\ = 218922995834555169026,$$

ir pagaliau

$$F_{100} = 218922995834555169026 + 135301852344706746049 = \\ = 354224848179261915075.$$

Dabar jau griebkimės F_N. Mes žinome, kad bet kuris Fibonačio skaičius (po F_2) yra lygus dviejų pirmesniųjų sumai. Mūsų žymėjimais

$$\underbrace{F_N}_{\substack{\text{ieškomasis}\\ \text{Fibonačio skaičius}}} = \underbrace{F_{N-1}}_{\substack{\text{prieš jį esantis}\\ \text{Fibonačio skaičius}}} + \underbrace{F_{N-2}}_{\substack{\text{prieš jį per dvi}\\ \text{vietas esantis}\\ \text{Fibonačio skaičius}}}$$

Žinoma, ši taisyklė netaikytina F_1 (nes jis neturi pirmesnių) ir F_2 (turi tik vieną pirmesnį), todėl, užbaigdami aprašymą, mes pridėsime šiuos du atskiruosius atvejus, rašydami $F_1 = 1$ ir $F_2 = 1$. Faktų

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{ir} \quad F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$$

visuma pasako mums viską, ką reikėtų žinoti ieškant Fibonačio skaičių. Iš esmės tai ir yra jų apibrėžimas. Nors šis apibrėžimas yra labai paprastas, tačiau jis turi vieną didelį trūkumą. Jau matėme, kad, ieškodami tokio Fibonačio skaičiaus, kaip F_{100}, pirmiau turėtume surasti visus prieš jį esančius

Fibonačio skaičius ($\ldots$, F_{96}, F_{97}, F_{98} ir F_{99}). Kiekvienas jų randamas paprasta sudėtimi, tačiau skaičiai greitai didėja, ir tas procesas, nors ir paprastas, darosi skausmingai ilgas ir nuobodus. Įsivaizduokite, kad jums reikėtų tokiu būdu suskaičiuoti $F_{10\,000}$. Net pagalvoti apie tai baisu. Ar yra kitas būdas?

Toliau parašyta sudėtinga formulė yra vadinama **Binė formule***:

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N\right].$$

Nepaisant baisokos išvaizdos, vienas dalykas daro ją patrauklią – ji leidžia rasti bet kurį Fibonačio skaičių, neieškant jo pirmtakų. Todėl sakome, kad Binė formulė aprašo Fibonačio skaičius *išreikštiniu pavidalu.* Kadangi joje yra toks baisus skaičius, kaip $\sqrt{5}$, ir keliama laipsniu, tai rankomis pagal Binė formulę Fibonačio skaičių neieškosime. Net turint gerą skaičiuoklį (su y^x klavišu), dideli Fibonačio skaičiai randami tik apytiksliai. (Taip yra dėl to, kad skaičiuoklis skaičiuoja tik septynis ar aštuonis $\sqrt{5}$ ženklus po kablelio.)

LYGTIS $x^2 = 1 + x$

Dabar mes nagrinėsime dalyką, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo visiškai nesusijęs su Fibonačio skaičiais. Iš tikrųjų tai vidurinės mokyklos algebros uždavinys – išspręsti kvadratinę lygtį $x^2 = x + 1$. Pirmiausia perkelkime visus lygties narius į kairiąją pusę. Gauname lygtį $x^2 - x - 1 = 0$. Dabar randame šaknis** $(1+\sqrt{5})/2$ ir $(1-\sqrt{5})/2$. Apytiksles tų šaknų reikšmes raskime skaičiuokliu. Skaičius $(1+\sqrt{5})/2$ apytiksliai lygus 1,61803399, o skaičiaus $(1-\sqrt{5})/2$ apytikslė reikšmė yra $-0{,}61803399$***. Kadangi $\sqrt{5}$ yra iracionalusis skaičius, kurį išreiškianti dešimtainė trupmena yra begalinė ir neperiodinė, tai abi šios reikšmės yra (pakankamai geri) tikslių skaičių $(1+\sqrt{5})/2$ ir $(1-\sqrt{5})/2$ artiniai. Praktiškai dažniausiai pakanka trijų ženklų po kablelio, tada $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ ir $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0{,}618$. (Ženklas $\approx$ mums primena, kad skirtingose apytikslės lygybės pusėse esantys skaičiai nėra tiksliai lygūs.) Matome, kad $(1+\sqrt{5})/2$ yra vienas iš skaičių, kurie Binė formulėje keliami N-tuoju laipsniu, o kitas tik ženklu skiriasi nuo antrojo $(1-\sqrt{5})/2$.

Yra ir daugiau įdomių sąsajų tarp lygties $x^2 = x + 1$ bei Fibonačio skaičių. Kurį laiką nagrinėkime tik teigiamąją šaknį $(1+\sqrt{5})/2$ ir, kad būtų patogiau, žymėkime ją graikiškąja raide Φ (tariame: fi). Tai, kad Φ yra lygties

* Šią formulę iš tikrųjų paskelbė 1765 metais L. Oileris. Prancūzų mokslininkas Ž. Binė (Jacques Binet) iš naujo atrado ją 1843 metais.

** Jeigu primiršote kvadratinės lygties šaknų formulę, primename, jog lygties $ax^2 + bx + c = 0$ šaknys yra $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

*** Ne atsitiktinai abiejų skaičių skaitmenys po kablelio sutampa – sudėję tuos skaičius, turime gauti vienetą: $(1+\sqrt{5})/2 + (1-\sqrt{5})/2 = 1$.

$x^2 = x + 1$ sprendinys, reiškia, kad $\Phi^2 = \Phi + 1$. Pakartotinai remdamiesi šiuo faktu, galime rasti kitus Φ laipsnius. Sakysime, padauginę iš Φ abi lygybės $\Phi^2 = \Phi + 1$ puses, gauname $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$. Φ^2 pakeitę reiškiniu $\Phi + 1$, turime $\Phi^3 = (\Phi + 1) + \Phi$, t.y. $\Phi^3 = 2\Phi + 1$. Kad gautume Φ^4, padauginkime iš Φ abi paskutiniosios lygybės puses, tada $\Phi^4 = 2\Phi^2 + \Phi$. Vėl pakeitę Φ^2 į $\Phi + 1$, gauname $\Phi^4 = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2$. Tęsdami šiuo būdu, toliau gautume

$$\Phi^5 = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 5\Phi + 3,$$
$$\Phi^6 = 5\Phi^2 + 3\Phi = 5(\Phi + 1) + 3\Phi = 8\Phi + 5,$$
$$\Phi^7 = 8\Phi^2 + 5\Phi = 8(\Phi + 1) + 5\Phi = 13\Phi + 8 \text{ ir t.t.}$$

Dabar mes ne tik matome, kad Fibonačio skaičiai pasirodo beskaičiuojant įvairius Φ laipsnius, bet ir galime suprasti, kodėl taip atsitinka (žr. 25 pratimą). Taisyklė, kurią mes susekėme Φ laipsniams skaičiuoti, yra tokia:

$$\Phi^N = F_N \Phi + F_{N-1}.$$

AUKSO PJŪVIS

Laikinai vėl grįžkime prie Fibonačio skaičių. Panagrinėkime, kaip kinta dviejų gretimų Fibonačio skaičių santykis.

Iš 9.2 lentelės matome, kad po kelių pradinių svyravimų gretimųjų Fibonačio skaičių santykis F_N/F_{N-1} nusistovi ties 1,618. Tačiau pabrėžtina, kad nė vienas santykis nėra tiksliai 1,618. Pavyzdžiui, imdami aštuonis ženklus po kablelio, gauname, kad $144/89 \approx 1{,}6179775$, tuo tarpu $233/144 \approx 1{,}6180556$. Mes siūlome skaitytojui atlikti keletą mėginimų, paėmus skaičiuoklį (žr. 5 ir 6 pratimus), ir suskaičiuoti dar keletą F_N/F_{N-1}. Tada greitai paaiškėja, kad kuo toliau, tuo labiau Fibonačio skaičių santykis F_N/F_{N-1} artėja prie kažkokio skaičiaus. Geriausiai rastume tą skaičių, leisdamiesi į kraštutinumus. Pabandykime suskaičiuoti F_{99}/F_{98} bei F_{100}/F_{99} 40 ženklų

F_N	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$\frac{F_N}{F_{N-1}}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	$\frac{233}{144}$	
Dešimtainė forma (suapvalinus iki trijų skaitmenų)	1,000	2,000	1,500	1,667	1,600	1,625	1,615	1,619	1,618	1,618	1,618	1,618	

9.2 lentelė. Gretimų Fibonačio skaičių santykis.

po kablelio tikslumu. (Suprantama, tai yra daug daugiau, negu gali paprastas skaičiuoklis!)

$$
\begin{aligned}
\frac{F_{99}}{F_{98}} &= \frac{218922995834555169026}{135301852344706746049} \approx \\
&\approx 1{,}6180339887498948482045868343656381177203, \\
\frac{F_{100}}{F_{99}} &= \frac{354224848179261915075}{218922995834555169026} \approx \\
&\approx 1{,}6180339887498948482045868343656381177202.
\end{aligned}
$$

Nors šie skaičiai ir nesutampa, jų pirmieji 39 ženklai po kablelio yra vienodi, todėl jie tik šiek tiek skiriasi. Tad prie kokio gi skaičiaus vis labiau ir labiau artėja tie santykiai F_N/F_{N-1}? Jūs teisingai spėjate – prie $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

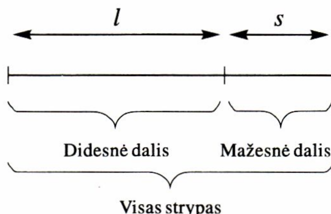
Skaičius $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, jau keletą kartų pasirodęs nagrinėjant Fibonačio skaičius, ir vaidins pagrindinį vaidmenį likusioje šio skyriaus dalyje. Iš tikrųjų Φ yra vienas iš labiausiai matematikoje paplitusių skaičių ir žinomas **aukso pjūvio** vardu. Išskyrus nebent π, nėra kito skaičiaus, kurio reikšmė mūsų materialiame pasaulyje būtų didesnė, negu aukso pjūvio reikšmė. Senovės graikai priskirdavo jam mistinių savybių ir vadino *dieviškąja proporcija*. Didysis astronomas Kepleris rašė:

> *Geometrija turi dvi didžiąsias brangenybes: viena yra Pitagoro teorema, kita –* [*aukso*] *pjūvis. Pirmąją mes galėtume lyginti su auksu; antrąją – vadinti neįkainojamu brangakmeniu.*

Prirašyta daugybė knygų apie aukso pjūvio reikšmę geometrijoje, mene, architektūroje, muzikoje bei gamtoje. Pirmasis žinomas matematinis traktatas apie aukso pjūvį buvo *Dieviškoji proporcija* (*De Divina Proportione*), kurią 1496–1499 metais parašė vienuolis Lukas Pačolis, o iliustravo Leonardas da Vinčis.

Kas išskiria aukso pjūvį Φ iš visų skaičių? Atsakymas būtų toks: kad skaičius Φ paženklintas ypatinga ir vienintele savybe – *jis išreiškia tobulą pusiausvyrą tarp didesniojo ir mažesniojo*. Pamėginsime tai paaiškinti.

Sakykime, kad turime strypą, kurį norėtume taip perlaužti į dvi dalis (didesnę ir mažesnę, 9.3 pav.), kad tarp jų būtų nebloga pusiausvyra, t.y., kad



9.3 pav.

didesnioji dalis nebūtų per didelė, o mažesnioji – per maža. Iš esmės tai reiškia, kad proporcija tarp didesniosios dalies d ir mažesniosios dalies m turi būti tokia pat, kaip ir proporcija tarp viso strypo $(d+m)$ ir didesniosios dalies d. Kitaip sakant, didesnioji dalis sutinka su mažesniąja taip, kaip visuma su didesniąja dalimi, t.y.

$$\frac{d}{m} = \frac{d+m}{d}.$$

Gautąją lygtį vadinsime **tobulosios pusiausvyros lygtimi**. Kad ją išspręstume, pirmiau perrašykime taip:

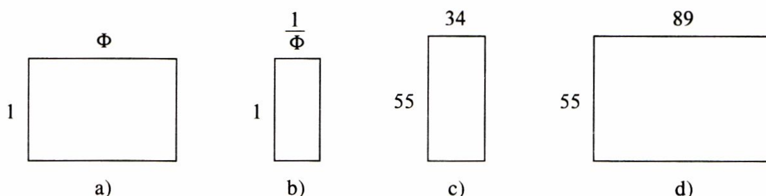
$$\frac{d}{m} = \frac{d}{d} + \frac{m}{d} = 1 + \frac{m}{d}.$$

Atlikus keitinį $d/m = x$, lygtis $d/m = 1 + m/d$ virsta lygtimi

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Padauginę abi puses iš x, gauname $x^2 = x + 1$, o tai mūsų sena pažįstamoji. Viena iš dviejų lygties $x^2 = x + 1$ šaknų $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0{,}618$ yra neigiama ir gali būti atmesta (strypo dalių santykis nebūna neigiamas!). Lieka viena šaknis, ir ji yra $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$. Išvada: tobuloji pusiausvyra tarp didesniosios dalies (d) ir mažesniosios dalies (m) pasiekiama, kai dalmuo d/m lygus aukso pjūviui Φ.

Tobuloji pusiausvyra tarp didesniojo ir mažesniojo, reiškiama aukso pjūviu, ypač įspūdingai atrodo stačiakampyje. Tarkime, kad turime stačiakampį, kurio ilgesniosios kraštinės (nesvarbu, pagrindo ar aukštinės) ilgis yra i, o trumpesniosios – t. Jeigu ilgesniosios ir trumpesniosios dalių santykis lygus aukso pjūviui Φ, tai tokį stačiakampį vadinsime **auksiniu stačiakampiu**. 9.4 pav. a) ir b) yra auksiniai stačiakampiai, o c) ir d) – beveik auksiniai stačiakampiai.



.4 pav.

Aukso pjūvio istorija

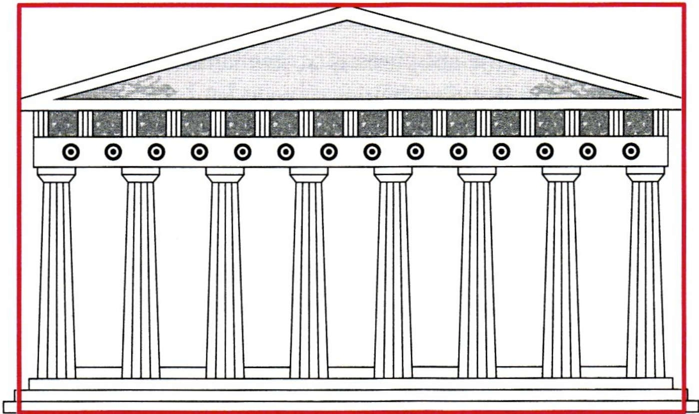
Nors aukso pjūvio taikymų architektūroje atvejai atsekami iki biblinių laikų (sakoma, kad Cheopso piramidės matmenys remiasi Φ), bet nuoseklaus aukso pjūvio taikymo architektūroje pradininkai yra graikai. Žymusis Senovės Graikijos skulptorius Fidijas (Phidias) nuolat remdavosi aukso pjūviu, norėdamas suteikti skulptūroms tobulesnes proporcijas*.

Kitas puikus pavyzdys, kaip graikai taikė aukso pjūvį, yra Partenono (Parthenon) proporcijos (9.5 pav.).

Auksinę proporciją plačiai naudojo ir Renesanso menininkai – L. da Vinčis, Botičelis ir kiti.

Garsusis vokiečių psichologas G. Fechneris 1876 metais padarė keletą bandymų, mėgindamas nustatyti, ar tam tikros proporcijos yra malonesnės žmonėms, negu kitos. Viename bandyme žmonės iš daugybės įvairiausių proporcijų stačiakampių turėjo išrinkti vieną, maloniausią akiai. 9.3 lentelėje apibendrinti Fechnerio bandymo rezultatai. Matome, kad auksinis stačiakampis buvo ypač mėgstamas: per 75% bandomųjų rinkosi stačiakampį, kurio proporcijos nenukrypsta nuo aukso pjūvio daugiau kaip 10%.

Fechnerio bandymai patvirtino graikų skulptorių ir architektų intuityviai suvoktą ypatingą estetinę aukso pjūvio proporcijos reikšmę. Šių laikų gamintojai naudojasi tuo, pakuodami gaminius į estetiškai malonių matmenų



9.5 pav. Partenono fasadas yra beveik tikslus auksinis stačiakampis.

$R = \frac{\text{ilgesnioji kraštinė}}{\text{trumpesnioji kraštinė}}$	1	1,2	1,25	1,33	1,45	1,49	$\Phi \approx 1{,}618$	1,75	2	2,5
Žmonių, pasirinkusių stačiakampį su kraštinių santykiu R, procentas	3%	0,2%	2%	2,5%	7,7%	20,6%	35%	20%	7,5%	1,5%

9.3 lentelė. Fechnerio duomenys.

* Dėl to aukso pjūvis ir žymimas pirmąja jo vardo raide Φ (graikiška raidė „fi“).

dėžutes. (Pavyzdžiui, daugelis maisto produktų dėžučių turi aukso pjūviui artimus matmenis – manoma, kad tai skatina jas pirkti.)

Nuo graikų šventyklų per Renesanso meną iki dėžučių vienas skaičius – aukso pjūvis – iškilo virš kitų ieškant grožio ir pusiausvyros. Todėl nenuostabu, kad pati gamta jį atrado daug anksčiau negu žmonės.

GNOMONAI

Kol kas kalbėjome apie tokias egzotiškas matematines sąvokas, kaip Fibonačio skaičiai ir aukso pjūvis, bet nė žodžio nepasakėme apie šio skyriaus temą – spiralinį augimą gamtoje. Ryšį tarp šių sąvokų nustato dar egzotiškesnis matematinis darinys – gnomonas.

Kiek mums žinoma, pirmasis gnomonus nagrinėjo Aristotelis*. Geometrijoje figūros A **gnomonas** yra tokia figūra, kuri, tinkamai prijungta prie A, sudaro su ja naują figūrą A', panašią į figūrą A.

Kol dar nepradėjome gilintis į gnomonus, prisiminkime **panašumo** sąvoką. Iš vidurinės mokyklos geometrijos kurso žinome, kad du objektai panašūs, jeigu vienas yra sumažinta arba padidinta kito objekto kopija. Taigi, du objektai yra panašūs, jei jie duoda tą patį vaizdą, o skiriasi tik jų masteliai. Padidinę nuotrauką, susiduriame su panašumo sąvoka. Panašiai projekcinis aparatas rodo ekrane padidintą skaidrės vaizdą – vėl susiduriame su panašumu.

Pateikiame keletą elementariosios geometrijos faktų, kuriais remsimės šiame skyrelyje.

- Du trikampiai yra panašūs, jeigu jų kraštinės yra proporcingos. Du trikampiai panašūs, jei jų kampai lygūs.
- Du kvadratai visada panašūs.
- Du stačiakampiai yra panašūs, jei jų kraštinės yra proporcingos, t.y.

$$\frac{\text{1-ojo ilgesnioji kraštinė}}{\text{1-ojo trumpesnioji kraštinė}} = \frac{\text{2-ojo ilgesnioji kraštinė}}{\text{2-ojo trumpesnioji kraštinė}}.$$

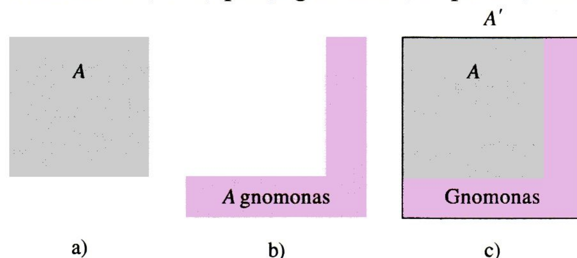
- Du skrituliai visada panašūs.
- Du žiedai yra panašūs, jei jų vidiniai ir išoriniai spinduliai proporcingi, t.y.

$$\frac{\text{1-ojo išorinis spindulys}}{\text{1-ojo vidinis spindulys}} = \frac{\text{2-ojo išorinis spindulys}}{\text{2-ojo vidinis spindulys}}.$$

Dabar jau esame pasirengę imtis gnomonų.

* Aristotelis ir graikų geometrų pitagoriečių mokykla buvo susižavėję gnomonais ir priskirdavo jiems mistinių savybių. (Beje, senovės Graikijoje religija ir geometrija nedaug tesiskyrė.)

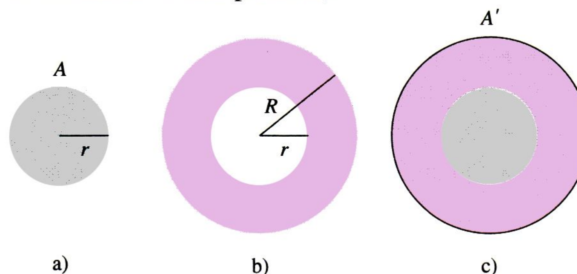
1 pavyzdys. Nagrinėkime 9.6 a) pav. kvadratą A. 9.6 b) pav. raidės L pavidalo figūra yra kvadrato A gnomonas, kadangi, ją tinkamai pridėjus prie kvadrato A (9.6 c) pav.), gauname į A panašų kvadratą A'.



9.6 pav.

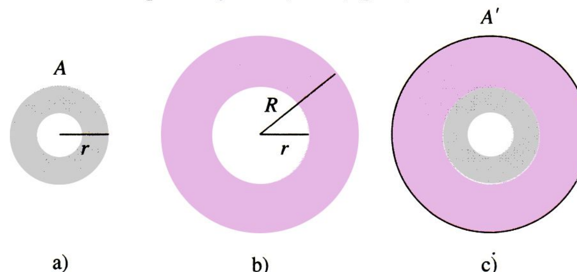
Beje, šio teiginio negalima pasakyti atvirkščiai: kvadratas A nėra L pavidalo figūros gnomonas, kadangi nėra kaip dėti tas figūras, kad gautume figūrą, panašią į raidės L pavidalo figūrą.

2 pavyzdys. 9.7 b) pav. raidės O formos žiedas (jo vidaus spindulys r, o išorės – R) yra 9.7 a) pav. spindulio r skritulio gnomonas, nes pridėję O formos žiedą prie pradinio skritulio, gausime naują skritulį A' (kaip žinome, du skrituliai visada panašūs).



9.7 pav.

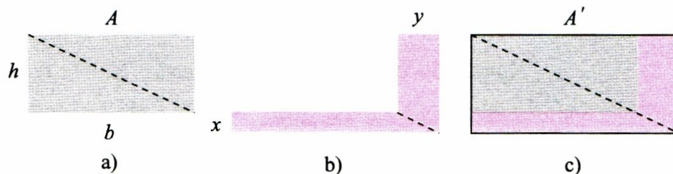
3 pavyzdys. Tarkime, kad A yra raidės O formos žiedas, kurio išorės spindulys yra r (9.8 a) pav.). Imkime O formos žiedą, kurio vidaus spindulys r, o išorės spindulys R (9.8 b) pav.).



9.8 pav.

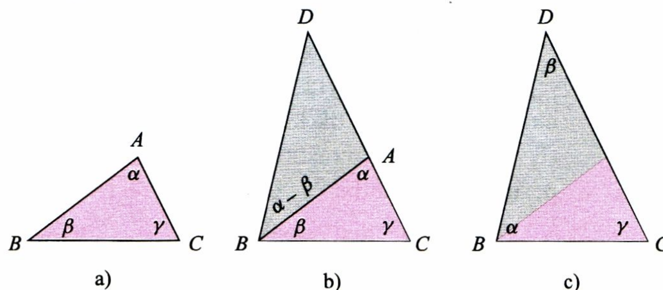
Ar tas paskesnysis O formos žiedas yra A gnomonas? Atsakymas neigiamas, nors sudėję tuos du O formos žiedus (9.8 c) pav.) ir gavome kitą O formos žiedą A', tačiau A' nėra panašus į A. Kaip turėtų atrodyti A gnomonai? (Atsakymo ieškokite 22 pratime.)

4 pavyzdys. Tarkime, kad turime bet kurį stačiakampį A, kurio aukštinė yra h, o pagrindas – b (9.9 a) pav.). 9.9 b) pav. pavaizduota L formos figūra yra stačiakampio A gnomonas tik tada, kai santykiai b/h ir y/x yra lygūs. Tada galime sudaryti stačiakampį A', panašų į A (žr. 28 pratimą). Puikus būdas gauti stačiakampio L formos gnomonus – tai pratęsti pradinio stačiakampio A įstrižainę – ji turi būti ir gnomono L kampo įstrižainė.



9.9 pav.

5 pavyzdys. Tarkime, kad ABC yra bet kuris trikampis, kurio vidaus kampai turi α, β ir γ laipsnių, ir tarkime, kad α yra didesnis už β (9.10 a) pav.). Galime sudaryti tokį trikampį ABD, kurio kraštinė AD būtų kraštinės AC tęsinys, o kampas B turėtų $\alpha - \beta$ laipsnių (9.10 b) pav.). Trikampis ABD yra pradinio trikampio ABC gnomonas, nes gautasis trikampis BDC (9.10 c) pav.) turi tokius pat kampus, kaip ir pradinis trikampis, todėl yra į jį panašus.

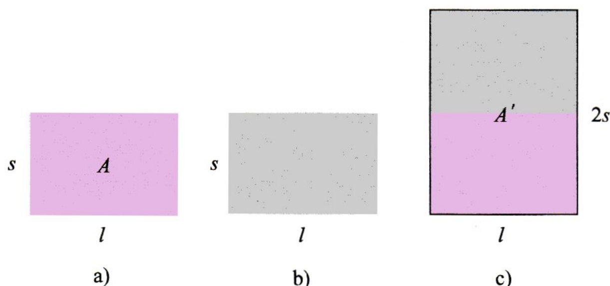


9.10 pav.

5 pavyzdys iliustruoja gražų teiginį, labai patikusį Pitagorui ir jo mokiniams*: trikampių gnomonai patys yra trikampiai. Įdomiausias šios konstrukcijos atvejis yra, kai $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$ ir $\gamma = 72^\circ$ (žr. 29 pratimą). Šiuo atveju ir pradinis trikampis, ir jo gnomonas yra lygiašoniai trikampiai.

* Pradinė idėja priskiriama Heronui Aleksandriečiui, kuris buvo Pitagoro mokinys.

6 pavyzdys. Yra ir kitas senovės graikų geometrus žavėjęs uždavinys: ar gali figūra būti gnomonas pati sau? Atsakymas į šį klausimą teigiamas.



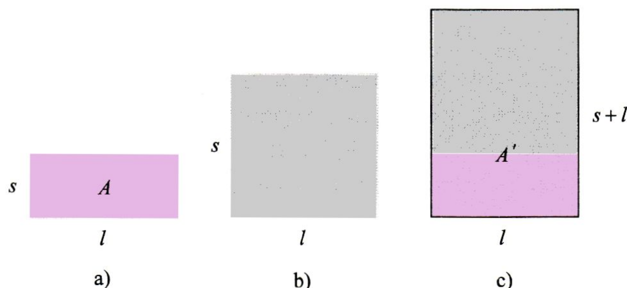
9.11 pav.

Nagrinėkime stačiakampį, kurio kraštinės yra l ir s, kaip parodyta 9.11 a) pav. Jei A yra gnomonas pats sau, tai tada stačiakampis A', kurio kraštinės l ir $2s$, yra panašus į A. Dabar ilgesniosios kraštinės ilgis yra jau $2s$, o trumpesniosios – l. Tai reiškia, kad

$$\frac{l}{s} = \frac{2s}{l}, \text{ arba } l^2 = 2s^2, \text{ t.y. } l = s\sqrt{2}.$$

Trumpiau tariant, jeigu ilgesnioji stačiakampio kraštinė yra $\sqrt{2}$ ($\approx$1,414) kartų didesnė už trumpesniąją kraštinę, tai stačiakampis yra gnomonas pats sau.

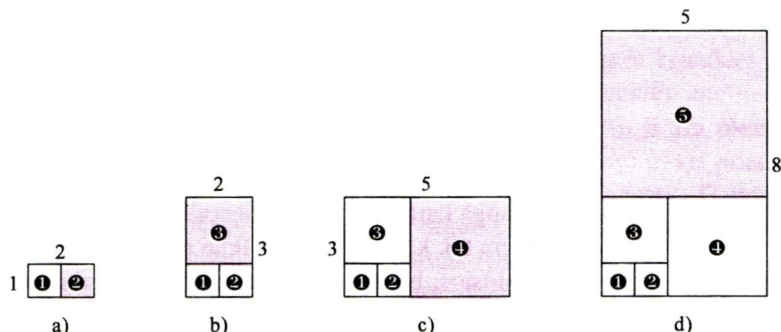
7 pavyzdys. Dabar mes kelsime truputį sunkesnį, bet svarbų klausimą – kada stačiakampio gnomonas yra kvadratas? Vėl nagrinėkime stačiakampį, kurio kraštinės yra l ir s (9.12 a) pav.). Vienintelė viltis, kad gnomonas bus kvadratas, yra tik kai kvadrato kraštinė lygi l, kaip parodyta 9.12 b) pav. (Kvadratas, kurio kraštinė s, niekaip netiks, nes sudaryto stačiakampio trumpesnioji kraštinė bus s, o ilgoji – $s + l$, ir jis tikrai nepanašus į A: lygybė $l/s = (l + s)/s$ neįmanoma.)



9.12 pav.

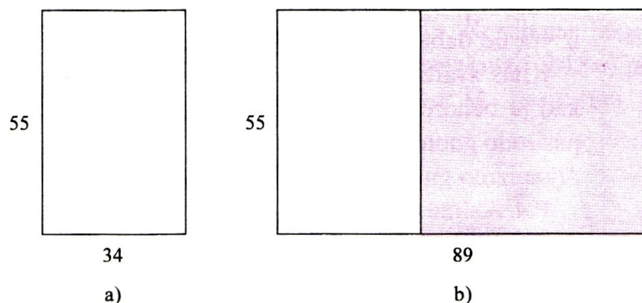
Jei kvadratas yra gnomonas, tai sudarytas stačiakampis A' (9.12 c) pav.) yra panašus į A, o tai reiškia, kad $l/s = 1 + s/l$. Tai yra ne kas kita, kaip tobulosios pusiausvyros lygtis, kurią jau žinome, ir jai tinka tik auksinio stačiakampio proporcijos. Išvada: *kvadratas yra stačiakampio gnomonas tada ir tik tada, kai stačiakampis yra auksinis.*

Kuo šis faktas įdomus? Nagrinėkime tokį figūros „auginimo" būdą. Pradėkime nuo 1 × 1 matmenų kvadrato (pažymėto skaičiumi ❶ 9.13 pav.). Pridėkime prie jo kitą 1 × 1 kvadratą (pažymėtą skaičiumi ❷ 9.13 pav.). ❶ ir ❷ kvadratai drauge sudaro 2 × 1 matmenų stačiakampį, kaip parodyta 9.13 a) pav. Pavadinkime jį antrosios kartos figūra. Kad gautume trečiosios kartos figūrą, pridėkime 2 × 2 matmenų kvadratą ❸ taip, kaip parodyta 9.13 b) pav. Naujoji forma (❶, ❷ ir ❸ drauge) yra 2 × 3 matmenų stačiakampis. Toliau prie jo pridėkime 3 × 3 matmenų kvadratą ❹ taip, kaip parodyta 9.13 c) pav. Po to pritvirtinkime 5 × 5 matmenų kvadratą ❺ kaip 9.13 d) pav.



9.13 pav.

Tęsdami figūros sudarymą nurodytu būdu, mes matome, kad kiekvienos kartos stačiakampio kraštinės yra gretimi Fibonačio skaičiai. Po keleto kartų, pavyzdžiui, turėtume 34 × 55 matmenų stačiakampį. Toks stačiakampis jau laikytinas auksiniu, ir kiekviena vėlesnioji karta bus beveik auksinis stačiakampis (9.14 pav.). Figūra, kurią sudarinėjome, dabar auga, likdama panaši į anksčiau buvusią.

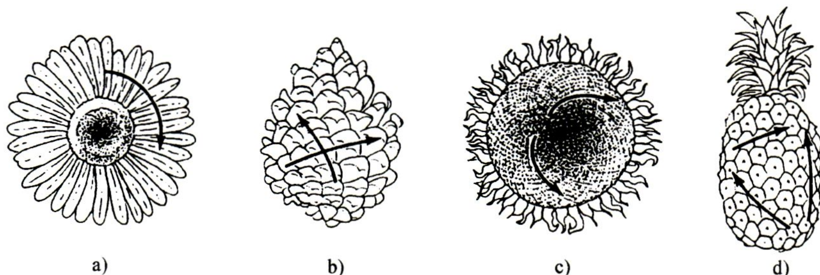


9.14 pav. Praktiškai stačiakampiai a) ir b) yra panašūs (abu yra beveik auksiniai stačiakampiai).

GNOMONINIS AUGIMAS

Šį skyrių pradėjome klausimu apie gėlių žiedlapius. Klausimą dabar suformuluosime truputį bendriau – kokios taisyklės tvarko geometrinį stiebo lapų ar gėlės žiedlapių vaizdą*?

Pasirodo, kad nelauktai daug bei įvairių gamtos objektų turi ypatingą giminystę su Fibonačio skaičiais. 9.15 pav. tai iliustruoja keletu būdingu pavyzdžių. Nors ir nėra visuotinai priimto šito gimininingumo aiškinimo, tačiau visi 9.15 pav. parodyti gamtos dariniai turi vieną bendrą bruožą – jų augimo prigimtį.



9.15 pav. a) Ramunės dažniausiai turi 8, 13, 21, 34, 55 arba 89 žiedlapius. b) Kankorėžių požiedžių spiralės turi po 8 arba 13 eilių. c) Saulėgrąžų sėklos išeina iš centro spirališkai po 55 ir 89. d) Ananasų žvynai eina spiralėmis po 8, 13 ar 21.

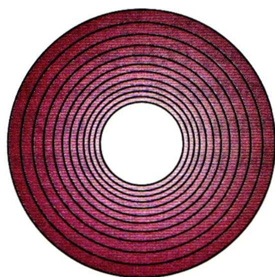
Yra du svarbiausi skirtingi organizmų augimo būdai. Labiau paplitęs (ir mums geriausiai žinomas) yra žmonių, gyvūnų bei daugelio augalų augimo būdas. Jį galėtume vadinti *visuotiniu augimu*, kai visos gyvosios organizmo dalys auga kartu (nebūtinai vienodu greičiu). Vienas tokio augimo būdo ypatumų yra tai, kad negalima aiškiai atskirti naujesniosios organizmo dalies nuo senesniosios, bent jau naujesniųjų ir senesniųjų dalių skyrimas neturi didesnės prasmės. Taip sakant, organizmo augimo istorija yra prarasta. Kai vaikas užauga, nelieka jokių atpažįstamų vaiko (kaip organizmo) augimo pėdsakų – štai kodėl mes vertiname nuotraukas!

Tai skiriasi nuo augimo būdo, būdingo nariuotajam nautilui, avino ragui, sekvojai ar ramunės žiedynui. Tokį augimą neformaliai galėtume pavadinti *augimu iš galo*, arba *asimetriniu augimu*. Taip augdamas organizmas įgyja vis naują pridedamąją dalį, ir senasis organizmas kartu su pridedamąja dalimi sudaro naują organizmą. Bet kurioje augimo pakopoje mes galime matyti ne tik dabartį, bet ir visą to organizmo praeitį. Visos praeities augimo pakopos ir yra tie dabartinės struktūros elementai.

Kitas svarbus faktas – dauguma šitaip augančių organizmų vystosi taip, kad jų bendroji forma išlieka, kitaip sakant, jie lieka panašūs į save. Čia ir pasirodo gnomonai – kad ir kaip vyktų augimas, prisidedančioji dalis yra viso organizmo gnomonas. Tokį augimą mes vadinsime **gnomoniniu augimu**.

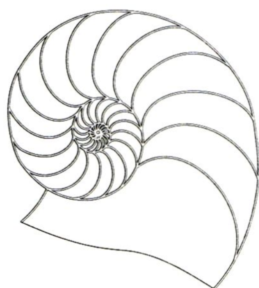
Pateiksime keletą gnomoninio augimo pavyzdžių.

* Augalų sudėtinių dalių (lapų, stiebų, žiedlapių, požiedžių ir t.t.) išsidėstymo ir pasiskirstymo mokslas vadinamas *filotaksija*.



9.16 pav. Skritulinis gnomoninis augimas.

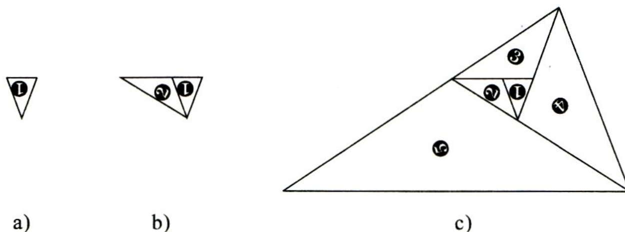
8 pavyzdys. Iš 2 pavyzdžio žinome, kad skritulio gnomonas yra raidės *O* formos žiedas, kurio vidinis spindulys yra lygus skritulio spinduliui. Taip gauname skritulinį gnomoninį augimą (9.16 pav.). Prisidedantieji prie pradinio skritulio žiedai išsaugo figūros apvalią formą per visą raidą. Tai labai primena sekvojos kamieno augimą.



9.17 pav. Nariuotojo nautilo kriauklės skersinis pjūvis.

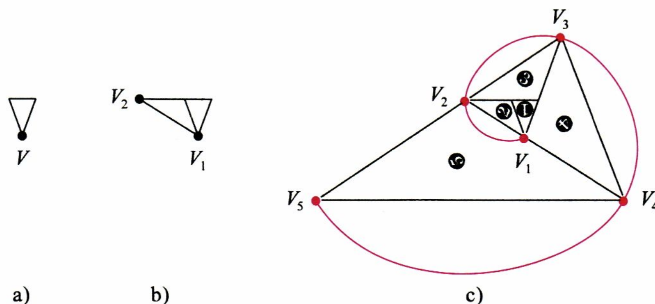
9 pavyzdys. 9.17 piešinyje parodytas gerai žinomos jūrų kriauklės – nariuotojo nautilo skersinis pjūvis. Spiralės pavidalo nautilo kriauklė yra gamtos architektūros stebuklas ir klasikinis gamtos gebėjimo derinti paskirtį su grožiu pavyzdys. Nautilas stato savąją kriauklę etapais – kiekvieną kartą prie jau esančios kriauklės priauginamas naujas narelis. Kiekvienoje augimo pakopoje nautilo kriauklės pavidalas lieka toks pat – tą nuostabią spiralę matome 9.17 pav. Iš esmės mes galėtume tai suprasti kaip klasikinį gnomoninio augimo pavyzdį – kiekvienas naujas prie kriauklės priaugantis narelis yra kriauklės gnomonas. Gnomoninis kriauklės augimas iš esmės vyksta taip: prie nariuotojo nautiliuko kriauklytės (o ji yra plona spiralytė, visais atžvilgiais panaši į suaugusios kriauklės spiralę) gyvis priaugina narelį (išskirdamas ypatingą sekreciją, kuri kalkėja ir stingsta). Gaunama truputį didesnė kriauklės spiralė, panaši į pradinę. Toliau procesas *rekursiškai* kartojasi: vėl priauginamas naujas narelis (jis yra tos panašios, bet jau truputį didesnės negu pradinė, kriauklės gnomonas), ir gaunama nauja vėl padidėjusi spiralė. Šis procesas tęsiasi, kol gyvis subręsta.

10 pavyzdys. Tai išgalvotas pavyzdys. Įsivaizduokite smulkių nežemiškų būtybių šeimą, norinčią pasistatyti statinį, kuriame galėtų gyventi. Paprastumo dėlei tarkime, kad geriausias būstas šiai šeimai būtų lygiašonis trikampis (9.18 a) pav.). Šeimai augant, pradiniame trikampiame kambaryje jai darosi ankšta. Jiems reikia persikelti į naują pastogę, kuri panaši į buvusiąją, tik didesnė. Jie galėtų tai padaryti, pristatydami tokį trikampį, kuris būtų pradinio trikampio gnomonas (žr. 5 pavyzdį). Rezultatas būtų 9.18 b) pav. statinys. Statybai tęsiantis, turėtume kažką panašaus į 9.18 c) pav. Laipsniškos statybos pakopos pažymėtos ❶, ❷, ❸, ❹ ir ❺. Tai reiškia, kad penktosios kartos statinys yra 9.18 c) pav. trikampis.



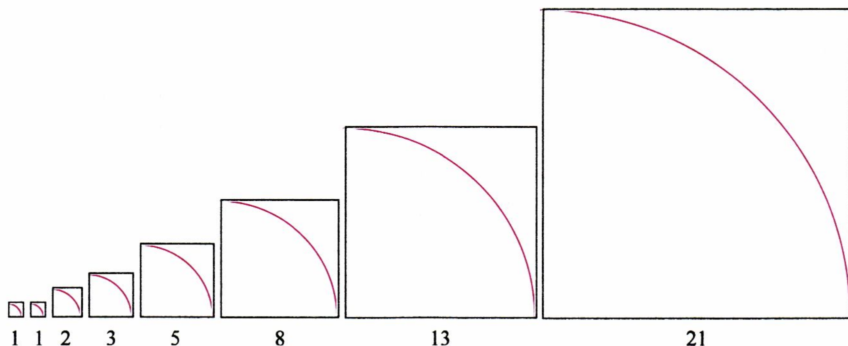
9.18 pav. a) b) c)

Jungdami įvairių gnomoninio augimo kartų trikampių V_1, V_2, V_3, V_4, $V_5, \ldots$ viršūnes, gauname ypatingą spiralinės formos rūšį (9.19 pav.), vadinamą **logaritmine spirale**. Logaritminė spiralė yra būdinga gnomoniniam gamtiniam augimui ir atpažįstama jūros kriauklėse, gyvūnų raguose ir t.t. Žinomiausias ir gražiausias logaritminės spiralės pavyzdys yra nariuotojo nautilo kriauklės išorės kontūras (9.17 pav.).

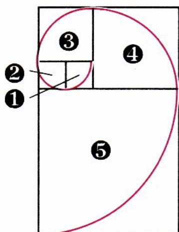


9.19 pav.

11 pavyzdys.



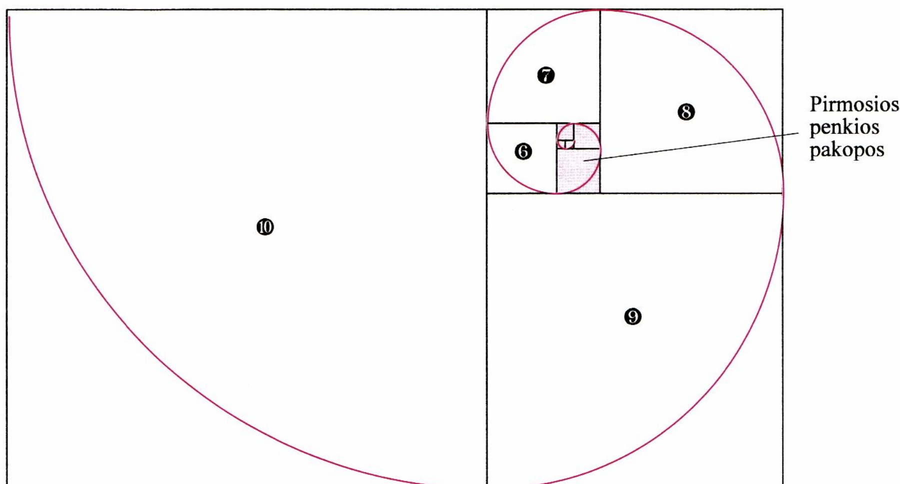
9.20 pav.



9.21 pav. Ankstyvosios augimo pakopos. Stačiakampiai dar ne auksiniai, augimas dar ne gnomoninis.

9.20 pav. matome įvairaus dydžio kvadratų rinkinį su įbrėžtuoju apskritimo ketvirčiu. Kvadratų matmenys yra Fibonačio skaičiai: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Pabandykime mėgdžioti gamtą ir įsivaizduokime tuos kvadratus esant konstrukcijos elementais. Mes statysime konstrukciją vis po žingsnį, pridėdami po kvadratą prie to, ką jau turime, laikydamiesi dviejų taisyklių: 1) bendroji konstrukcija visada yra stačiakampyje, kurio matmenys yra gretimieji Fibonačio skaičiai (tai jau darėme) ir 2) apskritimo ketvirčiai jungiami taip, kad naujasis prasideda, kur kitas buvo nutrūkęs. 9.21 pav. rodo penkias pirmąsias konstrukcijos pakopas. Iki šios vietos augimas dar ne gnomoninis. 9.22 pav. parodyta 10 pirmųjų pakopų (sumažintų, kad matytųsi bendras vaizdas).



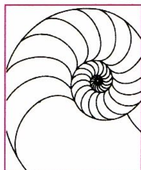
9.22 pav. Po keleto kartų stačiakampiai vis panašesni į auksinius, augimas darosi gnomoninis, o spiralė – logaritminė.

Šioje vietoje jau galėtume tvirtinti, kad stačiakampiai yra virtę auksiniais. Tai reikštų, kad kiekvienas naujai prijungiamas kvadratas iš esmės yra visos konstrukcijos gnomonas, ir spiralė įgauna aiškią logaritminės spiralės formą. Mes galėtume tęsti spiralę kiek tik panorėtume, o 20, 30 ar net 100 žingsnių pasitaiko net gamtoje. Tęsti toliau paliekame skaitytojo vaizduotei, bet, jei prireiktų pagalbos, mes patartume dar kartą pažvelgti į nariuotojo nautilo paveikslėlį.

IŠVADOS

Fibonačio skaičiai, gnomonai, aukso pjūvis, logaritminė spiralė – šiuos matematikos elementus taiko gamta, kurdama sudėtingas ir nuostabias formas, sakysime, ramunės, saulėgrąžos, nariuotojo nautilo ir pan. Šiame skyriuje nemėginome tiksliai išsiaiškinti, kaip ir kodėl tie sąryšiai tarp gamtos ir matematikos atsiranda, bet veikiau bandėme pabrėžti, kad tie ryšiai iš tikrųjų egzistuoja.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



auksinis stačiakampis
aukso pjūvis
Binė formulė
Fibonačio seka
Fibonačio skaičiai
gnomonas
gnomoninis augimas
logaritminė spiralė
panašumas
tobulosios pusiausvyros lygtis

PRATIMAI

Apšilimas

1. Raskite F_{15}, F_{16}, F_{17} ir F_{18}.

2. Raskite F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{22} ir F_{23}.

3. Žinodami, kad $F_{36} = 14930352$ ir $F_{37} = 24157817$, raskite a) F_{38}; b) F_{35}.

4. Žinodami, kad $F_{31} = 1346269$ ir $F_{33} = 3524578$, raskite a) F_{32}; b) F_{34}.

5. Skaičiuokliu suskaičiuokite F_{14}/F_{13}, F_{16}/F_{15} ir F_{18}/F_{17}.

6. Skaičiuokliu suskaičiuokite F_{20}/F_{19}, F_{21}/F_{20}, F_{22}/F_{21} ir F_{23}/F_{22}.

7. Tėra vienintelis Fibonačio skaičius (nelygus 1), kurio kubas – vėl Fibonačio skaičius. Koks tai skaičius?

8. Tėra vienintelis Fibonačio skaičius (nelygus 1), kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Koks tai skaičius?

9. Bet kurių dešimties iš eilės einančių Fibonačio skaičių suma, padalyta iš 11, lygi septintam iš tų skaičių:

$$\frac{F_N + F_{N+1} + F_{N+2} + F_{N+3} + \cdots + F_{N+9}}{11} = F_{N+6}.$$

Patikrinkite tai, imdami $N = 4$.

10. Paėmę bet kuriuos keturis iš eilės einančius Fibonačio skaičius ir iš dvigubojo trečiojo atėmę ketvirtąjį, visada gausime pirmąjį skaičių: $2F_{N+2} - F_{N+3} = F_N$. Patikrinkite tai, imdami $N = 8$.

11. Paėmę bet kuriuos tris iš eilės einančius Fibonačio skaičius ir sudauginę pirmąjį su trečiuoju, visada gausime vienetu mažiau už antrojo skaičiaus kvadratą: $F_N \cdot F_{N+2} = F_{N+1}^2 - 1$. Patikrinkite tai, imdami $N = 6$.

12. Paėmę bet kuriuos keturis iš eilės einančius Fibonačio skaičius ir sudauginę pirmąjį su ketvirtuoju, visados gausime skaičių, lygų trečiojo ir antrojo skaičių kvadratų skirtumui: $F_N \cdot F_{N+3} = F_{N+2}^2 - F_{N+1}^2$. Patikrinkite tai, imdami $N = 4$, $N = 5$ ir $N = 6$.

13 *ir* 14 *pratimams reikalingas skaičiuoklis su kėlimo laipsniu klavišu. Daugelyje skaičiuoklių kėlimo laipsniu klavišas yra* y^x. *Pavyzdžiui, kad suskaičiuotume* $2{,}3^7$, *įvedame* 2,3, *tada spaudžiame* y^x, *po to* 7 *ir* =.

13. Suskaičiuokite:

a) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$; b) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$;

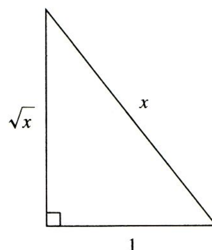
c) (rezultatas a) – rezultatas b))/$\sqrt{5}$.

14. Suskaičiuokite:

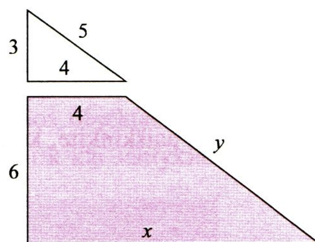
a) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{25}$; b) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}$.

15. Naudodamiesi skaičiuokliu, patikrinkite, kad $1/\Phi = \Phi - 1$.

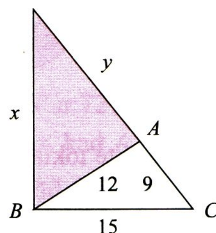
16. Žemiau pavaizduoto stačiojo trikampio įžambinės ilgis yra x, o statinių ilgiai – $\sqrt{x}$ ir 1. Raskite x.



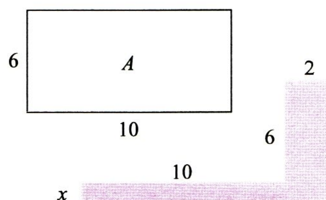
17. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad patamsintoji figūra būtų duotojo trikampio gnomonas.



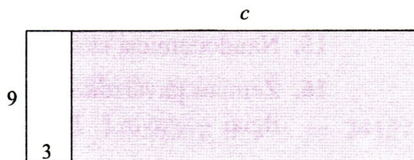
18. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad patamsintasis trikampis būtų duotojo trikampio ABC gnomonas.



19. Raskite tokias x reikšmes, kad patamsintoji figūra būtų duotojo stačiakampio gnomonas.

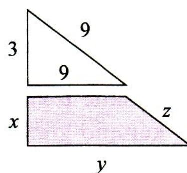


20. Raskite tokį patamsintojo stačiakampio ilgį c, kad jis būtų stačiakampio, kurio kraštinės yra 3 ir 9, gnomonas.



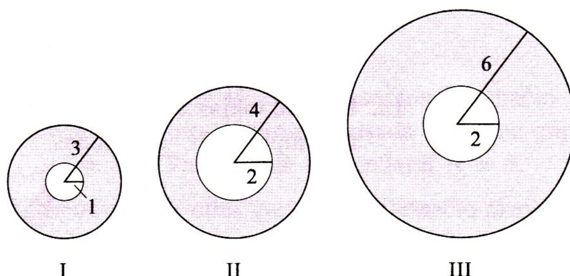
Treniruotė

21. Raskite tokias x, y ir z reikšmes, kad patamsintoji figūra turėtų aštuongubą duotojo trikampio plotą ir kartu būtų to trikampio gnomonas.

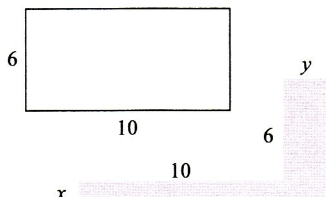


22. a) Kurie iš O formos žiedų (II ir III) yra panašūs į I? Pagrįskite atsakymą.

b) Paaiškinkite, kodėl O formos žiedas negali turėti gnomonų.



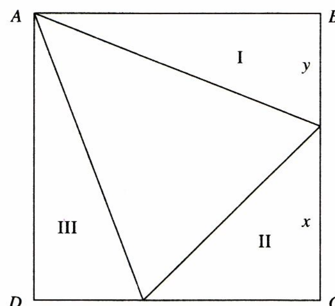
23. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad patamsintosios figūros plotas būtų 75 ir kartu ji būtų duotojo stačiakampio gnomonas.



24. Kada trikampis yra gnomonas pats sau?

25. Duota lygybė $\Phi^N = a\Phi + b$. Įrodykite, kad $\Phi^{N+1} = (a + b)\Phi + a$.

26. Figūra $ABCD$ yra kvadratas, o I, II ir III trikampiai – lygiapločiai. Įrodykite, kad x/y yra aukso pjūvis.

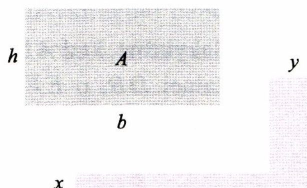


27. Sakykime, kad F yra Fibonačio seka.

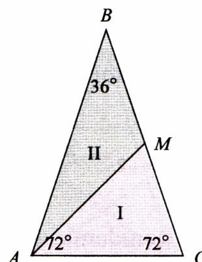
a) Suskaičiuokite $F_1+F_2+F_3$, $F_1+F_2+F_3+F_4$, $F_1+F_2+F_3+F_4+F_5$ ir t.t. (tęskite, kol išvysite dėsningumą).

b) Pastebėję punkte a) dėsningumą, parašykite formulę sumai $F_1+F_2+\cdots+F_N$ rasti.

28. Įrodykite, kad L formos objektas žemiau esančiame paveiksle yra stačiakampio gnomonas, tik kai santykiai h/b ir y/x yra lygūs.



29. Trikampis ABC turi 72°, 36° ir 72° kampus, kaip tat parodyta žemiau. M yra toks kraštinės BC taškas, kad AM ir AC ilgiai yra vienodi. Atkarpa AM dalija trikampį į du trikampius (I ir II), kaip parodyta paveikslėlyje. Paaiškinkite, kodėl II trikampis yra I trikampio gnomonas?



30. a) Remdamiesi išreikštine Fibonačio sekos formule

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N\right],$$

skaičiuokliu suskaičiuokite F_{10}.

b) Palyginkite punkto a) atsakymą su jau turėta reikšme $F_{10} = 55$. Ar galite paaiškinti, kodėl reikšmės nesutampa?

31. Pažymėkime

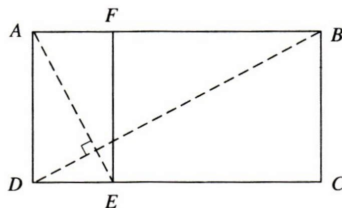
$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ir } b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Be skaičiuoklio išskleiskite ir suprastinkite: a) $a + b$; b) ab; c) $a^2 + b^2$; d) $a^3 + b^3$.

32. Nagrinėkime tokią skaičių seką: 5, 5, 10, 15, 25, 40, 65, ... N-tąjį sekos narį A_N išreikškite F_N.

33. Nagrinėkime tokią skaičių seką: 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ... N-tąjį sekos narį B_N išreikškite F_N.

34. Sakykime, kad $ABCD$ yra bet kuris stačiakampis, AE yra statmena įstrižainei DB, o EF – kraštinei AB. Įrodykite, kad stačiakampis $BCEF$ yra stačiakampio $ADEF$ gnomonas. (*Nurodymas*. Įrodykite, kad stačiakampiai $ADEF$ ir $ABCD$ yra panašūs.)



35. Imkime tokią Fibonačio sekos narius siejančią lygybę:

$$F_{N+2}^2 - F_{N+1}^2 = F_N \cdot F_{N+3}.$$

Remdamiesi algebrine tapatybe $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, įrodykite, kad ta lygybė yra teisinga su kiekvienu natūraliuoju N.

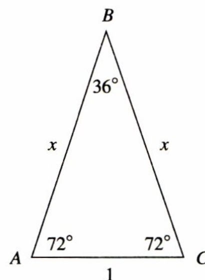
Varžybos

36. Įrodykite, kad bet kurių dešimties iš eilės einančių Fibonačio sekos narių suma dalijasi iš 11.

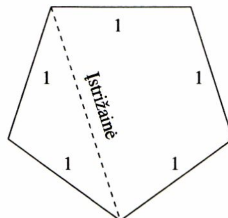
37. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju N teisinga lygybė $(F_N \cdot F_{N+3})^2 + (2F_{N+1} \cdot F_{N+2})^2 = (F_{2N+3})^2$.

38. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju N teisinga lygybė $F_{N+2}^2 - F_N^2 = F_{2N+2}$.

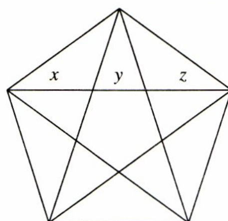
39. a) Trikampio ABC kampai yra 36°, 72° ir 72°, o kraštinės lygios 1, x ir x, kaip parodyta žemiau. (Tokie trikampiai vadinami **auksiniais**.) Įrodykite, kad $x = \Phi$.



b) Žemiau parodyto taisyklingojo penkiakampio briaunų ilgiai lygūs 1. Įrodykite, kad bet kurios įstrižainės ilgis yra Φ.



40. Senovės graikų laikais pitagoriečių brolijos simbolis buvo penkiakampė žvaigždė. Kaip parodyta žemiau, taisyklingojo daugiakampio įstrižainę kitos įstrižainės dalija į tris dalis, kurių ilgiai yra x, y ir z.



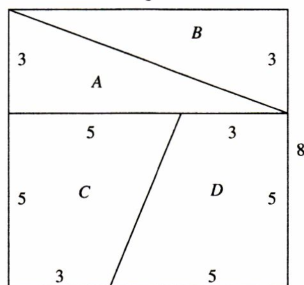
a) Įrodykite, kad

$$\frac{x}{y} = \Phi, \quad \frac{x+y}{z} = \Phi, \quad \frac{x+y+z}{x+y} = \Phi.$$

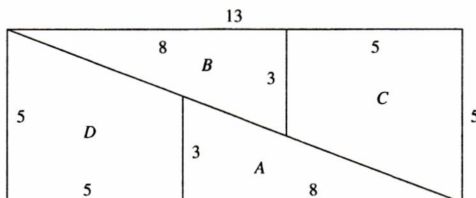
b) Įrodykite, kad iš $y = 1$ išplaukia

$$x = \Phi, \quad x + y = \Phi^2, \quad x + y + z = \Phi^3.$$

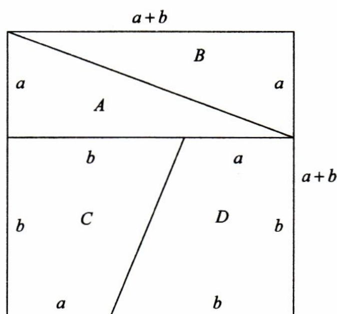
41. Dingusio ploto galvosūkis. Kvadratą, kurio kraštinė lygi 8, žemiau parodytu būdu dalijame į keturias dalis.

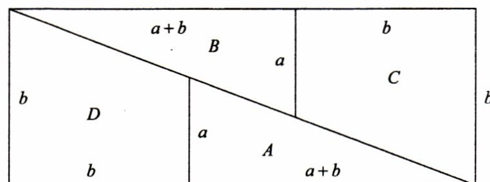


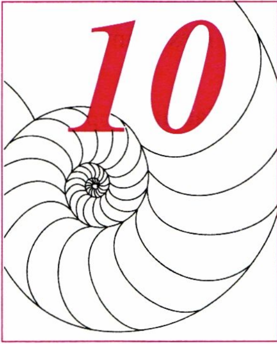
Jei tas dalis pertvarkysime į stačiakampį kitame brėžinyje parodytu būdu, tai pamatysime, kad, nors kvadrato plotas buvo $8 \times 8 = 64$, stačiakampio plotas jau $13 \times 5 = 65$.



a) Nubraižykite analogišką (didesnę) figūrą, naudodamiesi kitais (didesniais) Fibonačio skaičiais. Kaip kvadrato plotas sutinka su stačiakampio plotu?
b) Paaiškinkite plotų nesutapimą.
c) Pažiūrėkite į žemiau nubraižytas figūras. Kokie turi būti a ir b, kad šis galvosūkis nebūtų triukas, t.y. kad sričių plotai būtų vienodi?







Populiacijų kitimas

... veiskitės ir dauginkitės ...
SENASIS TESTAMENTAS. PRADŽIOS KNYGA 1, 22

Daugybėje – galybė

Ar galima išgelbėti nuo išnykimo juodąjį gandrą? Per kiek laiko prisipildys visi Vilniaus sąvartynai? Kiek pinigų Jūs turėsite banko sąskaitoje po dvejų metų? Kiek gyventojų bus Žemėje 2100 metais? Visi šie klausimai priklauso *populiacijos kitimo* problemų grupei.

Žodis „populiacija“ yra kilęs iš lotyniškojo *populus* („liaudis“, „žmonės“), todėl ir šiandien daugelyje kalbų jis reiškia šalies gyventojų visumą. Lietuvių kalboje jis paprastai reiškia vienos biologinės rūšies individų grupę. Tačiau mokslo kalboje jo vartosena taip išsiplėtė, kad dabar tas žodis jau gali reikšti bet kokių objektų (gyvų ar negyvų) visumą, kuri, laikui bėgant, kinta ir kurios kitimą norime kiekybiškai išreikšti. Todėl mes galime kalbėti ir apie paukščių, mašinų, konservų dėžučių, litų ir centų ir, be abejonės, žmonių populiaciją.

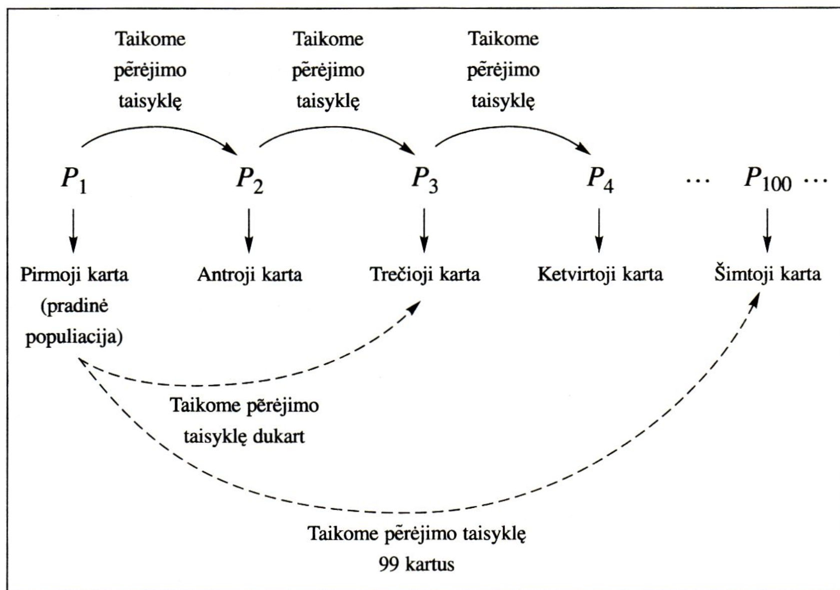
POPULIACIJŲ DYDŽIO KITIMAS

Matematikai skiria du populiacijų kitimo tipus: tolydųjį (nenutrūkstamą) ir diskretųjį. Esant **tolydžiajam kitimui**, populiacijos dydis keičiasi nuolat – kiekvieną valandą, kiekvieną minutę, kiekvieną sekundę ir t.t. Taip kinta

pinigai, padėti sąskaitoje, kurioje procentai priskaičiuojami nuolatos (yra tokias paslaugas siūlančių bankų!). Tačiau tokio kitimo mes šiame skyriuje nenagrinėsime.

Diskretusis kitimas yra labiausiai paplitęs ir natūraliausias populiacijos kitimo būdas. Mes jį galėtume vaizduotis kaip *trūkčiojantį* procesą: kažkiek laiko nieko nevyksta, po to būna staigus populiacijos pokytis (tai vadinama **pẽrėjimu**), po to vėl kažkiek laiko nieko nevyksta, po to vėl būna pẽrėjimas ir t.t. Žinoma, „kažkiek laiko nevyksta“ gali trukti ir 100 metų, ir valandą, ir sekundę, ir milijoninę sekundės dalį. Laikas tarp pẽrėjimų mums nesvarbus. Ką turime galvoje, geriausiai galėtume paaiškinti mūsų planetos žmonių populiacijos pavyzdžiu. Nieko neįvyksta, kol kas nors negimsta ar nemiršta, tada ir įvyksta pokytis (lygus $+1$ arba -1); po to vėl niekas nesikeičia iki kitos mirties ar gimimo. Kadangi kiekvieną akimirką kas nors gimsta ir ne ką rečiau miršta, tai gali atrodyti, kad pasaulio žmonių populiacija keičiasi tolydžiai. Kita vertus, viso pasaulio žmonių populiacijos kitimo dėsniai tik *kiekybiškai* skiriasi nuo kitimo dėsnių, veikiančių Rieškutėnų miestelio 408 gyventojų populiacijoje, nors pokyčių čia gali nebūti ištisus mėnesius ar net metus.

Pagrindinis populiacijos tyrimo uždavinys – numatyti, kas su ja atsitiks po tam tikro laiko tarpo. Kartais mes kalbame apie konkretų laiko tarpą („žemaičių populiacija Lietuvoje sudarys 40% šio amžiaus pabaigoje“), o kartais – apie ilgalaikį populiacijos kitimą („juodųjų gandrų populiacija pasmerkta



10.1 pav. Populiacijos sekos modelis.

išnykti“ *). Kiekvienu atveju ką nors pasakyti apie konkrečios populiacijos kitimą galima tik nustačius pe͂rėjimus reguliuojančias taisykles. Jas vadinsime **pe͂rėjimo taisyklėmis**. Jei žinome, kaip kiekviename pe͂rėjime pakinta populiacijos dydis, tai, pasitelkę truputį matematikos, galime sužinoti, kaip pasikeis populiacija po daugelio pe͂rėjimų. Taigi konkrečios populiacijos kitimas gali būti pavaizduotas nepabaigiama skaičių virtine, vadinama **populiacijos seka**. 10.1 pav. schemiškai parodo, kaip sudaroma populiacijos seka.

O dabar pradėkime nuo seniausio ir žinomiausio populiacijos kitimo pavyzdžio – nuo Fibonačio uždavinio apie triušius.

---

1 pavyzdys. Fibonačio triušiai – tai labai pavyzdinga giminėlė. Lyg pagal signalą kiekviena subrendusi patino ir patelės pora baigiantis mėnesiui atsiveda jauniklių porą – patinėlį ir patelę. Po mėnesio naujai gimę triušiukai subręsta ir pradeda patys vesti palikuonis.

Garsiojoje knygoje *Liber Abaci* Fibonačis iškėlė tokį klausimą: pradėję nuo vienintelės ką tik gimusios triušių patinėlio ir patelės poros, kiek gi triušių turėsime po vienerių metų?

Kad būtų patogiau, skaičiuosime patinėlių ir patelių poras, o $P_1, P_2, P_3, \ldots$ reikš pirmosios, antrosios, trečiosios ir t.t. kartos triušių porų skaičių. 10.2 pav. matome pirmųjų šešių mėnesių situaciją.

10.2 pav.

	Pirmoji karta	Antroji karta	Trečioji karta	Ketvirtoji karta	Penktoji karta	Šeštoji karta	Septintoji karta
Laikas		1 mėnuo	2 mėnesiai	3 mėnesiai	4 mėnesiai	5 mėnesiai	6 mėnesiai
Jauniklių porų skaičius	1	0	1	1	2	3	5
Subrendusių porų skaičius	0	1	1	2	3	5	8
Bendras porų skaičius	$P_1 = 1$	$P_2 = 1$	$P_3 = 2$	$P_4 = 3$	$P_5 = 5$	$P_6 = 8$	$P_7 = 13$

Paveikslėlyje matome, kad $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = P_2 + P_1$, $P_4 = P_3 + P_2, \ldots$. Todėl bendras kiekvienos ateinančios kartos porų skaičius išreiškiamas Fibonačio skaičiumi (žr. 9 skyrių), t.y.

$$P_N = F_N.$$

* Lietuvos Raudonoji knyga, Vilnius, 1988.

Toliau sunkumų neiškyla. Metų gale (13-oji karta) turėsime $P_{13} = F_{13} =$ 233 triušių poras – iš viso 466 triušius! Dar svarbiau yra tai, kad šią situaciją galima aprašyti bendromis sąvokomis. Pērėjimo iš kartos į kartą taisyklė yra tokia:

$$\underbrace{P_N}_{\substack{\text{Porų skaičius} \\ N\text{-tojoje kartoje}}} = \underbrace{P_{N-1}}_{\substack{\text{Subrendusių porų skaičius} \\ N\text{-tojoje kartoje sutampa su} \\ \text{bendru porų skaičiumi prieš} \\ \text{tai einančioje kartoje}}} + \underbrace{P_{N-2}}_{\substack{\text{Jauniklių porų skaičius} \\ N\text{-tojoje kartoje sutampa su} \\ \text{bendru porų skaičiumi} \\ (N-2)\text{-ojoje kartoje}}}$$

O dabar, išsiaiškinę šią problemą, grižkime į tikrovę. Aišku, kad tikrieji triušiai nėra tokie pavyzdingi, kaip Fibonačio triušiai – jie gyvena ir dauginasi pagal kur kas sudėtingesnes taisykles, kurias ne visada galima taip lengvai išreikšti paprasta lygybe. O tai, kas būdinga tikriesiems triušiams, tinka ir kitoms populiacijoms.

Žinant tai, kyla klausimas, ar yra kokia nauda iš supaprastinto populiacijos dydžio kitimo modelio. Atsakymas – taip! Mes galime pakankamai tiksliai prognozuoti populiacijos kitimą, nežinodami visų tikrųjų pērėjimo taisyklių. Čia svarbiausia apčiuopti faktorius, nuo kurių labiausiai priklauso populiacijos kitimas, sujungti tuos faktorius į kelias jų sąveiką aprašančias pērėjimo taisykles ir pamiršti smulkmenas. Žinoma, tai lengviau pasakyti, negu padaryti. Iš esmės tuo ir pelnosi duoną populiacijas tiriantys biologai bei matematikai. Tai yra kartu ir menas, ir mokslas.

Likusioje skyriaus dalyje pasižvalgysime po šios veiklos platybes. Mes nagrinėsime tris pagrindinius populiacijos kitimo modelius – tiesinį, eksponentinį ir logistinį.

TIESINIS KITIMAS

2 pavyzdys. Neseniai atidarytame sąvartyne jau susikaupė 8000 tonų šiukšlių. Planuojama, kad kelerius metus sąvartynas pasipildys po 120 tonų kas mėnesį. Jei taip, tai kiek jų bus sąvartyne po penkerių metų?

Šiame pavyzdyje nagrinėjama konkretaus sąvartyno šiukšlių populiacija. Kadangi mes žinome tik mėnesio vidurkį, tai laikysime, kad pērėjimas ir įvyksta kartą per mėnesį. (Žinoma, tai yra tik patogus nagrinėjimo būdas – iš tikrųjų pērėjimas įvyksta tada, kai šiukšliavežė mašina išverčia krovinį, tačiau mūsų atveju tai nesvarbu.) Mums šiame uždavinyje svarbu tik tai, kad kas mėnesį į šiukšlyną išverčiama po 120 tonų šiukšlių.

Pradinės populiacijos dydis (P_1) buvo 8000 tonų. Todėl turime tokią populiacijos seką:

$$P_1 = 8000, \quad P_2 = 8120, \quad P_3 = 8240, \quad P_4 = 8360, \ldots.$$

Per penkerius metus įvyks 60 pērėjimų, pridedančių vis po 120 tonų. Trumpai tariant, atsakymas į šį klausimą yra

$$P_{61} = 8000 + 60 \times 120 = 15\,200 \text{ tonų.}$$

2 pavyzdys yra tipiškas kitimo, kuris vadinamas **tiesiniu kitimu**, pavyzdys. Tiesinį kitimą apibūdina du elementai: pradinė populiacija P_1 ir pērėjimo taisyklė, pagal kurią pastovus kiekis d vis pridedamas prie jau esančios populiacijos*. Taip sudaryta skaičių seka yra gerai žinoma **aritmetinė progresija**. Skaičius d vadinamas **aritmetinės progresijos skirtumu**, nes bet kurie du jos gretimi nariai skiriasi dydžiu d. Matematiškai tiesinio kitimo pērėjimo taisyklė gali būti nusakyta šitaip:

- Pradinė populiacija: P_1
- $\underbrace{P_N}_{\text{N-tosios kartos populiacija}} = \underbrace{P_{N-1}}_{\text{Prieš tai buvusios kartos populiacija}} + \underbrace{d}_{\text{Progresijos skirtumas}}$

Šis nusakymas vadinamas populiacijos sekos *rekursiniu apibrėžimu*, nes populiacijos sekos reikšmės apskaičiuojamos turint ankstesnes (jau žinomas) populiacijos sekos reikšmes**. Nors rekursinis apibrėžimas aiškus ir suprantamas, tačiau jis turi didelį trūkumą: norėdami rasti kurią nors populiacijos sekos reikšmę, pirmiau turime rasti visas ankstesniąsias reikšmes. Kaip jau patyrėme 9 skyriuje nagrinėdami panašų uždavinį su Fibonačio skaičiais, rekursinis apibrėžimas gali sudaryti didelių nepatogumų.

Laimei, tiesiškai augančios populiacijos atveju atsiranda kitas labai patogus populiacijos sekos nusakymo būdas. 10.3 pav. iš esmės paaiškina, apie ką čia kalbama.

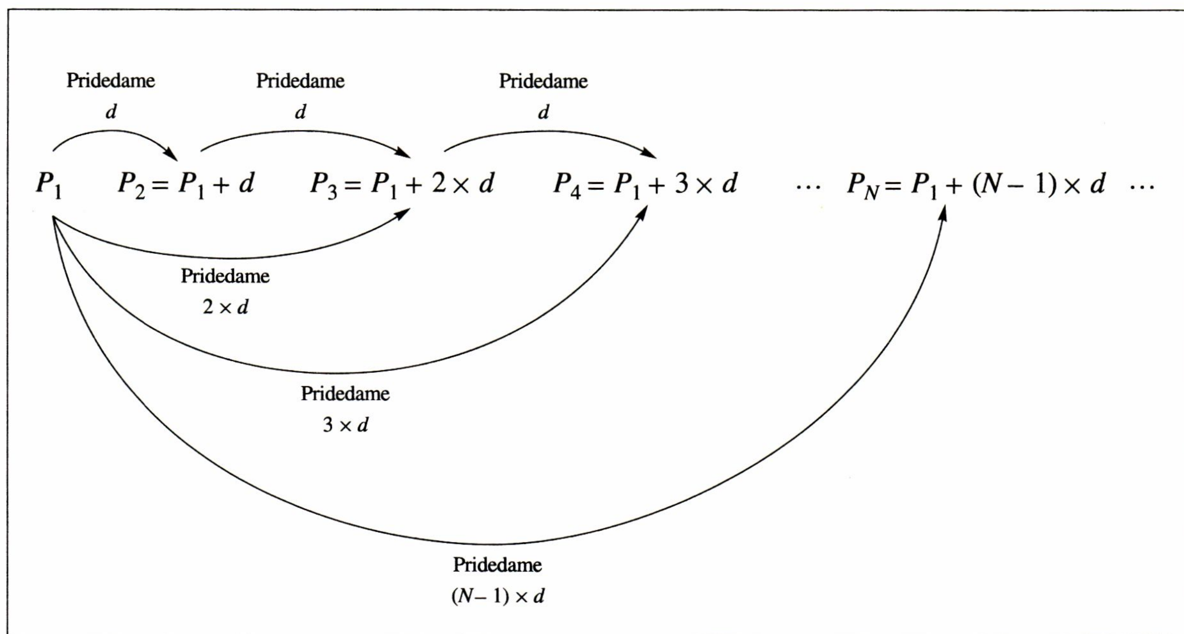
Trumpiau tariant, 10.3 pav. rodo, kad

$$P_N = P_1 + (N - 1) \times d$$

Ši taisyklė leidžia, žinant pradinę populiaciją P_1 ir progresijos skirtumą d, apskaičiuoti bet kurį populiacijos sekos narį. Toks populiacijos sekos nusakymas, kai galima iš karto rasti bet kurį sekos narį, vadinamas sekos *išreikštiniu apibrėžimu*. Šiame pavyzdyje ta taisyklė – tai aritmetinės progresijos n-tojo nario formulė.

* Kai d teigiamas, populiacija didėja, todėl tokį kitimą paprastai vadiname *tiesiniu augimu*. Kai d neigiamas, kitimą patogu vadinti *tiesiniu nykimu*.

** *Recursio* (lot.) – sugrįžimas.



10.3 pav.

3 pavyzdys. Populiacijos dydis kinta pagal tiesinį kitimo dėsnį. Pradinis populiacijos dydis yra $P_1 = 37$, o skirtumas $d = 6$. a) Kokia yra 16-osios kartos populiacija? b) Kokia bus populiacija po 25 pẽrėjimų?

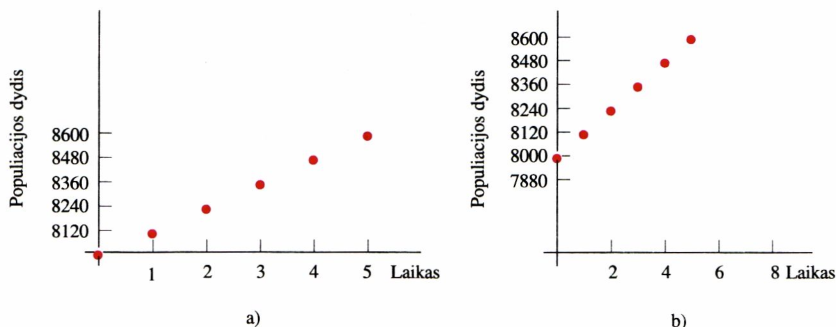
Punkte a) reikia rasti P_{16}. Naudodamiesi išreikštiniu tiesinio kitimo apibrėžimu, randame

$$\underbrace{P_{16}}_{P_N} = \underbrace{37}_{P_1} + \underbrace{15}_{N-1} \times \underbrace{6}_{d} = 127.$$

Punkte b) reikia rasti P_{26}. Lygiai taip pat $P_{26} = 37 + 25 \cdot 6 = 187$.

Populiacijos kitimo grafikas

Populiacijos kitimą labai patogu vaizduoti *diagrama* arba *grafiku*. Horizontalioji ašis reiškia laiką (brūkšneliai atitinka pẽrėjimo momentus), o vertikalioji ašis – populiacijos dydį. Kadangi horizontaliosios ir vertikaliosios ašių mastelius galima pasirinkti laisvai, tai diagramos dažnai būtna apgaulingos. Nagrinėkime 10.4 a) ir b) pav. Kuri populiacija auga greičiau?



10.4 pav.

Iš tikrųjų abi diagramos vaizduoja tos pačios populiacijos kitimą – tai 2-ojo pavyzdžio uždavinys apie sąvartyną. Šie grafikai vaizdžiai paaiškina, kodėl tiesinis kitimas yra taip vadinamas – nesvarbu, kokiame mastelyje jį bevaizduotume grafiku, populiacijos reikšmės išsirikiuoja tiese.

Papildomos aritmetinės progresijos sąvokos

4 pavyzdys. Akcinė bendrovė gamina traktorius. Bendrovė nusprendė atidaryti naują gamyklą. Kiekvieno mėnesio 1-ąją dieną (6 metų laikotarpiu) gamykloje bus paleidžiamas vis naujas gamybinis blokas, gaminantis po tris traktorius kas mėnesį. Kiek iš viso traktorių gamykla pagamins per šešerius projekto įgyvendinimo metus?

Šio uždavinio kiekvieno gamybinio bloko bendroji produkcija atitinka tiesinį augimo dėsnį, tačiau mazgų darbo trukmė skiriasi. Sudarykime tokį sąrašą.

- Blokas, paleistas pirmąjį mėnesį, dirbs 72 mėnesius ir pagamins $3 \times 72 = 216$ traktorių.
- Blokas, paleistas antrąjį mėnesį, dirbs 71 mėnesį ir pagamins $3 \times 71 = 213$ traktorių.
- Blokas, paleistas trečiąjį mėnesį, dirbs 70 mėnesių ir pagamins $3 \times 70 = 210$ traktorių.

  ⋮

- Blokas, paleistas septyniasdešimt antrąjį mėnesį, tedirbs 1 mėnesį ir pagamins 3 traktorius.

Bendras per 72 mėnesius pagamintų traktorių skaičius yra

$$216 + 213 + 210 + \cdots + 3.$$

Ši suma – tai aritmetinės progresijos narių 3, 6, ..., 213, 216 suma. Mes, žinoma, galėtume sudėti šiuos skaičius, naudodamiesi (arba ne) skaičiuokliu, tačiau labai nuobodu. Pasielkime truputį gudriau. Parašykime bendrąją sumą dukart: kartą didėjimo tvarka, o kitą – atvirkščiai:

$$\text{bendroji suma} = 216 + 213 + 210 + \cdots + 6 + 3.$$
$$\text{bendroji suma} = 3 + 6 + 9 + \cdots + 213 + 216.$$

Jei kiekvieną pirmosios eilutės narį sudėsime su atitinkamu antrosios eilutės nariu, tai turėsime

$$2 \times \ \text{bendroji suma} = 219 + 219 + 219 + \cdots + 219 + 219.$$

Kadangi dešinėje yra 72 dėmenys, tai turime

$$2 \times \ \text{bendroji suma} = 219 \times 72,$$

todėl

$$\text{bendroji suma} = \frac{219 \times 72}{2} = 7884.$$

Šis metodas tinka *bet kuriai* aritmetinei progresijai, ir mums visai nesunku sudėti bet kokį iš eilės einančių narių kiekį. Ta formulė tokia:

Aritmetinės progresijos pirmųjų *N* narių suma

$$\text{pirmasis narys} + \cdots + \text{paskutinysis narys} = \frac{(\text{pirmasis narys} + \text{paskutinysis narys}) \times N}{2}$$

5 pavyzdys. $\underbrace{5 + 12 + 19 + 26 + 33 + \cdots}_{132 \text{ nariai}} = ?$

Čia sudedame 132 iš eilės einančius aritmetinės progresijos narius. Pirmasis narys yra $P_1 = 5$, o progresijos skirtumas $d = 7$. Mums reikia rasti 132 narį P_{132}. Mes jau žinome, kaip tai padaryti: $P_{132} = 5 + 131 \times 7 = 922$. Dabar galime pasinaudoti formule:

$$5 + 12 + 19 + 26 + 33 + \cdots + 922 = \frac{(5 + 922) \times 132}{2} = 61\,182.$$

6 pavyzdys. $4 + 13 + 22 + 31 + 40 + \cdots + 922 = ?$

Čia sudedame aritmetinės progresijos narius, kur $P_1 = 4$, o progresijos skirtumas $d = 9$. Kad galėtume pritaikyti formulę, turime sužinoti sekos narių skaičių N. Sudarome lygtį: $922 = 4 + 9\,(N - 1)$. Iš čia gauname $9\,(N - 1) = 918$, todėl $N - 1 = 102$ ir $N = 103$. Todėl

$$4 + 13 + 22 + 31 + 40 + \cdots + 922 = \frac{(4 + 922) \times 103}{2} = 47\,689.$$

EKSPONENTINIS KITIMAS

Pieš pradėdami rimtai nagrinėti kitą populiacijos kitimo modelį – eksponentinį kitimą, išnagrinėkime dar porą pavyzdžių.

7 pavyzdys. Firma gamina produkciją, kurios vienetas kainuoja K litų. Tokio vieneto kaina pakeliama 10% ir jis parduodamas produktų platintojui. Platintojas pakelia vieneto kainą dar 20% (jo sumokėtos sumos) ir parduoda krautuvininkui. Krautuvininkas prideda dar 50% ir parduoda pirkėjui. Keliais procentais pakilo produkcijos vieneto kaina pradinės kainos K atžvilgiu?

- Pradinė kaina: K.
- Platintojo kaina P pridėjus 10%, yra $P = 110\% K = 1{,}1K$.
- Mažmeninės prekybos kaina M su 20% priedu yra $M = 120\% P = 1{,}2P = 1{,}2 \cdot 1{,}1K = 1{,}32K$.
- Galutinė kaina G su 50% priedu yra $G = 150\% M = 1{,}5M = 1{,}5 \cdot 1{,}32K = 1{,}98K$.

Taigi galutinė kaina skiriasi nuo pradinės 98%.

8 pavyzdys. Krautuvininkas nuperka prekę už K litų ir nustato 80% antkainį. Po kurio laiko išparduodamas jis nuleidžia 40%. Koks yra procentinis prekės antkainis?

- Pradinė prekės kaina yra K.
- Kaina A su 80% antkainiu yra $A = 180\% K = 1{,}8K$.
- Pardavimo kaina P nuleidus 40% yra $P = 60\% A = 0{,}6A = 0{,}6 \cdot 1{,}8K = 1{,}08K$.

Grynasis antkainis yra 8%.

Dabar mes pasirengę rimčiau imtis eksponentinio kitimo modelio.

9 pavyzdys. 1000 Lt padedama į sąskaitą, kurioje priskaičiuojama 10% *metinių* palūkanų (t.y. palūkanos priskaičiuojamos kartą per metus metų gale). Kiek pinigų bus sąskaitoje po 25 metų, jei palūkanos paliekamos sąskaitoje?

Šis pavyzdys būtų tipiškas **eksponentinio kitimo** atvejis: pinigai duoda palūkanas; po to pinigai su palūkanomis vėl duoda palūkanas ir taip toliau. Nors mes dažniausiai nagrinėsime pavyzdžius iš finansų pasaulio, tačiau eksponentinis kitimas būdingas ir daugeliui kitų sričių. Eksponentinio kitimo esmę sudaro *rekursinė daugyba*, kai kiekvienas pērėjimas atliekamas dauginant iš tam tikro skaičiaus, kurį vadiname **kitimo greičiu**. Šią idėją pailiustruosime 9 pavyzdžio duomenimis. 10.1 lentelė padės mums įsibėgėti.

	Sąskaitos balansas metų pradžioje	Tų metų palūkanos	Sąskaitos balansas metų gale
1 metai	1000 Lt	100 Lt	1100 Lt
2 metai	1100 Lt	110 Lt	1210 Lt
3 metai	1210 Lt	121 Lt	1331 Lt
⋮	⋮	⋮	⋮
24 metai	???	???	???
25 metai	???	???	???

10.1 lentelė.

Matome, kad balansinė suma pirmųjų metų gale gaunama prie *pagrindinio kapitalo* (1000 Lt) priskaičiavus už tuos metus priklausančias palūkanas (1000 Lt sumos 10%). Mes žinome, kad tai tas pats, kas paimti 1000 Lt sumos 110% – kitaip sakant, tai yra 1000 Lt × 1,1. Panašiai balansinė suma antrųjų metų pabaigoje bus

$$\underbrace{(\text{balansinė suma antrųjų metų pradžioje})}_{1000\ \text{Lt}\times(1,1)} \times (1,1) = 1000\,\text{Lt} \times (1,1)^2.$$

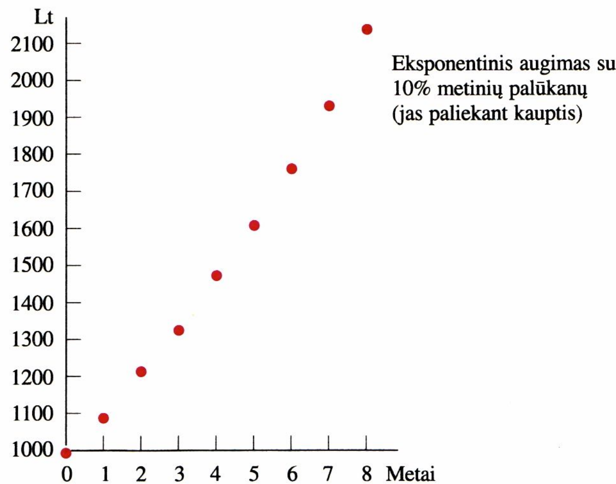
Nesunku pastebėti, kad kiekvienas pērėjimas (įvykstantis kiekvienų metų gale) reiškia 110% metų pradžios pinigų. Aišku, kad tai tas pats, kas padauginti iš 1,1. Mes galėtume sakyti, kad 9 pavyzdžio kitimo greitis yra 1,1 (o ne 10%, kaip dažnokai neteisingai sakoma). Dabar atsakyti į 9 pavyzdžio klausimą lengva – balansinėje sąskaitoje po 25 metų (ir 26 metų pradžioje) bus

$$1000\,\text{Lt} \times (1,1)^{25} = 10\,834,70\,\text{Lt}.$$

Šio pavyzdžio pėrėjimo periodas yra 1 metai; populiacijos (pinigai sąskaitoje) seka yra $P_1 = 1000$ Lt, $P_2 = 1100$ Lt, $P_3 = 1210$ Lt, ..., $P_{26} = 10\,834{,}70$ Lt. Bendruoju atveju, N-tųjų metų gale (ir, žinoma, $(N + 1)$-ųjų metų pradžioje) sąskaitos balansas yra $(N+1)$-oji populiacijos sekos reikšmė:

$$P_{N+1} = 1000 \times (1{,}1)^N.$$

10.5 pav. matome sąskaitos pinigų augimo per pirmuosius 8 metus grafiką.



10.5 pav.

Tokia seka, kai kiekvienas narys gaunamas prieš jį einantį narį padauginus iš fiksuoto skaičiaus (**vardiklio**), vadinama **geometrine progresija**. Populiacijai eksponentiškai kintant, jos dydis visada yra tam tikros geometrinės progresijos narys ir todėl gali būti išreikštas taip:

$$P_{N+1} = P_N \times (\text{kitimo greitis}),$$

o tai yra tas pats, kaip ir $P_N = P_{N-1} \times (\text{kitimo greitis})$. Tai – *rekursinis apibrėžimas*. Kita vertus, šią seką galima nusakyti ir *išreikštiniu apibrėžimu*

$$P_{N+1} = P_1 \times (\text{kitimo greitis})^N \quad \text{arba} \quad P_N = P_1 \times (\text{kitimo greitis})^{N-1}.$$

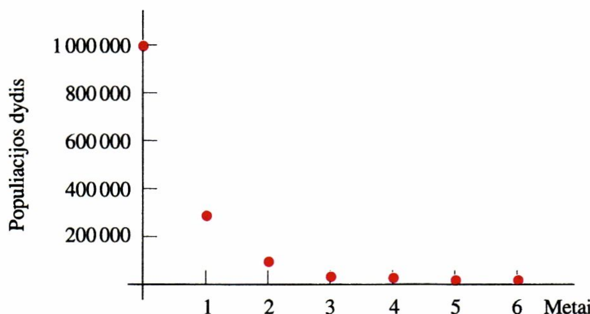
Iki šiol nagrinėjome tokius populiacijos kitimo pavyzdžius, kai populiacijos dydis eksponentiškai augo. Iš tiesų taip yra ne visada.

10 pavyzdys. Populiacijos dydis kinta eksponentiškai, jos metinis kitimo greitis yra 0,3, o pradinis populiacijos dydis yra 1 000 000. Koks populiacijos dydis bus 6-tųjų metų pabaigoje?

Turime rasti P_7:

$$P_7 = 10^6 \times \frac{3^6}{10^6} = 3^6 = 729.$$

10.6 pav. vaizduoja pirmųjų 6 metų populiacijos dydžio kitimą, ir mes aiškiai pastebime kitimą visiško išnykimo link.



10.6 pav.

Dažnai yra patogu skirti tuos populiacijos kitimo atvejus, kai populiacija eksponentiškai didėja (kaip 9 pavyzdyje), nuo atvejų, kai populiacija eksponentiškai mažėja (kaip 10 pavyzdyje). Pirmoji situacija paprastai vadinama **eksponentiniu augimu**, o antroji – **eksponentiniu nykimu**. Tas skirtingumas, žinoma, priklauso nuo kitimo greičio: *jei jis didesnis už vienetą, turime augimą; jei kitimo greitis yra mažesnis už vienetą, turime nykimą.* Tada kitimo greitį vadinsime atitinkamai augimo greičiu ir nykimo greičiu.

Kur laikyti pinigus

Vėl grįžkime į finansų sritį. 8 pavyzdyje mes nagrinėjome specialųjį bendrosios situacijos atvejį, kai tam tikra pinigų suma P_1 (vadinama *pradiniu kapitalu*) padedama į sąskaitą, kurios metinių **palūkanų norma** yra r, o palūkanos yra priskaičiuojamos kiekvienų metų gale. Kiek pinigų būtų sąskaitoje N-tiesiems metams baigiantis, jei palūkanas paliktume sąskaitoje? Mes dabar žinome, kad atsakymas yra gaunamas išreikštine formule

$$P_{N+1} = P_1 \times (\text{augimo greitis})^N.$$

Pabandykime augimo greitį išreikšti patogesniu pavidalu. Kai metinių palūkanų norma buvo 10% (9 pavyzdys), tai augimo greitis buvo 1,1 (110%). Jei

metinių palūkanų norma būtų 12%, tai augimo greitis būtų 1,12 (112%), o jei metinių palūkanų norma 6,75%, tai augimo greitis būtų 1,0675 (106,75%). Bendruoju atveju, jei mes palūkanų normą išreikštume dešimtaine trupmena r (tai patogiau, negu procentai), tai augimo greitis būtų $1+r$. Įrašę į anksčiau užrašytą formulę, gauname

$$P_{N+1} = P_1 \times (1+r)^N.$$

---

11 pavyzdys. Jei į sąskaitą padedame 367,51 Lt, metinių palūkanų norma yra 9,5% ir sąskaitoje paliekame tiek pradinį kapitalą, tiek ir palūkanas, tai kiek pinigų bus joje po 7 metų?

Čia $P_1 = 367{,}51$, $r = 0{,}095$. Atsakymas yra

$$P_8 = 367{,}51 \times 1{,}095^7 = 693{,}69.$$

---

12 pavyzdys. Dabar nagrinėkime kitą 8 pavyzdžio variantą. Tarkime, kad mes radome banką, kuris moka 10% metinių palūkanų, tačiau jas priskaičiuoja *kas mėnesį*. Jei mes padedame 1000 Lt (ir palūkanas paliekame sąskaitoje), tai kiek pinigų bus sąskaitoje po 5 metų?

Tai vėl eksponentinio augimo uždavinys. Didžiulis skirtumas yra tas, kad dabar pērėjimas vyksta kas mėnesį (o ne kasmet). Per 5 metus įvyks 60 pērėjimų, todėl šiame pavyzdyje reikia rasti P_{61}. Kaip ir prieš tai (prisiminkime, kad čia kalbama apie geometrinę progresiją), gauname

$$P_{61} = 1000 \times (\text{augimo greitis})^{60},$$

ir lieka rasti augimo greitį. Kadangi tarp pērėjimų yra mėnesio periodas, mes negalime tiesiogiai pasinaudoti 10% metinių palūkanų norma – ją turime prieš tai padalyti iš 12 ir apskaičiuoti *periodinių palūkanų* normą

$$\frac{10\%}{12} = 0{,}83333\ldots\%.$$

Augimo greitis yra 100,83333 . . . %, arba dešimtainiu pavidalu 1,0083333 . . . , todėl

$$P_{61} = 1000 \times (1{,}0083333\ldots)^{60} \approx 1645{,}30 \text{ Lt}.$$

Vien iš smalsumo pažiūrėkime, kas atsitiktų, jei tuos pinigus paliktume sąskaitoje 25 metams. Viskas būtų taip, kaip ką tik darėme, tik pērėjimų skaičius dabar būtų $25 \times 12 = 300$. Iš to išplaukia, kad po 25 metų sąskaitoje būtų

$$P_{301} = 1000 \times (1{,}0083333\ldots)^{300} \approx 12\,056{,}94 \text{ Lt.}$$

---

13 pavyzdys. Dabar tarkime, kad radome banką, kuris moka 10% metinių palūkanų, tačiau jas priskaičiuoja *kasdien*. Jei tuos pačius 1000 Lt padėtume penkeriems metams (kaip jau darėme 12 pavyzdyje), tai kiek pinigų turėtume po 5 metų?

Šį kartą pērėjimo periodas yra 1 diena. Per 5 metus įvyks $365 \times 5 = 1825$ pērėjimai; periodinių palūkanų norma yra $\frac{10}{365}$%, o tai parašysime kaip $\frac{0{,}10}{365} \approx 0{,}00027397$. Šiame uždavinyje augimo greitis yra

$$\left(1 + \frac{0{,}10}{365}\right) \approx 1{,}00027397,$$

todėl galutinis atsakymas yra

$$1000\left(1 + \frac{0{,}10}{365}\right)^{365\times 5} \approx 1000\,(1{,}00027397)^{1825} \approx 1648{,}60.$$

11 ir 12 pavyzdys iliustruoja pagrindines *priskaičiuojamų palūkanų* augimo po N pērėjimų taisykles. Trumpai tariant, jos tokios:

Po N pērėjimų bendroji pinigų suma sąskaitoje yra $P_{N+1} = P_1 \times$ (augimo greitis)^N, čia: augimo greitis = (1 + periodinių palūkanų norma), o

$$\text{periodinių palūkanų norma} = \frac{\text{metinių palūkanų norma}}{\text{pērėjimų skaičius per vienerius metus}}.$$

---

14 pavyzdys. (**Kuris bankas geresnis?**) Jūs turite kažkiek pinigų, kuriuos norėtumėte padėti į banką. Bankas A siūlo 10% metinių palūkanų, ir jas priskaičiuoja kasmet. Bankas B moka 9,75% metinių palūkanų, bet užtat palūkanas priskaičiuoja kas mėnesį. Bankas C moka 9,5% metinių palūkanų ir priskaičiuoja jas kasdien. Į kurį banką geriausiai padėti pinigus?

Uždavinyje nenurodyta nei padedamų pinigų suma, nei laikymo banke trukmė, bet uždavinio atsakymas priklauso tik nuo metinių *palūkanų normos*

bei nuo palūkanų priskaičiavimo dažnumo. Lygindami šiuos skirtingus bankus, naudokime bendrą matą, užduodami, pavyzdžiui, tokį klausimą: „Kaip vienas litas išaugtų per vienerius metus?“

Banke A iš 1 lito po 1 metų pasidaro 1,10 Lt.

Banke B iš 1 lito po 1 metų pasidaro

$$\left(1+\frac{0{,}0975}{12}\right)^{12} \approx 1{,}102 \text{ Lt.}$$

Ir pagaliau banke C iš 1 lito po 1 metų pasidaro

$$\left(1+\frac{0{,}095}{365}\right)^{365} \approx 1{,}0996 \text{ Lt.}$$

Dabar mes matome, kad geriausią sandėrį siūlo bankas B.

Tokie patys skaičiavimai apibūdina truputį kitaip bankininkystėje aprašomą taip vadinamąjį metinį prieaugį. **Metinis prieaugis** yra procentinis sąskaitos padidėjimas praėjus vieneriems metams. 14 pavyzdyje metinis prieaugis banke A yra 10%, banke B – 10,2% ir banke C – 9,96%. Šiuos skaičius gauname iš ankstesnių skaičiavimų.

Geometrinės progresijos narių suma

Viena 3 pavyzdžio grožybių buvo formulė, leidžianti sudėti bet kiek aritmetinės progresijos pirmųjų narių. Mes norėtume turėti panašią formulę ir geometrinei progresijai. Tai, ko mums reikia, duoda tokia formulė (žr. 31 pratimą):

Geometrinės progresijos pirmųjų *N* narių suma

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^N = \frac{a(q^{N+1}-1)}{q-1}$$

15 pavyzdys. Raskite

$$8 + 8 \times 3 + 8 \times 3^2 + 8 \times 3^3 + \cdots + 8 \times 3^{13}.$$

Čia $a = 8,\ q = 3,\ N = 13$. Įstatę šias reikšmes į formulę, gauname

$$\frac{8 \times (3^{14}-1)}{3-1} = 19\,131\,872.$$

(Dabar siūlytume pamėginti atlikti 17–19 pratimus.)

16 pavyzdys. Motina nusprendė savo naujagimiui atidaryti būsimųjų mokymosi išlaidų sąskaitą. Ji planuoja 18 metų iš eilės (t.y. 216 mėnesių) į šią sąskaitą su 6% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kas mėnesį, kiekvieną mėnesį padėti vis po 100 Lt. Kiek pinigų bus sąskaitoje, praėjus 18 metų?

- Pirmasis 100 Lt indėlis, įskaičiavus 216 mėnesių palūkanas, duotų $100 \times (1{,}005)^{216}$ Lt.
- Antrasis 100 Lt indėlis, įskaičiavus 215 mėnesių palūkanas, duotų $100 \times (1{,}005)^{215}$ Lt.
- Trečiasis 100 Lt indėlis, įskaičiavus 214 mėnesių palūkanas, duotų $100 \times (1{,}005)^{214}$ Lt.

$\vdots$

- Du šimtai šešioliktasis 100 Lt indėlis, įskaičiavus 1 mėnesio palūkanas, duotų $100 \times (1{,}005)$ Lt.

Bendroji suma sąskaitoje po 18 metų būtų

$$100 \times (1{,}005)^{216} + 100 \times (1{,}005)^{215} + \cdots + 100 \times (1{,}005).$$

Tai yra geometrinės progresijos narių suma. Pagal geometrinės progresijos narių sumos formulę gautume (žr. 19 pratimą)

$$\frac{100 \times (1{,}005) \times \left[(1{,}005)^{216} - 1)\right]}{0{,}005} \approx 38\,929 \text{ Lt}.$$

Ką reiks daryti su tokiais pinigais po aštuoniolikos metų, jei bet koks aukštasis mokslas bus nemokamas? O gal dėl infliacijos jie taps beverčiai?

LOGISTINIS KITIMAS

Susiduriant su gyvūnų populiacijomis, tų dviejų mūsų jau nagrinėtųjų modelių dažniausiai nepakanka. Kaip dabar jau žinome, *tiesinis kitimas* – tai toks kitimas, kai tarp bet kurių gretimų perėjimų populiacija priauga arba sumažėja tuo pačiu dydžiu. Šis modelis yra geras negyviems objektams (šiukšlėms, gaminamiems produktams, parduodamoms prekėms), tačiau visiškai netinka, kai reikia atsižvelgti į dauginimosi faktorių. Iš kitos pusės, *eksponentinis augimas* tinka tuo atveju, kai augimo greitis yra pastovus, o tai būdinga neribotam dauginimuisi (panašiai, kaip paliekamos sąskaitoje palūkanos). Tačiau gyvojoje gamtoje dažniausiai būna taip, kad gyvių populiacijos augimo greitis ne visada išlieka tas pats. Tai priklauso ir nuo kitų kaimyninių populiacijų

(plėšrūnų, grobio ir t.t.) santykinio dydžio, o dar svarbiau, nuo pačios populiacijos santykinio dydžio. Kai populiacija yra palyginti maža (tuoj tiksliau apibrėšime, ką turime galvoje) ir yra daug erdvės jai augti, tai jos augimo greitis yra didelis. Kai populiacija didėja, jai lieka vis mažiau erdvės augti, ir augimo greitis krenta. Kartais populiacija taip išauga, kad dėl to ima mažėti ir gali net visiškai išnykti.

Kai kurias iš šių minčių iliustruoja bandymai su žiurkėmis narvelyje. Uždarykime kelias žiurkes į narvelį, kuriame pilna maisto. Jei narvelis yra pakankamai didelis, tai žiurkės ims sparčiai daugintis, ir kurį laiką žiurkių populiacijos augimas atitiks eksponentinio augimo dėsnį. Kai tik narvelis gerokai prisipildo, augimo greitis krenta. Faktoriai, kurie reguliuoja šį kritimą, yra konkurencija dėl augimui svarbių resursų – maisto, lyties ir erdvės. Galų gale konkurencija taip įsisiūbuoja, kad žiurkės ima pjauti viena kitą – taip jos instinktyviai bando išspręsti persipildymo problemą. Dažnai pjautynės baigiasi, kai populiacija sumažėja iki tam tikro lygio ir vėl yra pakankamai resursų. Bet kartais šis natūralus augimo reguliavimo mechanizmas nesiliauja – įsiutę pjautyninkai negali sustoti, ir visos žiurkės žūsta.

Minėtas scenarijus (su nedideliais pakeitimais) tinka beveik visoms situacijoms, kai aplinka, kurioje gyvena populiacija, yra ribota. Populiacijas tiriantys biologai tokią aplinką vadina **arealu**. Arealas gali būti ir narvelis (pavyzdyje apie žiurkes), ir ežeras (žuvų populiacijai), ir sodas (sraigių populiacijai), ir, žinoma, visa planeta, kuri yra visų gyvių arealas.

Iš daugelio matematinių modelių, kurie atsižvelgia į kintantį populiacijos augimo greitį, paprasčiausias yra **logistinis modelis**. Kalbant nelabai tiksliai, pagal logistinį modelį populiacijos kitimo greitis yra tiesiogiai proporcingas populiacijos arealo laisvos erdvės dydžiui*. Todėl daug laisvos erdvės skatina greitą augimą, o mažai laisvos erdvės nulemia mažą augimo greitį (jis gali būti net mažesnis už vienetą, o tai, kaip žinome, reiškia, kad populiacija nyksta), ir jeigu baigtųsi resursai, tai populiacija visai išmirtų.

Yra du lygiaverčiai šios situacijos matematinio aprašymo būdai. Sakykime, kad C yra konstanta, nusakanti arealo prisisotinimo tašką (populiacijas tiriantys biologai C vadina **arealo talpumu**). Laikysime, kad populiacijos P_N laisvosios erdvės dydis yra lygus talpumo ir populiacijos dydžio skirtumui, t.y. $(C - P_N)$. Tada, jei kitimo greitis yra proporcingas laisvosios erdvės dydžiui (kaip aprašyta aukščiau), tai turime

$$N\text{-tosios kartos kitimo greitis} = R(C - P_N)$$

* Tai paaiškina žodžio „logistinis“ prasmę – šis tarptautinis žodis sietinas su aprūpinimu (gyvūnų populiacijų atveju – su galimybe apsirūpinti maistu).

(čia R yra proporcingumo koeficientas, priklausantis tik nuo konkrečios populiacijos). Kadangi (N-tosios kartos populiacijos dydis) × (N-tosios kartos kitimo greitis) = (($N + 1$)-osios kartos populiacijos dydis), gauname tokią rekursinę logistinio modelio pĕrėjimo taisyklę:

$$P_{N+1} = R(C - P_N)P_N.$$

Šioje pĕrėjimo taisyklėje yra dvi konstantos: R, kuri priklauso tik nuo nagrinėjamos populiacijos, ir C, kuri priklauso nuo konkretaus arealo.

Skaičiavimo požiūriu tą patį kur kas patogiau užrašyti, naudojantis santykiniais dydžiais: maksimalus populiacijos dydis yra 1 (t.y. populiacija užima 100% arealo), o minimalus – 0 (t.y. populiacija išnyko); bet kuris kitas galimas populiacijos dydis išreiškiamas skaičiumi, esančiu tarp 0 ir 1, kurį ir žymėsime p_N (kad skirtume nuo P_N). Tada santykinis laisvosios erdvės dydis yra $(1 - p_N)$, o logistinio modelio pĕrėjimo taisyklės užrašomos vadinamąja **logistine lygtimi*** taip:

$$p_{N+1} = r(1 - p_N)p_N.$$

Šioje lygtyje p_N išreiškia populiacijos P_N užimto arealo dalį $p_N = P_N/C$, o konstanta r priklauso tiek nuo koeficiento R, tiek ir nuo talpumo C. Skaičių r vadinsime **kitimo parametru**.

Kadangi visos populiacijos matuojamos tuo pačiu vienetu (populiacijos užimto arealo dalimi), tai antrasis aprašymo būdas yra ypač patogus, kai norima palyginti kelių populiacijų augimą, ir būtent šiam būdui ekologai bei populiacijas tiriantys biologai ir teikia pirmenybę. Juo naudosimės ir mes. Iš pavyzdžių matysime, kaip kinta populiacija, paklūstanti logistiniam dėsniui. Visa, ko mums čia prireiks – tai žinoti pradinę populiaciją p_1 (tiksliau, jos užimamą arealo dalį) ir kitimo parametro reikšmę (p_1 visados yra tarp 0 ir 1, o r matematiniais sumetimais imsime tarp 0 ir 4). Visa kita padarys logistinė lygtis ir geras skaičiuoklis.

---

17 pavyzdys. Tarkime, kad tvenkinyje norime įveisti tam tikros rūšies žuvų – konkretumo dėlei tebūnie tai upėtakiai. Tarkime, upėtakių kitimo parametras yra 2,5, o pradinė populiacija yra $p_1 = 0{,}2$ (tai reiškia, jog išnaudota 20% tvenkinio talpumo). Dabar pažiūrėkime, ką mums žada logistinis

* Ši lygtis kartais vadinama *Ferhiulsto* (*P. H. Verhulst*) *lygtimi* ją XIX a. pabaigoje pasiūliusio belgų mokslininko garbei.

modelis. Po vieno neršimo* mes turėtume

$$p_2 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}2) \times (0{,}2) = 0{,}4.$$

(Upėtakių populiacija padvigubėjo. Viskas klostosi gerai!)
Po kito neršimo turėtume

$$p_3 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}4) \times (0{,}4) = 0{,}6.$$

(Augimo greitis truputį sulėtėjo.)
Trečiojoje kartoje turėtume

$$p_4 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}6) \times (0{,}6) = 0{,}6.$$

Pabandykime dar kartelį.

$$p_5 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}6) \times (0{,}6) = 0{,}6.$$

Jau visai aišku, kad populiacijos dydis apsistojo ties 60% tvenkinio talpumo riba, ir, nepaisant trumpalaikių ir nedidelių išorinių pokyčių, jos dydis liks toks pat per visas ateities kartas. Tai gali nuvilti upėtakių augintoją, tačiau patiems upėtakiams tokia situacija yra ideali. Čia mes turime pavyzdį, kai populiacijos dydis stabilizuojasi.

---

18 pavyzdys. Tarkime, kad turime tą patį tvenkinį ir tuos pačius upėtakius, kaip ir 17 pavyzdyje (kitaip sakant, turime tą patį $r = 2{,}5$). Mums įdomu, kas atsitiktų, jei į tvenkinį įleistume daugiau upėtakių – tarkime, pradėtume nuo $p_1 = 0{,}3$. Tada turėtume

$$p_2 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}3) \times (0{,}3) = 0{,}525,$$
$$p_3 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}525) \times (0{,}525) = 0{,}6234.$$

(Reikalai klostosi gerai!)

$$p_4 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}6234) \times (0{,}6234) = 0{,}5869.$$

(Nedidelis nusivylimas!)

$$p_5 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}5869) \times (0{,}5869) = 0{,}6061.$$

(Vėl daugyn!)

* Gyvių atveju pērėjimo momentu paprastai laikomas jų dauginimosi metas.

$$p_6 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}6061) \times (0{,}6061) = 0{,}5969.$$

(Ir mažyn.)

$$p_7 = 2{,}5 \times (1 - 0{,}5969) \times (0{,}5969) = 0{,}6015.$$

Skaitytojas gali pats įsitikinti, kad tvenkinio populiacija vis labiau ir labiau artėja prie reikšmės 0,6, vis šokinėdama – kartą daugyn, kartą mažyn.

19 pavyzdys. Kas atsitiktų 18 pavyzdyje, jei $p_1 = 0{,}7$? Po pirmosios kartos populiacija toliau elgtųsi lygiai taip pat, kaip ir anksčiau. Iš tikrųjų, abiem atvejais gauname tą pačią p_2 reikšmę:

$$p_2 = 2{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 2{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}525.$$

Taigi logistiniam dėsniui turime naudingą taisyklę: jei p_1 pakeičiame jį papildančiu dydžiu $(1 - p_1)$, tai po pirmosios kartos populiacijos sekos yra visiškai tokios pat.

20 pavyzdys. Nagrinėkime kitų žuvų – tarkime, karosų populiaciją, kurios kitimo parametras $r = 3{,}1$. Vėl, kaip ir 17 pavyzdyje, pradėkime nuo $p_1 = 0{,}2$. Trumpumo dėlei išrašysime tik pačią populiacijos reikšmių seką, palikdami skaičiavimus skaitytojui.

$$\begin{aligned}
&p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 0{,}496, \; p_3 = 0{,}775, \; p_4 = 0{,}541,\\
&p_5 = 0{,}770, \; p_6 = 0{,}549, \; p_7 = 0{,}767, \; p_8 = 0{,}553,\\
&p_9 = 0{,}766, \; p_{10} = 0{,}555, \; p_{11} = 0{,}766, \; p_{12} = 0{,}556,\\
&p_{13} = 0{,}765, \; p_{14} = 0{,}557, \; p_{15} = 0{,}765, \; p_{16} = 0{,}557, \; \ldots
\end{aligned}$$

Išryškėjo įdomus vaizdas: tvenkinio populiacija pateko į periodinį ciklą, kur vieną tarpą populiacija yra didelė – 0,765 (bus badmetis), o kitą maža – 0,557 (bus puota). Yra daug gyvūnų populiacijų, kurių dydis periodiškai keičiasi – po nuosmukio eina klestėjimo periodas, po kurio vėl eina nuosmukis ir t.t.

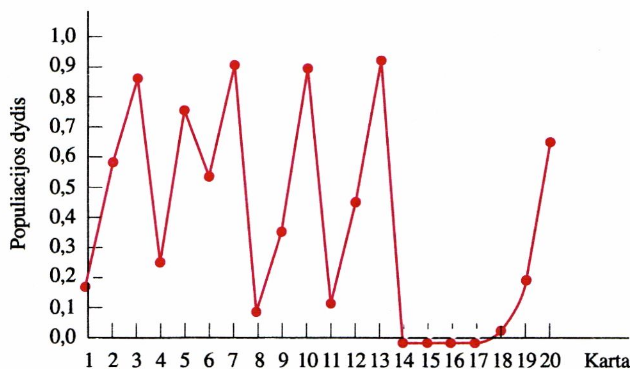
21 pavyzdys. Dabar pabandykime ištirti tarakonų populiaciją. Šiuo atveju sakykime, kad $r = 3{,}5$, o $p_1 = 0{,}56$. Toliau lieka pasinaudoti logistine lygtimi. Patikrinti šiuos skaičius ir užpildyti tuščias vietas paliekame skaitytojui (tereikia skaičiuoklio).

$p_1 = 0{,}560,\ p_2 = 0{,}862,\ p_3 = 0{,}415,\ p_4 = 0{,}850,$
$p_5 = 0{,}446,\ p_6 = 0{,}865,\quad \ldots \quad,\ p_{21} = 0{,}497,$
$p_{22} = 0{,}875,\ p_{23} = 0{,}383,\ p_{24} = 0{,}827,\ p_{25} = 0{,}501,$
$p_{26} = 0{,}875,\quad \ldots$

Nors skaičiavimai ir užėmė šiek tiek laiko, tačiau dabar mes matome, kad $p_{26} = p_{22}$, todėl populiacijos dydis po keturių periodų vėl bus toks pat. ($p_{27} = p_{23},\ p_{29} = p_{25},\ p_{30} = p_{26} = p_{22}, \ldots$). Yra daugybė populiacijų, kurių dydžiai kinta dar sudėtingesniais ciklais – skėriai yra geriausiai žinomas pavyzdys.

22 pavyzdys. Paskutinysis ir įdomiausias pavyzdys – imti $r = 4$. Pradėkime nuo $p_1 = 0{,}2$. Pirmosios 20 populiacijos sekos reikšmių yra tokios:

$p_1 = 0{,}2,\quad p_2 = 0{,}640,\ p_3 = 0{,}9216,\ p_4 = 0{,}2890,$
$p_5 = 0{,}8219,\ p_6 = 0{,}5854,\ p_7 = 0{,}9708,\ p_8 = 0{,}1133,$
$p_9 = 0{,}4020,\ p_{10} = 0{,}9616,\ p_{11} = 0{,}1478,\ p_{12} = 0{,}5039,$
$p_{13} = 0{,}9999,\ p_{14} = 0{,}0002,\ p_{15} = 0{,}0010,\ p_{16} = 0{,}0039,$
$p_{17} = 0{,}0157,\ p_{18} = 0{,}0617,\ p_{19} = 0{,}2317,\ p_{20} = 0{,}7121.$



10.7 pav.

10.7 pav. matome, kas darosi per pirmąsias 20 kartų. Skaitytojui siūlome patyrinėti šią populiaciją toliau. Netikėta, kad šiuo atveju nėra jokio aiškaus vaizdo, ir sunku nuspėti populiacijos kitimą. Nors tą kitimą tvarko visiškai tiksli taisyklė (logistinis dėsnis), tačiau stebėtojui populiacijos kitimas atrodo gana keistas ir panašus į atsitiktinį.

Logistiniu modeliu aprašomų populiacijų kitimas pateikia daug įdomių staigmenų. Papildydami skyriaus pabaigoje pateiktus pratimus, skaitytojui siūlome atlikti eksperimentų, panašių į jau nagrinėtus. (Pasirinkite p_1 tarp 0 ir 1, o r tarp 0 ir 4 ir įjunkite skaičiuoklį bei duokite valią savo fantaziją!)

IŠVADOS

Šiame skyriuje nagrinėjome tris paprasčiausius modelius, aprašančius populiacijos kitimą.

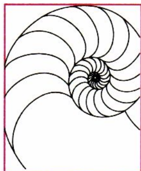
Tiesinis modelis populiacijos seką nusako aritmetine progresija, ir kiekvienu pẽrėjimo momentu populiacija kinta vis po tiek pat. Tiesinis augimas būdingas populiacijoms, kurias sudaro negyvi daiktai.

Eksponentinis modelis populiaciją nusako geometrine progresija. Kiekvienu pẽrėjimo momentu populiacijos dydis padauginamas iš pastovaus skaičiaus, vadinamo kitimo greičiu. Eksponentinis augimas būdingas neribotam dauginimuisi. Už palūkanas bankuose laikomi pinigai yra vienas iš tokių pavyzdžių.

Logistinis modelis atspindi tokią situaciją, kai populiacijos kitimo greitis keičiasi priklausomai nuo arealo laisvosios erdvės didumo. Dauguma gyvūnų populiacijų paklūsta logistiniam modeliui arba nedidelėms jo modifikacijoms.

Suprantama, kruopštesnis populiacijų kitimo nagrinėjimas neįmanomas be kur kas sudėtingesnių matematinių modelių, tačiau mums tai dabar nerūpi. Detalės nėra tokios svarbios, kaip suvokimas, kad matematika gali būti naudinga netgi tada, kai ji paprasčiausiais modeliais aprašo ir numato įvairių populiacijų augimą ir nykimą – pradedant pramone bei finansais ir baigiant populiacijų biologija bei ekologija.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



arealas
arealo talpumas
aritmetinė progresija
aritmetinės progresijos skirtumas
augimas
diskretusis kitimas
eksponentinis kitimas
geometrinė progresija
geometrinės progresijos vardiklis
kitimo greitis
kitimo parametras
logistinė lygtis
logistinis kitimas
metinis prieaugis
nykimas
palūkanų norma
pẽrėjimas
pẽrėjimo taisyklė
populiacijos seka
tiesinis kitimas
tolydusis kitimas

PRATIMAI

Apšilimas

1. Jūs turite taloną, su kuriuo bet kurias parduotuvėje esančias prekes (ir tas, kurios išparduodamos) galima įsigyti 15% pigiau. Konkreti prekė, kurią jūs ketinate pirkti, yra parduodama su 30% nuolaida nuo pažymėtos 100 Lt kainos. Parduotuvės administracija leidžia jums pasinaudoti talonu arba prieš 30% nuolaidą, arba po 30% (t.y. jūs galėtumėte arba iš pradžių numesti 30%, o po to pasinaudoti 15% talono nuolaida, arba pirma numesti 15% kainos, o po to nuo likusios kainos numesti dar 30%).
   a) Kiek litų sudaro bendra nuolaida?
   b) Kokia kiekvienu atveju yra procentinė nuolaida?
   c) Tarkime, kad prekė kainuoja P litų (o ne 100). Kokia kiekvienu atveju yra procentinė nuolaida?

2. Jūs ketinate investuoti 1000 Lt į vieną iš dviejų konkuruojančių bankų (A arba B). Abu bankai moka 10% metinių palūkanų už vieneriems metams paliekamus indėlius. Bankas A moka 5% premiją į jūsų sąskaitą, kai tik jūs įdedate indėlį, su sąlyga, kad lėšos liks sąskaitoje ištisus metus. Bankas B siūlo premiją 5% nuo visų pinigų, esančių jūsų sąskaitoje metų gale (po to kai metinės palūkanos jau bus priskaičiuotos).
   a) Kiek pinigų būtų jūsų sąskaitoje metams pasibaigus, jei pinigus laikytumėte banke A? O jei banke B?
   b) Koks būtų bendrasis (imant palūkanas ir premiją) metinis prieaugis kiekviename banke metų gale?
   c) Koks būtų bendrasis metinis prieaugis kiekviename banke metų gale, jei jūs investuotumėte P litų (o ne 1000).

3. Parduotuvė savos bendrijos nariams parduodama nuleidžia 10% prekių kainos. Visoms prekėms parduotuvė prideda 50% antkainį (prie pradinės kainos). Su kokiu antkainiu prekę įsigyja bendrijos narys?

4. Ūkinių prekių parduotuvė daro 10% nuolaidą visiems grynais perkantiems klientams. Be to, jei prekės perkamos dideliais kiekiais (dėžėmis po 100 vienetų ar pan.), tai kiekviena prekė parduodama dar 10% pigiau. Kiek procentų sutaupytų grynais perkantis klientas, jei jis pirktų didelį prekių kiekį?

5. 3250 Lt suma padedama į taupomąją sąskaitą su 9% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kiekvienų metų gale. Kiek pinigų bus sąskaitoje po 4 metų, jei iš sąskaitos per tuos metus jų neimsime?

6. 1237,50 Lt suma padedama į taupomąją sąskaitą su 8,25% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kiekvienų metų gale. Kiek pinigų bus sąskaitoje po 3 metų, jei per tą laiką jų neliesime?

7. 5000 Lt suma padedama į taupomąją sąskaitą su 12% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kas mėnesį.

a) Kiek pinigų bus sąskaitoje po 5 metų, jei per tą laiką jų neliesime?

b) Kokios metinės pajamos iš šios sąskaitos?

8. 874,83 Lt suma padedama į taupomąją sąskaitą su 7,75% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kasdien.

a) Kiek pinigų bus sąskaitoje po 2 metų, jei per tą laiką jų neliesime?

b) Koks šios sąskaitos metinis prieaugis?

9. Jūs norite investuoti tam tikrą sumą pinigų. Bankas *A* siūlo 6% metinių palūkanų, kurias priskaičiuoja metų gale. Bankas *B* siūlo 5,75% metinių palūkanų, kurias priskaičiuoja kas mėnesį. Bankas *C* siūlo 5,5% metinių palūkanų, kurias priskaičiuoja kasdien. Koks būtų metinis prieaugis kiekviename banke?

10. Užpildykite tokią lentelę:

Metinių palūkanų norma	Priskaičiuojama	Metinis prieaugis (procentais)
12%	Kasmet	12%
12%	Kas pusmetį	?
12%	Kas ketvirtį	?
12%	Kas mėnesį	?
12%	Kasdien	?

11. Jūs nusprendėte sutaupyti pinigų Kalėdoms ir atidaryti sąskaitą banke, kuris moka 6% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kas mėnesį. Jūs padedate po 100 Lt sausio pirmąją dieną ir kiekvieno kito mėnesio pirmąją dieną iki pat lapkričio mėnesio imtinai. Kiek pinigų bus jūsų sąskaitoje gruodžio 1 dieną?

12. Jūs nusprendėte taupyti pinigus automobiliui pirkti ir atidarėte specialią sąskaitą banke, mokančiame 8% metinių palūkanų, priskaičiuojamų kas mėnesį. 36 mėnesius iš eilės kiekvieno mėnesio pirmąją dieną į šią sąskaitą jūs įmokate po 300 Lt. Kiek pinigų bus jūsų sąskaitoje po 36 mėnesių?

13. Nagrinėkime aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys $P_1 = 23$, o skirtumas $d = 7$.

a) Raskite P_{100}.

b) Raskite P_N.

c) Raskite $P_1 + P_2 + \cdots + P_{1000}$.

d) Raskite $P_{50} + P_{51} + \cdots + P_{1000}$.

14. Nagrinėkime aritmetinę progresiją, kurios pirmieji keturi nariai yra 7, 11, 15 ir 19.

a) Raskite P_{100}.
b) Raskite P_N.
c) Raskite $P_1 + P_2 + \cdots + P_{1000}$.
d) Raskite $P_{101} + P_{102} + \cdots + P_{1000}$.

15. Miestelyje šiuo metu yra 137 gatvės žibintai. Vienas miestelio atnaujinimo programos punktų numato per ateinančias 52 savaites kiekvienos savaitės pabaigoje įrengti po 2 šviestuvus. Vieno žibinto eksploatacijos išlaidos per savaitę yra 10 Lt.

a) Kiek gatvės žibintų bus miestelyje praėjus 38 savaitėms?
b) Kiek gatvės žibintų bus miestelyje praėjus N-tajai ($N \leqslant 52$) savaitei?
c) Kiek papildomų išlaidų sudarys naujai įrengtų žibintų eksploatavimas per 52-ąją savaitę?

16. Meistras šiuo metu turi padaręs 387 ruošinius. Per ateinančius 2 metus meistras didins gamybą 37 ruošiniais kas savaitę. Kiekvieno ruošinio laikymas sandėlyje atsieina 10 centų per savaitę.

a) Kiek ruošinių turės meistras po 21 savaitės?
b) Kiek ruošinių turės meistras praėjus N ($N \leqslant 104$) savaičių nuo šios dienos?
c) Kokios yra 387 ruošinių laikymas sandėlyje išlaidos per 2 metus?
d) Kiek papildomų išlaidų sudarys naujai padarytų ruošinių laikymas sandėlyje per 2 metus?

17. Nagrinėkime geometrinę progresiją, kurios pirmieji keturi nariai yra 1, 3, 9 ir 27.

a) Raskite P_{100}.
b) Raskite P_N.
c) Raskite $P_1 + P_2 + \cdots + P_{100}$.
d) Raskite $P_{50} + P_{51} + \cdots + P_{100}$.

18. Nagrinėkime geometrinę progresiją, kurios pirmasis narys $P_1 = 3$, o progresijos vardiklis $q = 2$.

a) Raskite P_{100}.
b) Raskite P_N.
c) Raskite $P_1 + P_2 + \cdots + P_{100}$.
d) Raskite $P_{50} + P_{51} + \cdots + P_{100}$.

19. Raskite $100 \times 1{,}005^{216} + 100 \times 1{,}005^{215} + \cdots + 100 \times 1{,}005$. Pasinaudokite geometrinės progresijos sumos formule ir skaičiuokliu. (*Nurodymas.* Skaitykite sumą iš dešinės į kairę. Kam lygus a? Kam lygus r?)

20–25 *pratimai remiasi logistine lygtimi* $p_{N+1} = r(1 - p_N)p_N$. *Juos atliekant kartais pravers skaičiuoklis su atminties registru.*

20. Populiacija kinta pagal logistinį modelį, kurio kitimo parametras $r = 1{,}5$, o pradinė populiacija $p_1 = 0{,}8$.

a) Raskite p_2.

b) Raskite p_3.

c) Raskite populiaciją po keturių perėjimų.

21. Populiacija kinta pagal logistinį modelį, kurio kitimo parametras $r = 2{,}8$, o pradinė populiacija $p_1 = 0{,}15$.

a) Raskite p_2.

b) Raskite p_3.

c) Raskite populiaciją po keturių perėjimų.

22. Turime izoliuotą voveraičių koloniją, kurios dydis kinta pagal logistinį modelį, o $r = 29/10$. Tarkime, kad pradinė populiacija yra $p_1 = 4/29$.

a) Kam lygus p_2?

b) Koks populiacijos dydis bus po antrojo perėjimo?

c) Kokį populiacijos dydį logistinis modelis numato ilgam laikotarpiui?

d) Su kokia kita pradinės populiacijos reikšme po pirmojo perėjimo gausime tą pačią populiacijos seką?

23. Tam tikros rūšies paukščių kolonijos dydis kinta pagal logistinį augimo modelį. Kitimo parametras $r = 2{,}5$. Pradinė populiacija yra $p_1 = 8$.

a) Kam lygus p_2?

b) Koks populiacijos dydis po antrojo perėjimo?

c) Kokį populiacijos dydį logistinis modelis numato ilgam laikotarpiui?

d) Su kokia kita pradinės populiacijos reikšme po pirmojo perėjimo gausime tą pačią populiacijos seką?

24. Populiacija kinta pagal logistinį modelį, kurio kitimo parametras $r = 3{,}0$, o pradinė populiacija $p_1 = 0{,}15$. Raskite populiacijos reikšmes nuo p_2 iki p_{10}.

25. Populiacija kinta pagal logistinį modelį, kurio kitimo parametras $r = 3{,}8$, o pradinė populiacija $p_1 = 0{,}23$. Raskite populiacijos reikšmes nuo p_2 iki p_{10}.

Treniruotė

26. Kokį antkainį turėtų uždėti krautuvininkas savo prekėms, kad, išparduodant jas su 25% nuolaida, galutinės kainos antkainis (lyginant su ta kaina, už kurią prekės buvo įsigytos) sudarytų 50%?

27. Kokia turi būti metinė palūkanų norma, kad, priskaičiuojant kas pusmetį, ji duotų 21% metinį prieaugį?

28. Prieš pradedant Onutei studijuoti koledže, senelis Mykolas pasiūlė jai pasirinkti vieną iš dviejų tokių skatinimo būdų:

1 variantas. 100 litų premija už kiekvieną dešimtuką, gautą mokantis koledže;

2 variantas. Vienas centas už pirmąjį dešimtuką, 2 centai už antrąjį dešimtuką, 4 centai už trečiąjį dešimtuką, 8 centai už ketvirtąjį dešimtuką ir t.t.

Onutė pasirinko 1 variantą. Per visą mokymosi laikotarpį ji surinko 30 dešimtukų ir gavo $100 \times 30 = 3000$ Lt. Jos nelaimei, pažymys iš matematikos nebuvo dešimtukas. Padėkite jai išsiaiškinti, kiek ji būtų gavusi, jei būtų pasirinkusi 2 variantą.

29. Populiacija kinta pagal logistinį modelį, o kitimo parametras yra r ($r > 1$). Įrodykite, kad esant $p_1 = (r - 1)/r$ populiacijos dydis nesikeičia.

30. Tarkime, kad sraigių populiacijos arealo talpumas yra $C = 20\,000$ ir dabartinis populiacijos dydis yra 5 000, o kitimo parametras yra $r = 3$. Kokį populiacijos dydį numato logistinis modelis po keturių pĕrėjimų?

31. Tam tikros drugelių rūšłes kitimo parametras yra $r = 3{,}2$, o pradinė populiacija yra $p_1 = 0{,}27$. Remdamiesi logistiniu modeliu, ištirkite populiacijos dydžio ilgalaikį kitimą.

32. Suskaičiuokite

$$1 + 5 + 3 + 8 + 5 + 11 + 7 + 14 + \cdots + 99 + 152.$$

33. Suskaičiuokite

$$1 + 1 + 2 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4} + 8 + \frac{1}{8} + \cdots + 4096 + \frac{1}{4096}.$$

34 ir 35 pratimuose reikia suskaičiuoti periodines įmokas. Jei B litų yra skolinama su periodine palūkanų norma i, ir skolą reikia grąžinti įmokant N periodinių įmokų, tai periodinės įmokos dydis p nustatomas pagal formulę

$$p = \frac{Bi(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}.$$

34. a) Jūs perkate namą už 120 000 Lt, mokate 20 000 Lt grynais, o likutį reikia išmokėti per 30 metų su 9% metinių palūkanų (kiekvieną mėnesį įmokant tą pačią sumą). Kokia Jūsų mėnesinė įmoka?

b) Kokia būtų mėnesinė įmoka, jei paskola, aprašyta punkte a), suteikiama ne 30-čiai, o 40-čiai metų?

35. Jūs nusprendėte, kad įstengsite mokėti 1000 Lt mėnesines įmokas. Dabartinė metinių palūkanų norma 30 metų paskolai yra 11%. Kiek pinigų jūs galite pasiskolinti esant šiai palūkanų normai, kad jūsų įmokos neviršytų jūsų galimybių?

Varžybos

36. a) Įrodykite, kad

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{100} = \frac{(q^{101} - 1)}{(q - 1)}.$$

(*Nurodymas.* Padauginkite $(1+q+q^2+\cdots+q^{100})(q-1)$ ir pamatysite, ką gavote!)

b) Įrodykite, kad $1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}$.

c) Įrodykite, kad $1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

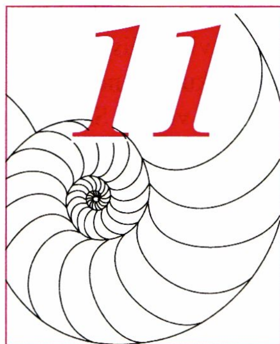
37. Įrodykite, kad aritmetinės progresijos, kurios pirmasis narys yra a, o skirtumas d, pirmųjų N narių suma yra

$$\frac{[2a + (N-1)d]\,N}{2}.$$

38. Populiacija kinta pagal logistinį modelį su $r > 3$. Raskite tokią pradinės populiacijos reikšmę p_1, kad būtų $p_1 = p_3 = p_5 = \cdots$, bet $p_1 \neq p_2$. (*Nurodymas.* 24 pratime matėme, kad reikšmė $p_1 = (r-1)/r$ duoda $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots$.)

39. Jūs perkate namą už 120 000 Lt. Grynais sumokate 30 000 Lt, o likusiai sumai padengti imate paskolą. Bankas A siūlo 10% metinių palūkanų paskolą, kurią reikia grąžinti per 30 metų, įmokant 360 vienodų mėnesinių įmokų, ir jokio paskolos mokesčio mokėti nereikia. Bankas B siūlo 9,5% metinių palūkanų paskolą, kurią reikia padengti per 30 metų, įmokant 360 vienodų mėnesinių įmokų. Bankui reikia iš anksto sumokėti vienkartinį 3% paskolos dydžio mokestį. Kuri paskola geresnė?

40. Jūsų draugas savo seną automobilį pardavė studentui ir paėmė vekselį (kurį garantavo turtingas studento dėdė) už 1200 Lt be palūkanų, išmokamą po 100 Lt per mėnesį 12-os mėnesių laikotarpiu. Jūsų draugas siūlo jums pirkti šį vekselį. Kiek jūs turite mokėti už vekselį, jei norite gauti 12% metinį prieaugį nuo jūsų investuotų pinigų?



11 Judesio simetrija

Simetrija, kad ir kaip plačiai ar siaurai ją suprastume – tai įrankis, kuriuo žmonės per amžius mėgino suvokti ir kurti tvarką, grožį, tobulybę.

H. VEILIS
(HERMANN WEYL)

Veidrodžiai, vien veidrodžiai aplink

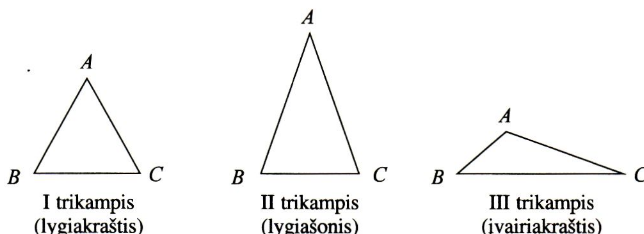
Yra žinoma, kad ledui vadinti eskimai turi penkias dešimtis skirtingų žodžių. Ledas yra pagrindinis ir visur esantis eskimų pasaulio elementas. Todėl mes galėtume viltis, kad matematikai simetrijai turi ne mažiau žodžių. Deja, yra kaip tik priešingai. Matematikoje „simetrija“ yra veikiau apibendrinamoji sąvoka, o kasdienėje vartosenoje šis žodis įvairiems žmonėms turi skirtingą prasmę. (Skaitytojas čia galėtų stabtelėti ir užrašyti savąjį simetrijos apibrėžimą.)

Kad ir kaip ją apibrėžtume, gyvenime simetrija yra kokiam nors objektui priskiriama savybė, ir šiuo požiūriu tai yra aiškiai geometrinė sąvoka. Beje, geometrija yra ne vienintelė, kur aptinkama simetrija – simetrijos sąvoka vienodai sėkmingai taikoma muzikoje, literatūroje, daugybėje negeometrinių matematikos sričių.

Vis dėlto šiame skyriuje mes nagrinėsime tradicinę geometrinių objektų simetriją ir vadinsime ją judesio simetrija, o štai 12 skyriuje kalbėsime apie netradicinę, nors irgi geometrinės prigimties simetriją – vadinamąją mastelio simetriją.

JUDESIO SIMETRIJA

Pradėkime nuo vaizdingo simetrijos apibrėžimo. Sakysime, kad objektas yra **simetriškas**, jei, žiūrint iš dviejų ar daugiau skirtingų vietų, jis atrodo vienodai. Įsivaizduokime trumparegę skruzdėlytę, esančią kurioje nors pirmojo trikampio viršūnėje (11.1 pav.) ir stebinčią trikampio vidų. Skruzdėlytė matys tą patį vaizdą, nesvarbu, kurioje viršūnėje – A, B ar C – ji būtų.



11.1 pav.

Tiesą sakant, jei viršūnės nebūtų pažymėtos, tai skruzdėlytė negalėtų atskirti vienos vietos nuo kitos. II trikampyje skruzdėlytė matytų tą patį vaizdą, stovėdama viršūnėje B arba C, bet tik ne viršūnėje A. III trikampyje skruzdėlytė iš kiekvienos viršūnės matytų vis kitą vaizdą. Vaizdžiai kalbant, I trikampis yra simetriškenis negu II trikampis, o šis, savo ruožtu, simetriškesnis už III trikampį.

Visa tai gražu, tačiau vis dar miglota. Šiame skyriuje ir susipažinsime su metodais, padedančiais ištirti, *kiek* ir *kokių* simetrijų turi nagrinėjamasis objektas.

Kitoks, bet lygiavertis judesio simetrijos tyrimo būdas būtų, užuot judinus stebėtoją, judinti patį nagrinėjamąjį objektą. Pavyzdžiui, sakyti, kad II trikampis atrodo toks pat skruzdėlytei, esančiai viršūnėje B, kaip ir skruzdėlytei, esančiai viršūnėje C, tai tas pats, kaip sakyti, kad yra būdas taip pajudinti II trikampį, kad viršūnė B atsidurtų ten, kur ką tik buvo viršūnė C, ir kad trikampis užimtų tiksliai tą pačią vietą, kurioje jis buvo prieš tai. Tai ir yra **judesio simetrija.** Kadangi jau susitarėme, kad apsiribosime geometriniams objektams būdinga simetrija, tai padarykime dar vieną apribojimą ir nagrinėkime tik dvimačius (t.y. plokščiuosius) objektus ir formas. Be abejo, trimačiai objektai ar formos vertos ne mažesnio dėmesio, tačiau jų tyrimas šiek tiek sudėtingesnis. Be to, daugumą svarbiausių išvadų mes galime padaryti nagrinėdami dvimatį atvejį.

STANDIEJI JUDESIAI

Išsamiau nagrinėjant simetriją, labai pravarti **standžiojo judesio** sąvoka. Jei imame daiktą ir, nekeisdami jo formos ir dydžio, perkeliame jį iš pradinės padėties į tam tikrą kitą padėtį, tai ir turime standųjį judesį. Jei judėjimo metu daiktą lankstome, plėšome ar apskritai keičiame jo pavidalą ar dydį, tai toks judesys *nėra* standusis. Nors bendruoju atveju standusis judesys gali

susidėti iš sudėtingos įvairių judesių sekos, tačiau galutinis rezultatas nėra toks sudėtingas. Imkime dešimties centų monetą, gulinčią ant staliuko. Ryte mes galime ją pasiimti, įsidėti į kišenę, apeiti su ja pusę miesto, išsitraukti iš kišenės ir pamėtėti į orą, įsidėti į kitą kišenę, grįžti namo, ištraukti iš kišenės ir vėl palikti ant to paties staliuko. Nors dešimties centų monetos kelionė buvo sudėtinga, tačiau mus tedomina tai, kad ji pradėjo judėti nuo tam tikros staliuko vietos ir atsidūrė kažkur kitur ant to paties staliuko. Visą šią kelionę mes galėtume atlikti kur kas paprastesniu veiksmu – gal stumtelėjimu, gal nedideliu jos pasukimu ar apvertimu (jei pradžioje moneta gulėjo kita puse). Šis pavyzdys iliustruoja mažai težinomą, tačiau esminį faktą. Bet kokio sudėtingumo standaus judesio *galutinis rezultatas* gali būti traktuojamas kaip viena iš kelių galimybių. Jei mes nagrinėjame dvimačius objektus, pradedančius bei baigiančius judėjimą toje pačioje plokštumoje, tai tėra keturios galimybės – atspindys, posūkis, postūmis ir slenkamasis atspindys. Patogumo dėlei šiuos keturis standžiuosius judesius vadinsime **pagrindiniais standžiaisiais plokštumos judesiais** *.

Standusis plokštumos judesys (pavadinkime jį M) perkelia kiekvieną plokštumos tašką iš pradinės padėties P į galutinę padėtį P', esančią toje pačioje plokštumoje. Tašką P' vadinsime standžiojo judesio M taško P **vaizdu** ir sakysime, kad *M perkelia tašką P į P'*. (Visame šiame skyriuje taško vaizdą žymėsime ta pačia raide, kaip ir pradinį, tik pridėsime štrichą.) Gali atsitikti, kad, atlikus judesį, taškas grįžta į savo buvusią vietą ($P = P'$) – tada tašką P vadinsime standžiojo judesio **nejudamuoju tašku**.

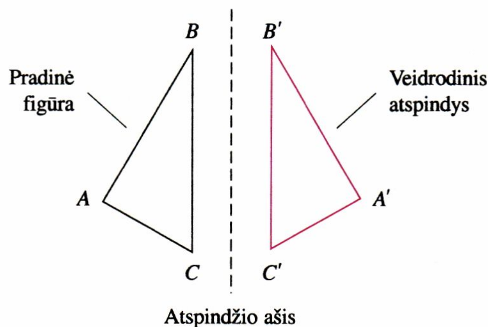
Galėtų pasirodyti, kad norint perprasti standųjį judesį, reikėtų žinoti, kur jis perkelia kiekvieną plokštumos tašką. Mūsų laimei, paaiškės, kad tereikia žinoti, kur standusis judesys perkelia vos kelis taškus (daugiausia tris). Kadangi judesys yra standus, tai šių kelių padėtis lemia visų likusių taškų judėjimą.

Toliau mes kiek smulkiau aptarsime kiekvieną pagrindinį standųjį plokštumos judesį.

ATSPINDŽIAI

Atspindys dažnai yra vadinamas *veidrodiniu atspindžiu*. Tai tokia judesio rūšis, kai objektas perkeliamas į naują vietą, kuri yra veidrodinis pradinės jo padėties atspindys. Tiesė, kuria eina „veidrodis“, vadinama **atspindžio ašimi**. Kiekvienas atspindys visiškai apibūdinamas jo ašimi. 11.2–11.4 paveikslėliuose parodyti atspindžių pavyzdžiai. Vaizdumo dėlei pradinė figūra nupiešta juodai, o jos veidrodinis atspindys – raudonai. Pastebėsime, kad nedraudžiama atspindžio ašiai kirsti patį objektą, kaip kad 11.4 pav.

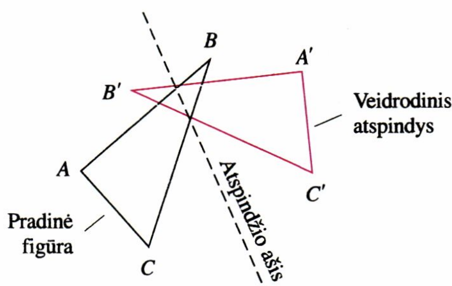
* Skaitytojui bus įdomu sužinoti, kad trimatėje erdvėje judančių trimačių objektų atveju tėra tik šeši pagrindiniai standžiojo judesio tipai (atspindys, posūkis, postūmis, slenkamasis atspindys ir dar du judesiai, vadinami sukamuoju atspindžiu ir sraigtiniu perkėlimu).



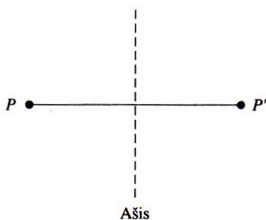
11.2 pav.



11.3 pav.



11.4 pav.

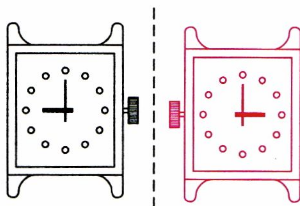


11.5 pav.

Mums būtų patogu turėti matematiškesnį atspindžio aprašymą. Jis būtų toks – žinant atspindžio ašį, taško P vaizdas randamas nuleidus iš taško P statmenį į atspindžio ašį ir paėmus tašką P', kuris yra statmenyje į kitą ašies pusę ir nutolęs nuo jos tiek pat, kiek ir taškas P. Aišku, jog kiekvienas pačios atspindžio ašies taškas yra nejudamasis atspindžio taškas.

Atspindžio nustatymo procesas yra apgręžiamas, t.y. žinodami bet kokį tašką P ir jo atspindžio vaizdą P', galime rasti atspindžio ašį. Ji yra atkarpos, jungiančios tuos du taškus, vidurio statmuo (11.5 pav.). Taigi taškas P ir jo vaizdas P' visiškai nusako atspindį.

Svarbi atspindžio savybė – jis apsuka mūsų įprastines orientacijos sistemas. Kaip pavaizduota 11.6 pav., atspindys keičia dešinę kaire, o kryptį pagal laikrodžio rodyklę – kryptimi prieš laikrodžio rodyklę. Sakysime, kad atspindys yra **netikrinis** standusis judesys, nes jis sukeičia kairę su dešine ir kryptį pagal laikrodžio rodyklę su kryptimi prieš laikrodžio rodyklę.

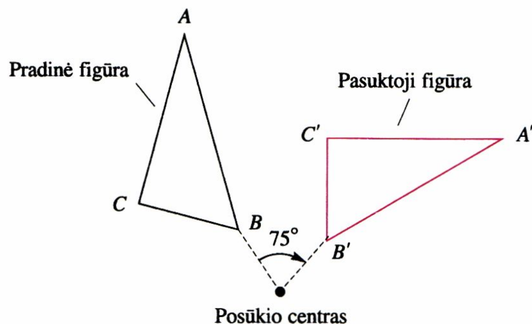


11.6 pav.

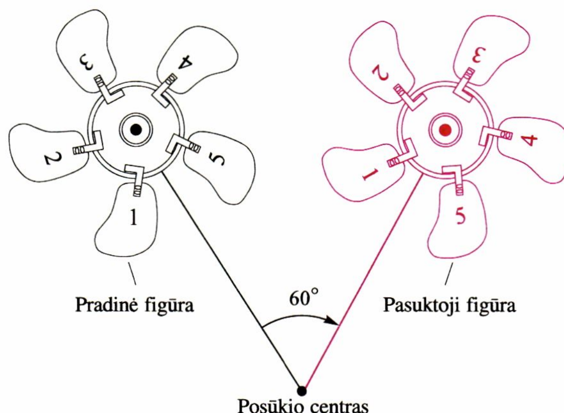
Kita svarbi atspindžio savybė – atlikus tą patį atspindį du kartus, kiekvienas taškas atsidurs savo pradinėje pozicijoje. Kitaip sakant, objektas visai nepajuda. Čia kyla įdomus semantinis klausimas – ar objekto *nejudėjimas* galėtų būti laikomas standžiuoju *judesiu*? Viena vertus, teigiamas atsakymas atrodytų keistokai. Jei jau kalbame apie judesį, tai turėtų būti koks nors, tegu ir mažas, krustelėjimas. Antra vertus, mes priversti pripažinti, kad dviejų (ar daugiau) nuoseklių standžiųjų judesių darinys pats yra standusis judesys, o tada du nuoseklūs atspindžiai tos pačios ašies atžvilgiu (kai rezultatas išeina toks, lyg jokio judesio nebūtų buvę) irgi turėtų būti standusis judesys. Mes pasirenkame pastarąją galimybę, nes ji matematiškai nepriekaištinga. Taigi objekto nejudėjimas irgi yra standusis judesys, kurį mes vadinsime **tapačiuoju judesiu**.

POSŪKIAI

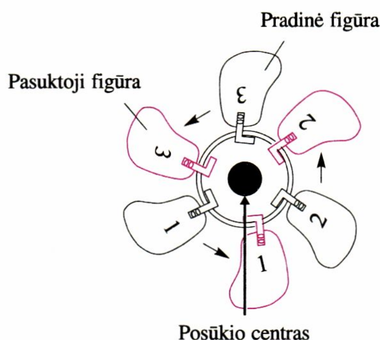
Antra standžiojo judesio rūšis, kurią nagrinėsime, yra **posūkis**. Posūkis nusakomas, nurodant *posūkio centrą* ir *posūkio kampą*. 11.7–11.9 paveikslėliuose parodyti posūkių pavyzdžiai. Čia pradinė pozicija nuspalvinta juodai, o galutinė – raudonai.



11.7 pav.



11.8 pav.



11.9 pav.

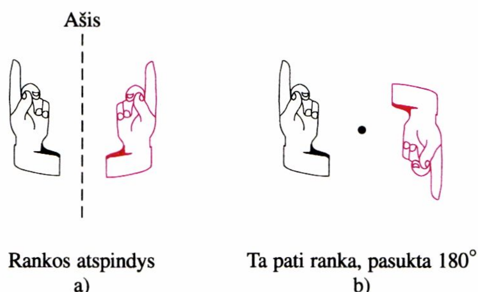
Šiuos pavyzdžius reikėtų pakomentuoti. Visuose trijuose pavyzdžiuose posūkio kampą nurodėme laipsniais. Čia jau kaip kam labiau patinka – vieniems laipsniai, kitiems – radianai. Mes naudosimės laipsniais, tik priminsime skaitytojams, kad visados galima laipsnius pakeisti radianais, o radianus – laipsniais, naudojantis sąsajomis:

$$\text{radianai} = \frac{\text{laipsniai}}{180} \times \pi; \quad \text{laipsniai} = \frac{\text{radianai}}{\pi} \times 180.$$

Antra pastaba: posūkis 360° kampu reiškia tą patį, kaip judesio nebuvimas; kitaip sakant, tai yra tapatusis judesys. Iš to išplaukia kelios naudingos išvados. Pirma, bet kuris posūkis didesniu negu 360° kampu yra ekvivalentus posūkiui, turinčiam tą patį centrą, bet jau tarp 0° ir 360° esančiu kampu. Reikiamas posūkio kampas yra duotojo kampo dalybos iš 360° liekana. Pavyzdžiui, posūkis 759° kampu pagal laikrodžio rodyklę yra tas pat, kaip ir

posūkis 39° kampu pagal laikrodžio rodyklę, nes, 759 padaliję iš 360 gauname 2, o liekana yra 39. Antra, bet kuris posūkis pagal laikrodžio rodyklę gali būti nusakytas kaip posūkis prieš laikrodžio rodyklę. Pavyzdžiui, 11.8 pav. parodytas 60° posūkis pagal laikrodžio rodyklę, tačiau galėtume nurodyti ir 300° posūkį prieš laikrodžio rodyklę. Galėtume nenurodyti posūkio krypties, tačiau, rinkdamiesi kurią nors vieną iš jų, neribosime pasirinkimo laisvės ir imsime tokią posūkio kryptį, kuri mums patogiausia.

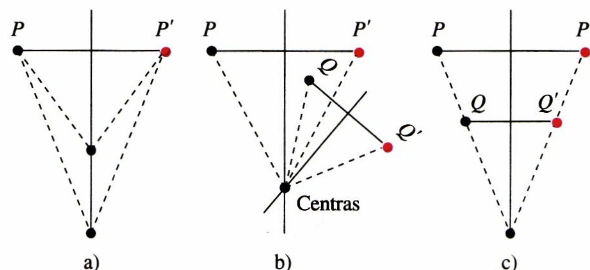
Kryptimi rūpintis nereikia, kai pasukama 180° kampu: sukdami tiek pagal laikrodžio rodyklę, tiek prieš ją, gauname tą patį. Kadangi du paeiliui atlikti posūkiai 180° kampu duoda tą patį rezultatą, kaip ir du atspindžiai tos pačios ašies atžvilgiu, galėtų pasirodyti, jog posūkis 180° kampu yra tas pats, kas ir atspindys. Truputį pagalvojus ir/arba pažvelgus į 11.10 pav., paaiškėja, kad taip nėra.



11.10 pav.

Galima ir kitaip pagrįsti, jog posūkis 180° kampu – tai ne tas pats, kas atspindys. Posūkis – tai toks standusis judesys, kuris išlaiko pradinę orientaciją (kairė–dešinė, laikrodžio rodyklės judėjimo kryptis). Bet kuris standusis judesys, turintis šią savybę, vadinamas **tikriniu standžiuoju judesiu**. Mes jau matėme, kad atspindys yra *netikrinis* standusis judesys.

Ir paskutinė pastaba, kalbant apie posūkius. Jiems apibūdinti, ne taip kaip atspindžiams, neužtenka nurodyti tašką P ir jo vaizdą P'. Yra be galo daug posūkių, kurie tašką P perkelia į tašką P'. Bet kuris atkarpos PP'



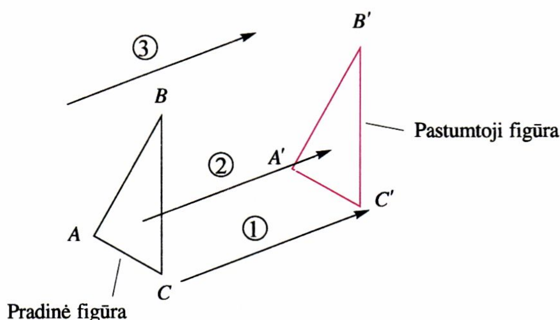
11.11 pav.

vidurio statmens taškas yra posūkio, perkeliančio tašką P į tašką P', centras (11.11 a) pav.). Antra pora Q, Q' jau leidžia nusakyti posūkį: jo centras yra taškas, kuriame susikerta atkarpų PP' ir QQ' vidurio statmenys (11.11 b) pav.). Atskiru atveju, kai PP' ir QQ' yra lygiagrečios, posūkio centras yra tiesių PQ ir $P'Q'$ sankirtos taškas (11.11 c) pav.).

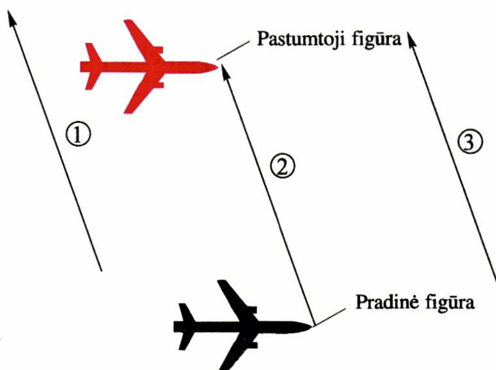
POSTŪMIAI

Postūmis iš esmės yra objekto slinkimas plokštuma. Postūmį visiškai nusako slinkimo kryptis ir nuotolis. Tokią informaciją perteikia **vektorius**. Vektorius vaizduojamas rodykle, turinčia ilgį ir kryptį. Kadangi rodyklė rodo reikiamą kryptį ir turi nurodytąjį ilgį, jos buvimo vieta nėra svarbi. 11.12 ir 11.13 pav. parodyti postūmių pavyzdžiai. Kaip ir anksčiau, pradinę padėtį spalvinsime juodai, o galutinę – raudonai. Abiejuose paveikslėliuose bet kuri rodyklė, pažymėta ①, ② ar ③ (ir be galo daug kitų tokių rodyklių), nusako tą patį postūmio vektorių.

Postūmis, ne taip, kaip atspindys, yra *tikrinis* standusis plokštumos judesys – jis nesukeičia kairės su dešine ar laikrodžio rodyklės judėjimo krypčių. Yra viena ir atspindžiui, ir postūmiui būdinga savybė – postūmis visiškai nusakomas nurodžius tašką P ir jo vaizdą P'. Rodyklė, jungianti tašką P su tašku P', ir nusako postūmio vektorių. O kai jau turime vektorių, tai žinome, kur postūmis perkelia bet kurį kitą tašką.



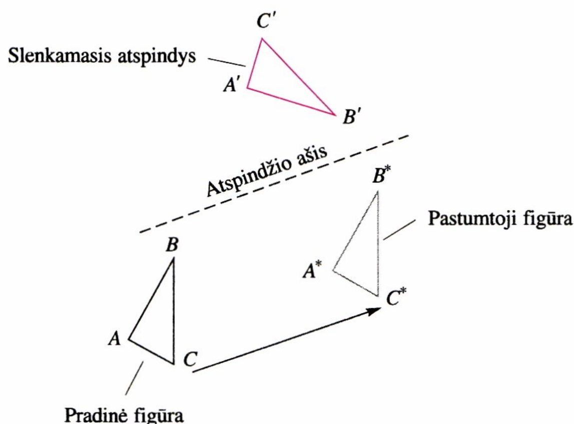
11.12 pav.



11.13 pav.

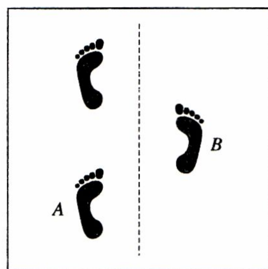
SLENKAMIEJI ATSPINDŽIAI

Slenkamasis atspindys, kaip teigia pavadinimas, yra standusis judesys, kurį sudaro postūmis (slenkamoji dalis) ir atspindys. Atspindžio ašis *turi būti* lygiagreti postūmio krypčiai. Pasakymas „atspindys ir postūmis“ irgi tiktų, nes lygiai tą patį gautume, pirmiau padarę atspindį, o paskiau postūmį. 11.14 ir



11.14 pav.

11.15 paveikslėliuose parodyti paslinktųjų atspindžių pavyzdžiai, kur pradinė padėtis nuspalvinta juodai, galutinė padėtis – raudonai, o tarpinė – pilkai.

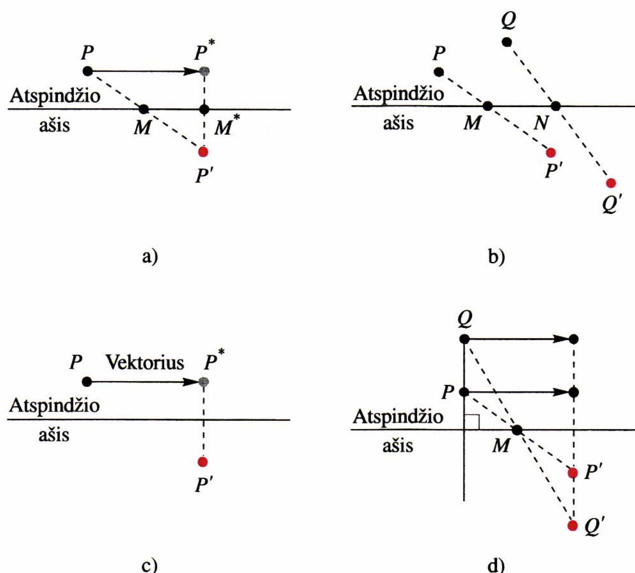


11.15 pav. Kojų pėdsakai – slenkamasis atspindys kojos pėdsaką *A* atvaizduoja į pėdsaką *B*.

Slenkamasis atspindys yra *netikrinis* standusis judesys, nes jis sukeičia kairę su dešine bei laikrodžio rodyklės judėjimo kryptis. Už tai mes turime dėkoti šio judesio atspindinčiajai daliai.

Slenkamojo atspindžio taip pat nepavyks nusakyti vienu tašku P bei jo vaizdu P'. Kaip ir posūkio atveju, reikalingas ir kitas taškas Q su jo vaizdu Q'. Turėdami dvi taškų poras P, P' ir Q, Q', atspindžio ašį randame sujungę atkarpų PP' ir QQ' vidurio taškus (11.16 b) pav.), nes, atliekant slenkamąjį atspindį, tašką ir jo vaizdą jungiančios atkarpos vidurio taškas priklauso atspindžio ašiai (11.16 a) pav.). O kai atspindžio ašis yra žinoma, tai postūmio vektorių (arba kitaip – slenkamojo atspindžio slinkties vektorių) galima nustatyti pažymėjus tarpinį tašką P^*, kuris yra taško P' atspindys (11.16 c) pav.).

Gali pasitaikyti atvejis, kai PP' ir QQ' vidurio taškas yra tas pats taškas M. Tada per taškus P ir Q einanti tiesė yra statmena atspindžio ašiai (11.16 d) pav.), ir atspindžio ašį randame nubrėžę tiesę, einančią per bendrąjį vidurio tašką M ir statmeną tiesei PQ.



11.16 pav.

NAUJAS POŽIŪRIS Į JUDESIO SIMETRIJĄ

Mes jau aptarėme tai, kad, atliekant standžiuosius judesius, priešingai negu turistinėje kelionėje, visai nesvarbu, *kaip* mes pasiekėme galutinę padėtį. Jei standusis judesys A perkelia visus plokštumos taškus į tą pačią vietą, kaip ir standusis judesys B, tai sakome, kad A ir B yra **ekvivalentūs standieji judesiai**. Jau minėjome, kad du paeiliui atlikti atspindžiai tos pačios ašies atžvilgiu yra standusis judesys, ekvivalentus tapačiajam standžiajam judesiui. Panašiai, atlikę du 180° posūkius apie tą patį centrą, gausime judesį, ekvivalentų tapačiajam. Toliau pateikiame papildomų faktų apie standžiųjų judesių darinius.

- Dviejų iš eilės atliktų posūkių apie tą patį centrą rezultatas yra ekvivalentus vienam posūkiui apie tą patį centrą (žr. 21 pratimą).
- Jeigu slenkamąjį atspindį atlikome du kartus iš eilės, tai rezultatas yra ekvivalentus postūmiui (žr. 22 pratimą).
- Jeigu iš eilės atlikome du atspindžius lygiagrečių ašių atžvilgiu, tai rezultatas yra ekvivalentus postūmiui (žr. 23 pratimą).
- Dviejų iš eilės atliktų atspindžių susikertančių ašių atžvilgiu rezultatas duoda posūkį (žr. 24 pratimą). Kai atspindžių ašys statmenos – gauname posūkį 180° kampu.
- Dviejų iš eilės atliktų postūmių rezultatas vėl yra postūmis (žr. 25 pratimą).

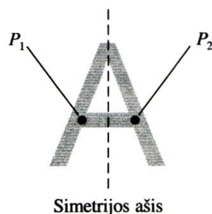
Šį žaidimą galėtume tęsti ilgai, ir jis darytųsi vis sudėtingesnis, ypač jei pradėtume derinti skirtingas standžiojo judesio rūšis. Koks būtų, pavyzdžiui,

rezultatas, jei paeiliui darytume posūkį, po to – postūmį, o galiausiai slenkamąjį atspindį? Pasirodo, kad ir kiek judesių atliktume, rezultatas visada bus ekvivalentus vienam iš tų keturių pagrindinių standžiųjų judesių – atspindžiui, posūkiui, postūmiui arba slenkamajam atspindžiui.

Dabar mes galime duoti tikslų judesio simetrijos apibrėžimą. Objekto **judesio simetrija** yra bet kuris standusis judesys, kuris perkelia objektą į save. Pažymėtina, kad visai nereikalaujame, jog standusis judesys būtų tapatusis judesys. Kažkurios objekto dalys gali atsidurti ne ten, kur buvo iš pradžių, nors visas objektas užima tą pačią padėtį. Aišku, kad tapatusis judesys pats yra simetrija.

Kadangi tėra tik keturios pagrindinės standžiųjų judesių plokštumoje rūšys, pagal tai galime surūšiuoti ir plokštumos objektų simetrijas.

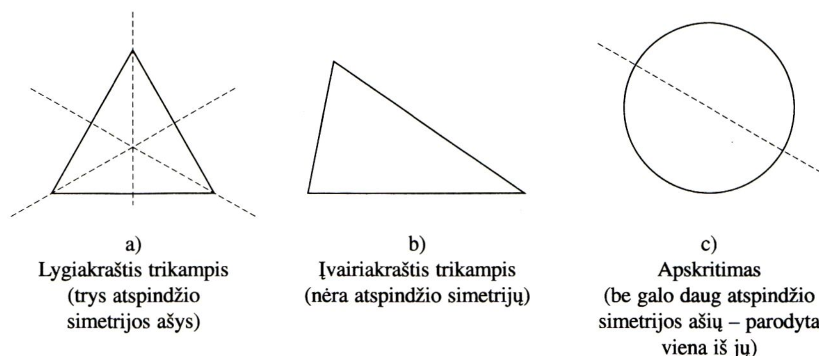
Atspindžio simetrija



11.17 pav.

Jei objektas, atlikus atspindį, atvaizduojamas pats į save, tai sakoma, kad jis pasižymi **atspindžio simetrija**, arba bendriau – **abipuse simetrija**. Atspindžio ašį vadiname **simetrijos ašimi**. Iliustracijose ją vaizduosime brūkšnine linija. 11.17 pav. parodytas atspindžio simetrijos pavyzdys. Nors objektas po atspindžio atrodo kaip atrodęs, tačiau taškas P_1 susikeičia su tašku P_2.

Lygiakraštis trikampis, parodytas 11.18 a) pav., turi tris skirtingas atspindžio simetrijas, o jų ašys yra trijų kraštinių vidurio statmenys. Kita vertus, įvairiakraštis trikampis, parodytas 11.18 b) pav., neturi atspindžio simetrijos. Apskritimas turi be galo daug atspindžio simetrijų (bet kuri per apskritimo centrą einanti tiesė yra simetrijos ašis (11.18 c) pav.).



a) Lygiakraštis trikampis (trys atspindžio simetrijos ašys)

b) Įvairiakraštis trikampis (nėra atspindžio simetrijų)

c) Apskritimas (be galo daug atspindžio simetrijos ašių – parodyta viena iš jų)

11.18 pav.

Raštai

Padarykime reklamos pertraukėlę ir pažvelkime į raštus. **Raštas** yra abstrakcija, nusakanti *begalinę* figūrą su nepabaigiamai besikartojančiais fragmentais. Dvimačiu atveju tai dažniausiai sienų apmušalų, audinių, lubų apvadų, juostų raštai ir t.t.

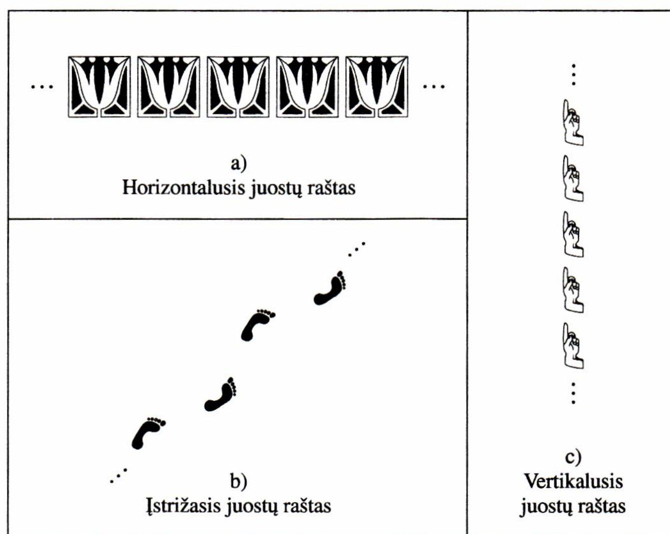
Skirsime du plokštumos raštų atvejus. Kartais juostų, apvadų raštas kartojasi tik viena kryptimi. Tokius raštus vadinsime **juostų raštais** (11.19 pav.).

Suprantama, raštai gali kartotis bet kuria kryptimi. Mums patogiau pasukti raštus taip, kad jie būtų horizontalūs (taip bent sutaupysime vietos puslapyje), ir taip nuo šiol darysime.

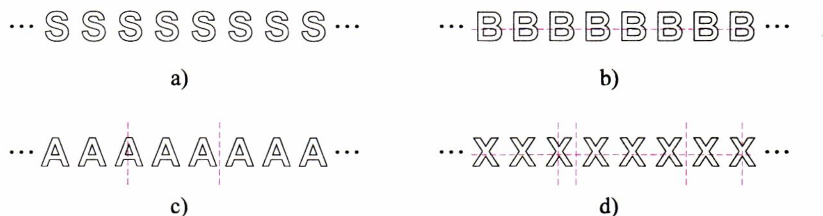
Vadinasi, sakydami „horizontalioji kryptis", turėsime galvoje rašto kryptį, o sakydami „vertikalioji kryptis", turėsime galvoje kryptį, statmeną rašto krypčiai.

Kalbant apie atspindžio simetriją, juostų raštai gali:

- visai neturėti atspindžio simetrijos (11.20 a) pav.);
- turėti tik horizontaliąją (raštų krypties) atspindžio simetriją (11.20 b) pav.);
- turėti tik vertikaliąją (statmeną raštų krypčiai) atspindžio simetriją (11.20 c) pav.) (pastebėsime, kad yra be galo daug skirtingų būdų atspindžio ašiai pasirinkti);
- turėti ir vertikaliąją, ir horizontaliąją atspindžio simetrijas (11.20 d) pav.).

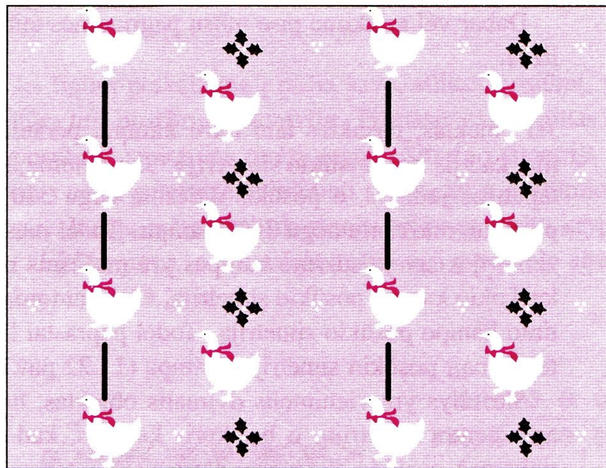


11.19 pav. Juostos rašto paveikslėlis atsikartoja vienintele kryptimi.



11.20 pav.

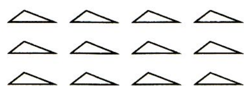
Antrasis raštų tipas, kurį mes nagrinėsime, apima visą plokštumą. Taip atsitinka, kai turime sienų apmušalus ar audinius. Tokius raštus vadinsime **apmušalų raštais**. Apmušaluose raštai atsikartoja daugiau nei viena kryptimi.



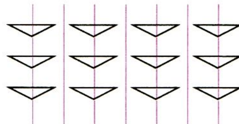
Apmušalų raštas atsikartoja dviem nelygiagrečiomis kryptimis, užpildydamas visą plokštumą.

Galimos apmušalų raštų atspindžio simetrijos yra šiek tiek sudėtingesnės, negu galėtume tikėtis. Yra tokios galimybės:

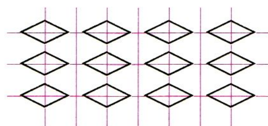
- atspindžio simetrijos nėra (11.21 a) pav.);
- tėra viena atspindžio simetrijos kryptis (11.21 b) pav.);
- yra dvi atspindžio simetrijos kryptys (11.21 c) pav.);
- yra trys atspindžio simetrijos kryptys (11.21 d) pav.);



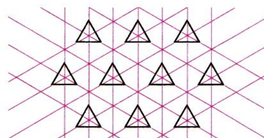
a)



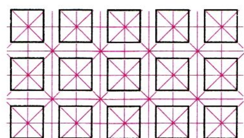
b)



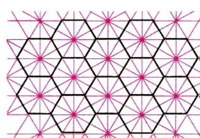
c)



d)



e)



f)

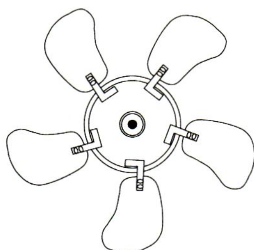
11.21 pav.

- yra keturios atspindžio simetrijos kryptys (11.21 e) pav.);
- yra šešios atspindžio simetrijos kryptys (11.21 f) pav.).

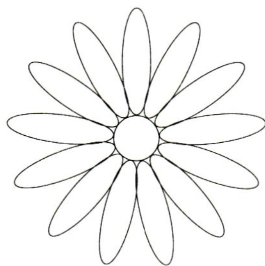
Jokių kitų galimybių nėra. Krinta į akis, jog nėra penkių krypčių atspindžio simetrijos.

Dabar vėl grįžkime prie mūsų pagrindinės temos – judesio simetrijos analizės.

Posūkio simetrija



11.22 pav. Šešiasparnis ventiliatorius turi 72°, 144°, 216°, 288° ir 360° posūkio aplink centrą simetrijas. Užtenka nurodyti tik 72° posūkį.



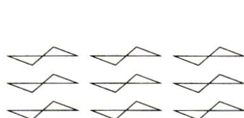
11.23 pav.

Jei objektas, pasuktas tam tikru kampu, perkeliamas pats į save, tai sakoma, kad jis turi **posūkio simetriją**. Jau žinome, kad posūkis 360° kampu yra tapatusis judesys, o posūkis didesniu negu 360° kampu gali būti išreikštas posūkiu, mažesniu negu 360° kampu. Todėl mes galime laikyti, kad posūkio simetrijos atveju sukimo kampas yra mažesnis negu 360°. Kai objektas turi kažkokio kampo posūkio simetriją, tai jis automatiškai turi ir bet kurio kartotinio kampo posūkio simetriją. Todėl paprastai kalbėsime tik apie *mažiausią* teigiamąjį posūkio simetrijos kampą (11.22 pav.)

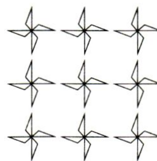
Skritulys yra vienintelis dvimatis objektas, turintis be galo daug posūkio apie centrą simetrijų, o bet kuris kampas, kad ir koks mažas jis būtų, yra tinkamas posūkio kampas. Nors ventiliatorius, parodytas 11.22 pav., turi tik posūkio simetriją (o ne atspindžio), dažnai posūkio simetrija yra lydima atspindžio simetrijos, kaip matome 11.23 pav.

Kokios galimos raštų posūkio simetrijos? Atsakymas yra truputį netikėtas.

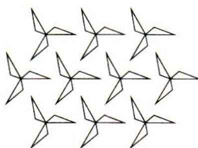
- Vienintelis galimas *juostų raštų* posūkio kampas yra 180°.
- *Apmušalų raštų* posūkio kampai gali būti tik 60°, 90°, 120° ir 180°. Šie posūkiai atitinka vadinamąsias šešiagubąją (11.24 d)), keturgubąją (11.24 b)), trigubąją (11.24 c)) ir dvigubąją (11.24 a)) posūkio simetrijas.



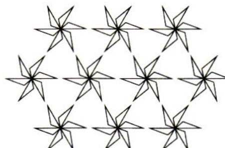
a)



b)



c)



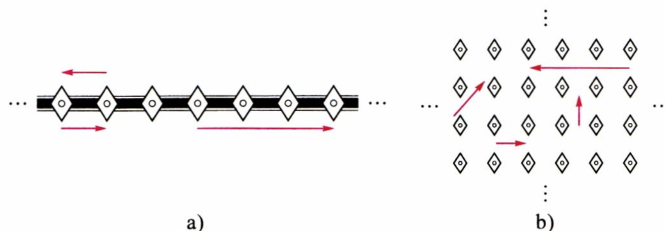
d)

11.24 pav.

Apmušalų raštai neturi penkialypės posūkio simetrijos (posūkio kampas būtų 72°). Iš to gauname įdomią išvadą – mes galėtume savo vonią iškloti (kad neliktų tarp plytelių tarpų) trikampio, kvadrato ar taisyklingojo šešiakampio formos plytelėmis ir negalėtume taisyklingojo penkiakampio formos plytelėmis.

Postūmio simetrija

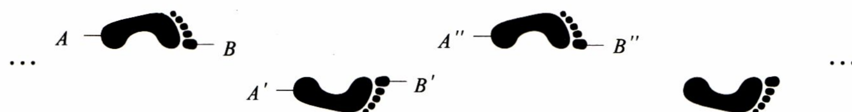
Jei figūra perkeliama į pačią save, atlikus postūmį, tai sakome, kad tokia figūra turi **postūmio simetriją**. Pirmasis pastebėtinas dalykas – baigtinė figūra postūmio simetrijos turėti negali. Šio tipo simetriją turi *tik raštai*. Iš tikrųjų mes netgi galėtume apibūdinti raštus, kaip postūmio simetriją turinčias figūras. Juostų raštai turi tik vienos krypties (raštų krypties) postūmio simetriją (11.25 a) pav.), o apmušalų raštai turi postūmio simetriją daugiau nei viena kryptimi (11.25 b) pav.).



11.25 pav. a) Rodyklėmis nurodytos trys (jų yra be galo daug) postūmio simetrijos. Postūmiai visada atliekami horizontaliąja kryptimi. b) Rodyklėmis nurodytos keturios (jų yra be galo daug) postūmio simetrijos.

Slenkamojo atspindžio simetrija

Slenkamasis atspindys irgi gali nepakeisti figūros, ir tada sakome, kad figūra turi slenkamojo atspindžio simetriją. Kadangi čia slypi dar ir postūmis, tai figūra negali būti baigtinė. Jeigu figūra turi slenkamojo atspindžio simetriją, tai ji yra raštas. Atlikę tokios figūros slenkamąjį atspindį du kartus, gauname postūmio simetriją. Slinkties ir postūmio kryptis yra ta pati, o postūmio dydis yra lygus dvigubam slinkties dydžiui (žr. 22 pratimą). 11.26 pav. parodytas juostų raštas, turintis slenkamojo atspindžio simetriją. Slenkamasis atspindys tašką A perkelia į tašką A', o tašką B – į tašką B'. Jei dar kartą atliktume slenkamąjį atspindį, tai taškas A' pereitų į tašką A'', o taškas B' – į tašką B''. Judesių darinys, perkeliantis A į A'', o B į B'', yra postūmio simetrija.



11.26 pav.

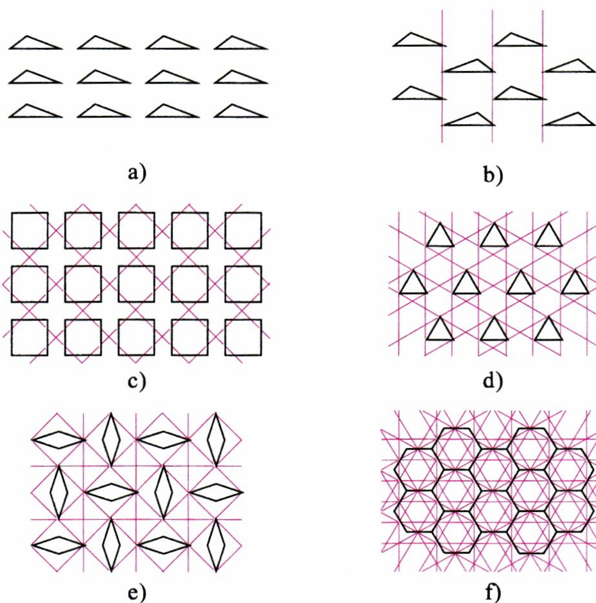


11.27 pav.

Dabar išnagrinėkime raštą 11.27 pav. Čia turime ir postūmio simetriją, ir horizontaliojo atspindžio simetriją, taigi nesunku sudaryti slenkamąjį atspindį, perkeliantį raštą į save. Tačiau šiuo atveju slenkamojo atspindžio simetrija kartu yra ir atspindžio simetrija, ne taip, kaip 11.26 pav., kur tėra slenkamojo atspindžio simetrija. Pamatysime, kad, klasifikuojant raštus, naudinga skirti šiuos atvejus. Nuo šiol sakydami, kad raštas turi slenkamojo atspindžio simetriją, turėsime galvoje tik 11.26 pav. pateiktą situaciją.

Apmušalų raštuose yra tokios slenkamojo atspindžio simetrijos galimybės:

- slenkamojo atspindžio nėra (11.28 a) pav.);
- tėra viena slenkamojo atspindžio simetrijos kryptis (11.28 b) pav.);
- yra dvi slenkamojo atspindžio simetrijos kryptys (11.28 c) pav.);
- yra trys slenkamojo atspindžio simetrijos kryptys (11.28 d) pav.);
- yra keturios slenkamojo atspindžio simetrijos kryptys (11.28 e) pav.);
- yra šešios slenkamojo atspindžio simetrijos kryptys (11.28 f) pav.).



11.28 pav.

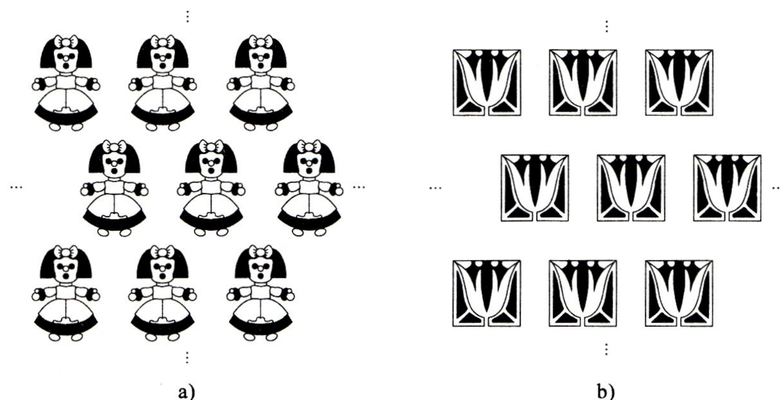
IŠVADOS. RAŠTŲ KLASIFIKAVIMAS

Raštų ornamentai svarbūs įvairiose mokslo srityse. Archeologai iš puodų, sienų, audinių raštų atpažįsta kultūras ir nustato jų sąveikas. Chemikai ir kristalografai domisi kristalų gardelių konfigūracijomis (trimačiais raštais), nes jos daug pasako apie medžiagos cheminę sudėtį ir ypatybes.

Viena iš pagrindinių raštų (ornamentų) analizavimo priemonių yra jų pavyzdžių klasifikavimas pagal simetrijas. Imkime, pavyzdžiui, sienų apmušalus. Nors jiems ornamentuoti yra be galo daug būdų (iš tiesų mums ir atrodo,

kad yra be galo daug apmušalų parduotuvėje!), tačiau skirtingai atrodantys apmušalai kartais gaunami, vieną paveikslėlį (tarkime, lėlytę) pakeitus kitu (tarkime, gėlyte). Šia prasme mes galime pasakyti, kad 11.29 a) pav. ir 11.29 b) pav. pavaizduotas tas pats raštų tipas, tik sudarytas iš skirtingų paveikslėlių.

Tai, kas matematiškai skiria vieną raštą nuo kito, yra visai ne lėlytės ar gėlytės paveikslėlis, bet tai, kad raštas turi labai konkretų simetrijų rinkinį – postūmius daugiau kaip viena kryptimi, atspindį vienintele kryptimi ir slenkamąjį atspindį vienintele kryptimi.



11.29 pav. a) b)

Simetrijų aibė nusako **rašto tipą**, todėl apie bet kurį kitą raštą, turintį tiksliai tas pačias simetrijas (ne mažiau ir ne daugiau), yra sakoma, kad jis yra to paties tipo. Todėl raštų klasifikavimas reiškia, kad išvardijami visi įmanomi simetrijų dariniai, lemiantys rašto tipą. Susidūrus su ta problema, reakcija dažnai būna tokia: „Negi norėdami gauti raštų tipą, negalime imti bet kurių simetrijų (tarsi knygų iš lentynos)?“ Neigiamas atsakymas tik lengvai tenustebina, tačiau konkretus rezultatas dažną tiesiog sukrečia:

- **1 faktas.** Bet kuris *juostos* raštas priklauso vienam iš 7 galimų raštų tipų.
- **2 faktas.** Bet kuris *apmušalų* raštas priklauso vienam iš 17 galimų raštų tipų.

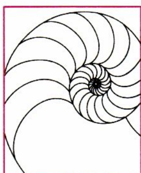
Nuodugnus šių faktų (ypač antrojo) įrodymas reikalauja labai gero matematikos išmanymo. Iš tiesų, nors šie faktai jau buvo žinomi senovės egiptiečiams (jie naudojo visus 17 raštų, komponuodami sienų ornamentus), tačiau tik 1924 metais vengrų matematikas Dž. Poja (George Polya) pateikė tikslų matematinį antrojo fakto įrodymą.

Pirmame priede mes pateikiame ir trumpai aptariame septynis juostų raštų tipus. Septyniolika apmušalų tipų yra pateikti antroje priedo lentelėje. Žinoma, nemanome, kad skaitytojas stengsis įsiminti tų priedų medžiagą. Tai veikiau informacijos šaltinis besidomintiems ir norintiems gilintis toliau.

Šį skyrių baigsime trumpa didžiojo matematiko H. Veilio citata:

> *Simetrija – svarbi tema, reikšminga menui ir gamtai. Matematika gyva jos syvais, ir būtų sunku rasti objektą, kuris geriau atskleistų, kaip veikia matematinis intelektas.*

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

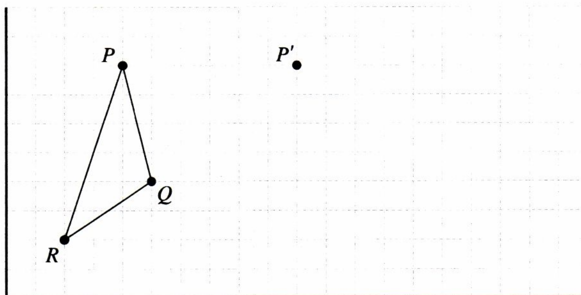


apmušalų raštas
atspindys
atspindžio ašis
atspindžio simetrija
ekvivalentūs standieji judesiai
judesio simetrija
juostų raštas
nejudamasis taškas
netikrinis standusis judesys
pagrindiniai standieji plokštumos judesiai
postūmio simetrija
postūmio vektorius
postūmis
posūkio simetrija
posūkis
raštas
rašto tipas
slenkamasis atspindys
slenkamojo atspindžio simetrija
standusis judesys
tapatusis judesys
tikrinis standusis judesys
vaizdas

PRATIMAI

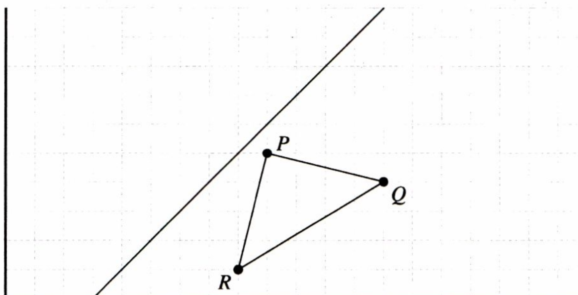
Apšilimas

1. Paveikslėlyje parodytas atspindys, kuris tašką P perkelia į tašką P'.



Raskite a) atspindžio ašį; b) tašką Q' (Q vaizdą) po atspindžio; c) trikampio PQR vaizdą po atspindžio.

2. Duotas atspindys, kurio ašį matome paveikslėlyje.



Raskite a) tašką P' (P vaizdą); b) trikampio PQR vaizdą.

3. Šio pratimo atsakymų kampus imkite tarp 0° ir 360°.

a) Posūkis pagal laikrodžio rodyklę 500° kampu ekvivalentus posūkiui pagal laikrodžio rodyklę .... kampu.

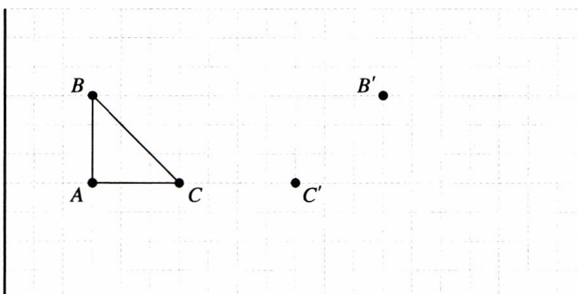
b) Posūkis pagal laikrodžio rodyklę 3681° kampu ekvivalentus posūkiui prieš laikrodžio rodyklę .... kampu.

4. Šio pratimo atsakymų kampus imkite tarp 0° ir 360°.

a) Posūkis pagal laikrodžio rodyklę 500° kampu ekvivalentus posūkiui prieš laikrodžio rodyklę .... kampu.

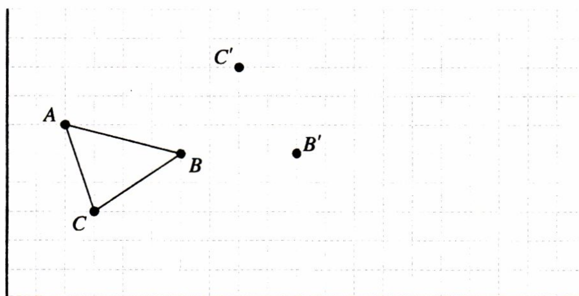
b) Posūkis pagal laikrodžio rodyklę 3681° kampu ekvivalentus posūkiui pagal laikrodžio rodyklę .... kampu.

5. Paveikslėlyje parodytas posūkis, kuris tašką B perkelia į tašką B', o tašką C – į tašką C'.



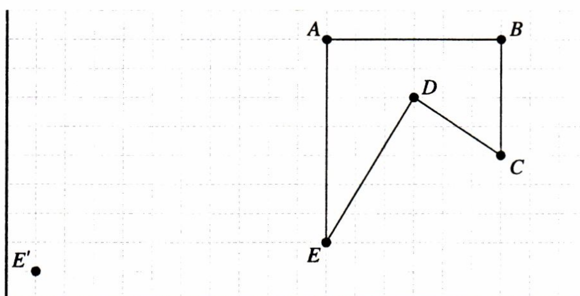
Raskite a) posūkio centrą; b) trikampio ABC vaizdą po posūkio.

6. Paveikslėlyje parodytas posūkis, kuris tašką B perkelia į tašką B', o tašką C – į tašką C'.



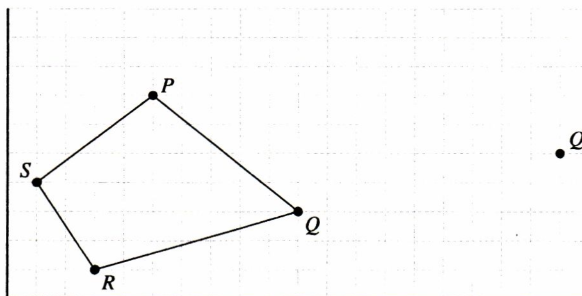
Raskite a) posūkio centrą; b) trikampio ABC vaizdą po posūkio.

7. Paveikslėlyje parodytas postūmis, kuris tašką E perkelia į tašką E'.



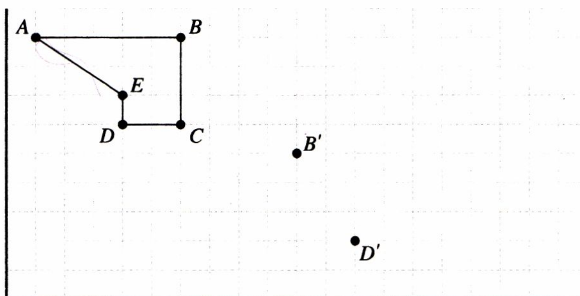
Raskite a) taško A vaizdą A'; b) figūros $ABCDE$ vaizdą po postūmio.

8. Paveikslėlyje parodytas postūmis, kuris tašką Q perkelia į tašką Q'.



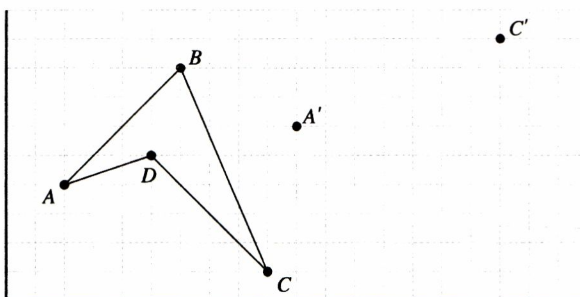
Raskite a) taško P vaizdą P'; b) figūros $PQRS$ vaizdą po postūmio.

9. Paveikslėlyje parodytas slenkamasis atspindys, kuris tašką B perkelia į tašką B', o tašką D – į D'.



Raskite a) slenkamojo atspindžio ašį; b) taško A vaizdą A', atlikus slenkamąjį atspindį; c) figūros $ABCDE$ vaizdą, atlikus slenkamąjį atspindį.

10. Paveikslėlyje parodytas slenkamasis atspindys, kuris tašką A perkelia į tašką A', o tašką C – į C'.



Raskite a) slenkamojo atspindžio ašį; b) taško B vaizdą B', atlikus slenkamąjį atspindį; c) figūros $ABCD$ vaizdą, atlikus slenkamąjį atspindį.

11. Nurodykite kiekvieno pateikto simbolio visas simetrijas (tapačiosios simetrijos minėti nereikia).
a) A; b) D; c) +; d) Z; e) Q.

12. Nurodykite visas šių figūrų simetrijas (be tapačiosios): a) lygiakraštis trikampis; b) kvadratas; c) stačiakampis; d) lygiagretainis (bet ne stačiakampis); e) apskritimas.

13. Nurodykite lotyniškosios abėcėlės didžiąsias raides, turinčias tokias simetrijas: a) tik horizontalųjį atspindį; b) tik vertikalųjį atspindį; c) horizontalųjį ir vertikalųjį atspindžius; d) 180° posūkį, bet ne atspindį; e) tik tapačiąją simetriją ir jokios kitos.

14. Surašykite visus skaitmenis (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), turinčius tokias simetrijas: a) horizontalųjį atspindį; b) vertikalųjį atspindį; c) horizontalųjį ir vertikalųjį atspindžius; d) 180° posūkį.

15. a) Nurodykite figūrą, turinčią 120° posūkio simetriją, ir tris skirtingas atspindžio simetrijas.
b) Nurodykite figūrą, turinčią 120° posūkio simetriją, bet *neturinčią* atspindžio simetrijos.

16. a) Nurodykite figūrą, turinčią 45° posūkio ir atspindžio simetrijas.
b) Nurodykite figūrą, turinčią 45° posūkio simetriją, bet *neturinčią* atspindžio simetrijos.

17. Nurodykite visas kiekvieno juostų rašto simetrijas:

a) ···
b) ···
c) ···

18. Nurodykite visas kiekvieno juostų rašto simetrijas:

a) ···
b) ···
c) ···

19. Nurodykite visas kiekvieno juostų rašto simetrijas:

a) ··· A A A A A A A A ···
b) ··· D D D D D D D D ···

20. Nurodykite visas kiekvieno juostų rašto simetrijas:

a) ··· S S S S S S S S ···
b) ··· L L L L L L L L L ···

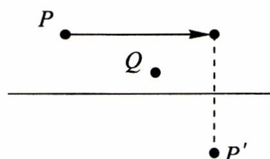
Treniruotė

21. a) Pirmo posūkio centras yra taškas C, ir sukama 30° kampu pagal laikrodžio rodyklę, o antro posūkio centras – vėl C, ir sukama 50° kampu pagal laikrodžio rodyklę. Įrodykite, kad po pirmojo posūkio atlikus antrąjį, rezultatas bus ekvivalentus 80° posūkiui apie centrą C pagal laikrodžio rodyklę.

b) Įrodykite, kad jeigu pirmo posūkio centras yra C, ir sukama α laipsnių kampu pagal laikrodžio rodyklę, o antro posūkio centras yra C, ir sukama β laipsnių kampu pagal laikrodžio rodyklę, tai abiejų posūkių rezultatas yra ekvivalentus posūkiui $\alpha + \beta$ laipsnių kampu apie centrą C pagal laikrodžio rodyklę.

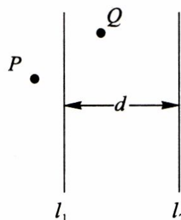
c) Įrodykite, kad jeigu punkto b) pirmąjį posūkį atliksime po antrojo, tai rezultatas bus ekvivalentus ankstesniam.

22. a) Duotas slenkamasis atspindys, kurio ašis ir slinkties vektorius parodyti žemiau. Raskite taško Q vaizdą Q'', jei slenkamąjį atspindį kartojame du kartus.



b) Įrodykite, kad slenkamąjį atspindį atlikus du kartus, rezultatas bus ekvivalentus postūmiui. Išreikškite to postūmio kryptį ir dydį slenkamojo atspindžio kryptimi ir dydžiu.

23. Pirmo atspindžio ašis yra l_1, antro atspindžio ašis yra l_2, be to, l_1 ir l_2 yra lygiagrečios, o atstumas tarp jų yra d.

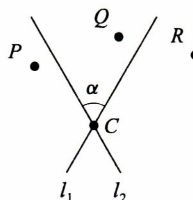


a) Raskite taškų P ir Q vaizdus, kai antrasis atspindys atliekamas po pirmojo atspindžio.

b) Įrodykite, kad po pirmojo atspindžio atlikę antrąjį, gausime postūmį. Nurodykite to postūmio kryptį ir dydį.

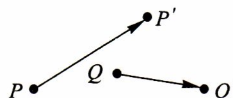
c) Įrodykite, kad, atlikę antrąjį atspindį po pirmojo, gauname *ne* tą patį, kaip atlikę pirmąjį atspindį po antrojo. Koks bus skirtumas?

24. Pirmo atspindžio ašis yra l_1, antro atspindžio ašis yra l_2, be to, l_1 ir l_2 susikerta taške C, o kampas tarp l_1 ir l_2 yra α.



a) Raskite taškų P, Q ir R vaizdus, kai antrasis atspindys atliekamas po pirmojo atspindžio.
b) Įrodykite, kad, atlikę po pirmojo atspindžio antrąjį, turėsime posūkį apie centrą C. Nurodykite to posūkio kampą pagal laikrodžio rodyklę.
c) Įrodykite, kad po antrojo atspindžio padarę pirmąjį gauname kitokį posūkį, negu atveju a). Koks bus skirtumas?

25. Pirmas postūmis tašką P perkelia į tašką P', o antras postūmis tašką Q perkelia į tašką Q', kaip parodyta žemiau.



a) Raskite taškų P ir Q vaizdus, kai antrasis postūmis atliekamas po pirmojo.
b) Raskite taškų P ir Q vaizdus, kai pirmasis postūmis atliekamas po antrojo.
c) Įrodykite, kad, atlikus antrąjį postūmį po pirmojo, jų rezultatas yra postūmis. Geometriškai apibūdinkite postūmio vektorių.

26. a) Raskite visas taisyklingojo penkiakampio atspindžio simetrijas.
b) Raskite visas taisyklingojo šešiakampio atspindžio simetrijas.
c) Aprašykite visas taisyklingojo N-kampio atspindžio simetrijas.

27. Aprašykite visas kiekvieno juostų rašto simetrijas:

a) ··· MOWMOWMO ···

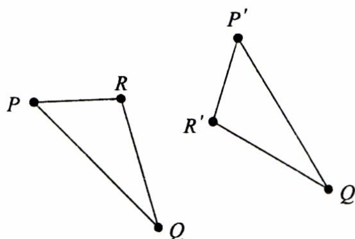
b) ··· p d p d p d ···

c) ··· p d b q p d b q ···

28. Kiekvienai simetrijų aibei pateikite pavyzdį figūros, turinčios būtent tokias simetrijas (nei daugiau, nei mažiau). (*Nurodymas.* Nesinaudokite 27 pratimo pavyzdžiais. Kurdami raštus, naudokitės abėcėlės raidėmis, skaitmenimis ar simboliais.)

a) Vien postūmiai.
b) Postūmiai ir vertikalieji atspindžiai.
c) Postūmiai ir horizontalieji atspindžiai.
d) Postūmiai ir posūkiai 180° kampu.
e) Postūmiai ir slenkamieji atspindžiai.
f) Postūmiai, vertikalieji atspindžiai, slenkamieji atspindžiai ir 180° posūkiai.
g) Postūmiai, vertikalieji atspindžiai, horizontalieji atspindžiai ir 180° posūkiai.

29. Standusis judesys trikampį PQR atvaizduoja į trikampį $P'Q'R'$, kaip parodyta žemiau.



a) Paaiškinkite, kodėl šis standusis judesys nėra posūkis ar postūmis. (*Nurodymas.* Nustatykite ar šis standusis judesys yra tikrinis.)
b) Paaiškinkite, kodėl šis standusis judesys nėra atspindys.
c) Koks gi čia yra standusis judesys?

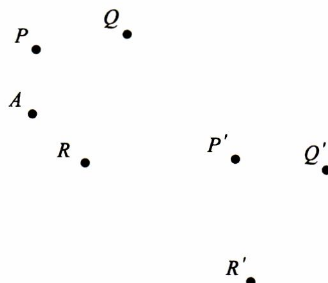
30. *Palindromu** vadiname žodį, kuris perskaitomas taip pat, ar jį skaitysime įprastai, ar atvirkščiai. LAL yra palindromas, kaip ir ABBA. (Kad būtų paprasčiau, imsime tik didžiąsias raides.)

a) Kodėl žodis, turintis vertikaliąją atspindžio ašį, yra palindromas?
b) Nurodykite kitų palindromų, neturinčių vertikaliosios atspindžio simetrijos.
c) Jei palindromas turi vertikaliąją atspindžio simetriją, ką galima pasakyti apie atskirų žodžio raidžių simetrijas?
d) Raskite palindromą, turintį 180° posūkio simetriją.

* Iš graikiško žodžio *palindromos* – grįžtantis, einantis atgal.

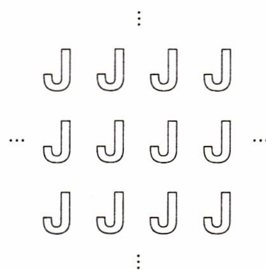
Varžybos

31. Tarkime, kad standusis judesys tašką P perkelia į P', tašką Q – į Q' ir tašką R – į R' (kaip paveikslėlyje). Mes nežinome, kokios rūšies šis standusis judesys.

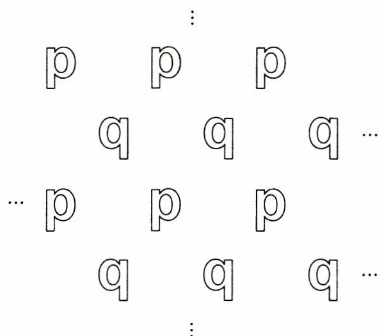


a) Raskite bet kurio plokštumos taško A vaizdą A'. (*Nurodymas.* $AP = A'P'$, $AQ = A'Q'$ ir $AR = A'R'$.)
b) Aprašykite bendrą metodą, kaip rasti taško A vaizdą, jei žinome tris vienoje tiesėje nesančius taškus P, Q ir R bei jų vaizdus P', Q' ir R'.

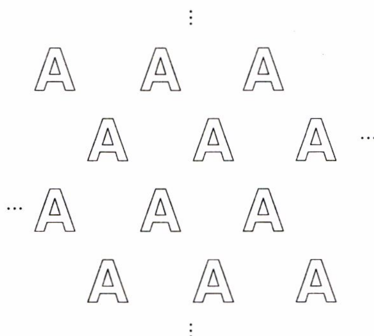
32. Raskite visas parodyto apmušalų rašto simetrijas.



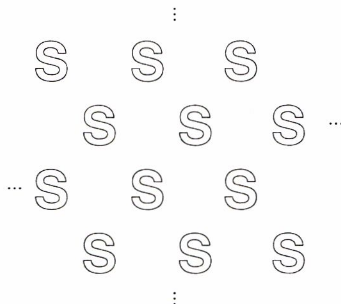
33. Raskite visas parodyto apmušalų rašto simetrijas.



34. Raskite visas parodyto apmušalų rašto simetrijas.



35. Raskite visas parodyto apmušalų rašto simetrijas.



1 PRIEDAS. JUOSTŲ RAŠTŲ TIPAI

Šiame priede mes aprašysime ir parodysime septynis galimus skirtingus raštų tipus. Yra keletas skirtingų būdų juos klasifikuoti. Mūsų pasirinktu būdu naudojamasi standartiniais kristalografijos žymėjimais.

Pradėkime nuo to fakto, kad kiekvienas juostos raštas turi postūmio rašto kryptimi simetriją. Toliau juostų raštus skirstysime į dvi kategorijas:

- m **kategorija.** Raštas turi vertikalųjį atspindį (primename, kad tai reiškia atspindį rašto krypčiai statmena kryptimi).
- **1 kategorija.** Raštas neturi vertikaliojo atspindžio.

m kategorijos yra trys galimybės:

- $m1$**.** Postūmiai, vertikalieji atspindžiai ir daugiau nieko.
- mg**.** Postūmiai, vertikalieji atspindžiai, slenkamieji atspindžiai ir 180° posūkiai.
- mm**.** Postūmiai, vertikalieji atspindžiai, horizontalieji atspindžiai ir 180° posūkiai.

1 kategorijos yra keturios galimybės:

- **11.** Postūmiai ir daugiau nieko.
- **1*m*.** Postūmiai ir horizontalieji atspindžiai.
- **12.** Postūmiai ir 180° posūkiai.
- **1*g*.** Postūmiai ir slenkamieji atspindžiai.

Lentelėje parodyti septyni raštų tipai ir jų simetrijos.

Kodėl tegalimi tik šie atvejai? Tiksliai neįrodinėdami, pabandykime suvokti, kaip tai būtų galima padaryti. Tam reikėtų peržiūrėti visus simetrijų darinius ir atmesti neįmanomus. Imkime, pavyzdžiui, darinį, kuris susideda iš postūmių, vertikaliųjų atspindžių ir horizontaliųjų atspindžių. Toks darinys neįmanomas, nes vertikalus atspindys ir horizontalus atspindys, atlikti vienas po kito, duoda posūkį 180° laipsnių kampu (ir todėl raštas turi būti *mm* tipo). Panašiai galima įrodyti, kad bet kuris kitas, į sąrašą neįtrauktas darinys yra neįmanomas. (Kai kuriems dariniams tai padaryti būtų kiek sunkiau, negu ką tik išnagrinėtam.)

Tipai	Postūmis	Horizontalusis atspindys	Vertikalusis atspindys	Posūkis 180° kampu	Slenkamasis atspindys	Pavyzdžiai
11	✓					… …
1*m*	✓	✓				… …
*m*1	✓		✓			… …
12	✓			✓		… …
1*g*	✓				✓	… …
mg	✓		✓	✓	✓	… …
mm	✓	✓	✓	✓		… …

2 PRIEDAS. APMUŠALŲ RAŠTŲ TIPAI

Šiame priede mes tik pateiksime visus 17 apmušalų raštų tipų, naudodamiesi standartiniais kristalografijos žymėjimais.

Tipas	Postūmis	Posūkiai				Atspindžiai (Krypčių skaičius)					Slenkamieji atspindžiai (Krypčių skaičius)					Pavyzdžiai
		60°	90°	120°	180°	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	
p2gg	✓				✓	✓					✓					
*p*211	✓				✓							✓				
p2mg	✓				✓											
p4mm	✓		✓		✓				✓			✓				
p4gm	✓		✓		✓		✓							✓		
p4	✓		✓		✓											

Tipas	Postūmis	Posūkiai				Atspindžiai (Krypčių skaičius)					Slenkamieji atspindžiai (Krypčių skaičius)					Pavyzdžiai
		60°	90°	120°	180°	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	
*c*1*m*1	✓					✓					✓					
*p*1*m*1	✓					✓										
*p*1*g*1	✓										✓					
*p*1	✓															
*p*2*mm*	✓				✓		✓									
*c*2*mm*	✓				✓		✓					✓				

Tipas	Postūmis	Posūkiai				Atspindžiai (Krypčių skaičius)					Slenkamieji atspindžiai (Krypčių skaičius)					Pavyzdžiai
		60°	90°	120°	180°	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	
*p3m*1	✓			✓				✓				✓				
*p*31*m*	✓			✓				✓				✓				
*p*3	✓			✓												
p6mm	✓	✓		✓	✓					✓					✓	
*p*6	✓	✓		✓	✓											



Mastelio simetrija ir fraktalai

Gamta – tai besikeičiantis debesis, visada ir niekada toks pat.

R. V. EMERSONAS (RALPH WALDO EMERSON)

Fraktalų kalba

11 skyriuje mes aptarėme *judesio simetrijos sąvoką* – tokį formų, objektų ar raštų bruožą, kai jie po įvairių judesių atrodo kaip atrodę. Judesio simetrija yra įprastinis simetrijos įsivaizdavimo būdas, o kasdienybėje judesio simetriją vadiname tiesiog simetrija, tarsi tik tokia ir tebūtų. Iš tikrųjų taip nėra.

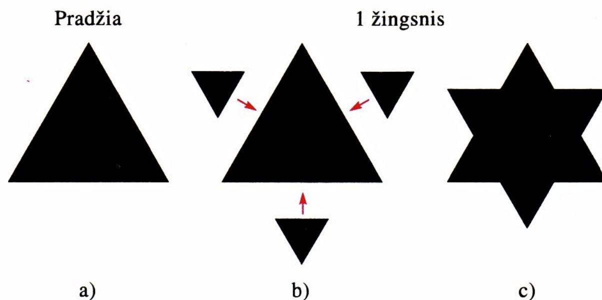
Šiame skyriuje supažindinsime su kitokia, netradicine, šiek tiek egzotiškesne simetrijos rūšimi, vadinama *mastelio simetrija*. Ja naudosimės, nagrinėdami nuostabius geometrinius objektus, vadinamus *fraktalais*. Fantastiniai geometriniai dariniai, su kuriais susipažinsime nagrinėdami mastelio simetriją, nepanašūs į nieką, ką galime įsivaizduoti, turėdami vien tik elementariosios geometrijos patirtį.

Mastelio simetrijos apibrėžimą motyvuosime keliais parengiamaisiais pavyzdžiais.

KOCH SNAIGĖ

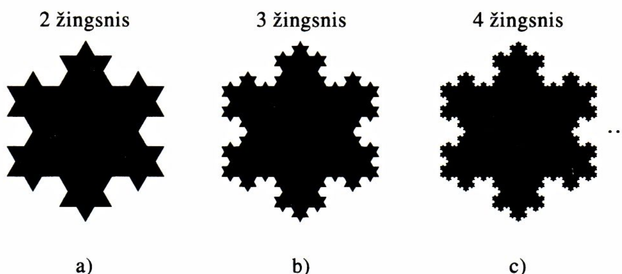
Koch snaigė yra nuostabus geometrinis objektas, kurį 1904 metais atrado švedų matematikė H. fon Koch (Helge von Koch). Koch snaigė konstruojama taip:

- **Pradžia.** Pradedama nuo bet kokio dydžio juodo lygiakraščio trikampio. Kad būtų paprasčiau, laikysime, kad trikampio kraštinių ilgiai yra vienetiniai, o trikampio plotą žymėsime raide A.
- **1 žingsnis.** Kiekvieną trikampio kraštinę dalijame į tris lygias dalis. Prie kiekvienos kraštinės vidurinės dalies prijungiame mažą juodą lygiakraštį trikampį (12.1 b) pav.). Gautasis žvaigždės formos objektas turi 12 kraštinių, ir kiekvienos ilgis yra 1/3 (12.1c) pav.).



12.1 pav.

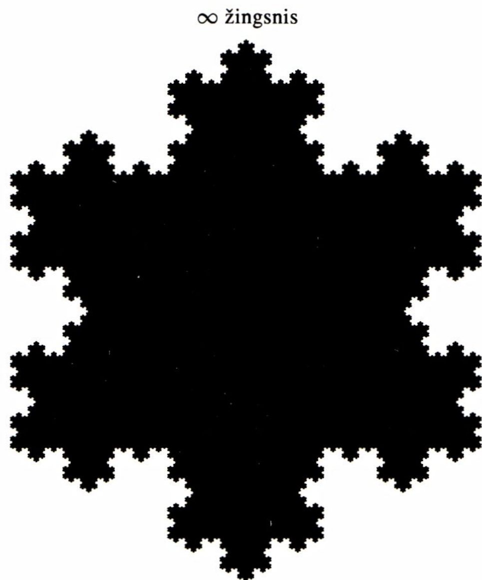
- **2 žingsnis.** Kiekvienai iš dvylikos 12.1 c) paveikslėlyje parodytų žvaigždės kraštinių kartojame tą pačią 1 žingsnyje aprašytąją procedūrą: kiekvieną kraštinę dalijame į tris lygias dalis ir prie kiekvienos kraštinės vidurinės dalies prijungiame juodą lygiakraštį trikampį. Gautoji figūra turi jau 48 kraštines, ir kiekvienos ilgis yra 1/9 (12.2 a) pav.).



12.2 pav.

- **3, 4 ir tolesni žingsniai.** Kartojame procesą (kraštines dalijame į tris lygias dalis, prie vidurinių dalių prijungiame atitinkamo dydžio juodą lygiakraštį trikampį) ir taip be galo (12.2 b), c) pav.).

Kiekvienas ką tik aprašytosios konstrukcijos žingsnis mus vis labiau ir labiau artina prie galutiniojo šios kelionės tikslo – pačios Koch snaigės (12.3 pav.).



12.3 pav.

Žinoma, nuovokus skaitytojas supras, kad 12.3 paveikslėlis – tai ne tikroji Koch snaigė, o tik gabi apsišaukėlė. Tikrajai Koch snaigei sudaryti reikėtų be galo daug žingsnių, todėl galutinis bei tobulas jos piešinys yra neįmanomas. Tačiau tai, jog mes negalime parodyti tikrojo snaigės piešinio, neturėtų atbaidyti nuo apytikslio vaizdavimo (taip darėme 12.3 pav.) ar nuo tokių brėžinių naudojimo jos matematinėms savybėms nagrinėti. (Prisiminkite, kaip vidurinėje mokykloje daug sužinojome apie kvadratus, trikampius ir apskritimus, nors mūsų brėžiniai toli gražu nebuvo tikslūs.)

Rekursinis procesas

Koch snaigės sudarymas yra **rekursinio proceso** pavyzdys. Tai toks procesas, kai kas žingsnį vėl ir vėl taikome tas pačias pagrindines taisykles, o kiekvieno žingsnio pabaiga tampa kito žingsnio pradžia (12.4 pav.). Rekursinio proceso sąvoka mums ne naujiena – su ja susidūrėme pirmajame skyriuje (rekursinis rikiavimo metodas), 9 skyriuje (Fibonačio skaičių apibrėžimas) ir 10 skyriuje (populiacijos augimo pērėjimo taisyklės). Šiame skyriuje rekursinio proceso objektai yra veikiau geometriniai dariniai, o ne skaičiai, tačiau ir čia pagrindiniai rekursijos principai visiškai panašūs.

Rekursija padeda labai veiksmingai aprašyti Koch snaigės sudarymą **rekursine keitimo taisykle**.

Rekursinė keitimo taisyklė Koch kreivei

- Turime juodą trikampį.
- Kur tik matome briauną ______, keičiame ją į ______.

Rekursinė taisyklė Fibonačio skaičiams

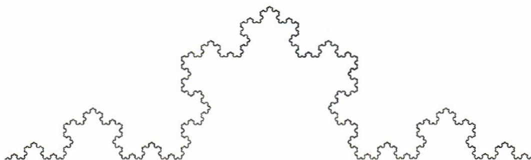
- Turime $F_1 = 1$ ir $F_2 = 1$.
- $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$ visiems $N > 2$.

12.4 pav. Du rekursinių procesų pavyzdžiai.

Jei pažiūrėtume į Koch kreivę geometrijos požiūriu, tai pastebėtume keletą labai keistų dalykų. Pradėkime nuo dviejų tipiškų tradicinės geometrijos klausimų – koks yra Koch snaigės perimetras ir koks jos plotas?

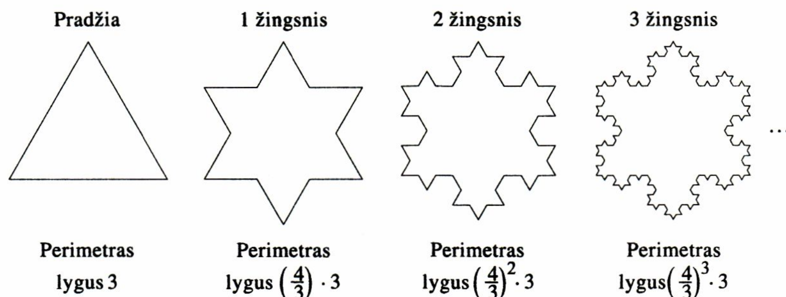
Koch snaigės perimetras

Koch snaigės kraštas yra ypač įdomus. Jis paprastai vadinamas **Koch kreive**, arba **snaigės kreive** (žr. 12.5 pav.).



12.5 pav. Koch kreivės dalis.

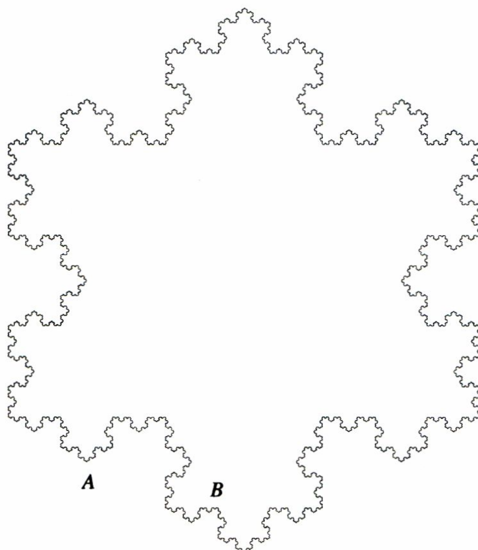
Koks yra Koch kreivės ilgis? 12.6 pav. parodyta, kas nutinka skaičiuojant kreivės ilgį per keletą pirmųjų sudarymo žingsnių.



12.6 pav.

Matome, kad perimetro augimo daugiklis yra 4/3. (10 skyriaus terminais, perimetras auga eksponentiškai, o augimo greitis yra 4/3.) Iš to išplaukia, kad Koch snaigės perimetras turi būti begalinis.

Koch snaigės krašto ilgis yra begalinis.



Perimetras yra begalinis

12.7 pav. Skruzdėlytei, mėginančiai tais kampais ir vingiais nusigauti iš taško A į tašką B, būtų sunku kiek daugiau pasistūmėti pirmyn.

Koch snaigės plotas

Koch snaigės plotas yra 1,6 karto didesnis už pradinio lygiakraščio trikampio plotą.

Šis teiginys tiesiog stulbina! Iš jo išplaukia, kad Koch snaigė turi baigtinį plotą, nors ir aptverta begalinio ilgio kreive – su tuo nelengva susitaikyti mūsų įprastinei geometrinei intuicijai. Aišku, kad tai ne kasdien besipainiojantis po kojomis geometrinis objektas!

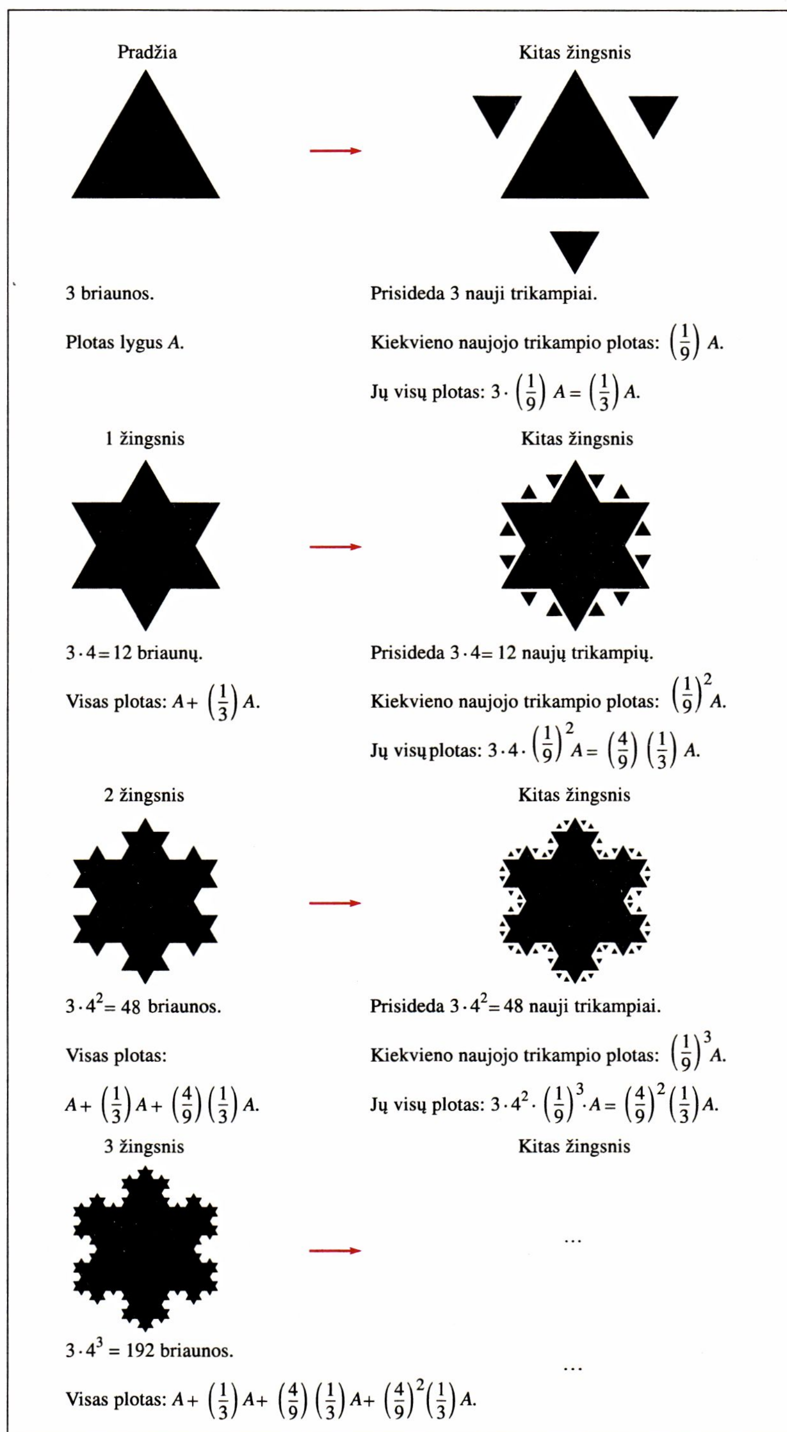
Norėdami įsitikinti, kad Koch snaigės plotas yra 1,6 karto didesnis už pradinio lygiakraščio trikampio plotą, turėsime truputį padirbėti, tačiau visos reikalingos priemonės yra po ranka. Todėl tepateiksime įrodymo metmenis, detales palikdami kaip pratimą skaitytojui.

Strategija, naudojama Koch snaigės plotui apskaičiuoti, būtų tokia:

- Rasti formulę, išreiškiančią N-tuoju sudarymo žingsniu gauto daugiakampio plotą.
- Nustatyti, kas bus su rastąja formule, kai N be galo didės.

12.8 pav. (kitame puslapyje) rodo, kaip keičiasi plotas, pereinant nuo vieno snaigės sudarymo žingsnio prie kito. Iš jo matome, kad po N žingsnių daugiakampio plotas būtų

$$A+\left(\frac{1}{3}\right)A+\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)A+\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)A+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)A$$


Pradžia
Kitas žingsnis
3 briaunos.
Plotas lygus A.
Prisideda 3 nauji trikampiai.
Kiekvieno naujojo trikampio plotas: $\left(\frac{1}{9}\right) A$.
Jų visų plotas: $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) A = \left(\frac{1}{3}\right) A$.
1 žingsnis
Kitas žingsnis
$3 \cdot 4 = 12$ briaunų.
Visas plotas: $A + \left(\frac{1}{3}\right) A$.
Prisideda $3 \cdot 4 = 12$ naujų trikampių.
Kiekvieno naujojo trikampio plotas: $\left(\frac{1}{9}\right)^2 A$.
Jų visų plotas: $3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 A = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) A$.
2 žingsnis
Kitas žingsnis
$3 \cdot 4^2 = 48$ briaunos.
Visas plotas:
$A + \left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) A$.
Prisideda $3 \cdot 4^2 = 48$ nauji trikampiai.
Kiekvieno naujojo trikampio plotas: $\left(\frac{1}{9}\right)^3 A$.
Jų visų plotas: $3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) A$.
3 žingsnis
Kitas žingsnis
...
$3 \cdot 4^3 = 192$ briaunos.
...
Visas plotas: $A + \left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) A$.

12.8 pav.

(A yra pradinio lygiakraščio trikampio plotas). Atskyrę pirmąjį narį, turime geometrinės progresijos narių sumą. Remdamiesi geometrinės progresijos narių sumos formule (10 skyrius), tą plotą galime užrašyti paprasčiau:

$$A+\left(\frac{3}{5}\right)A\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^N\right].$$

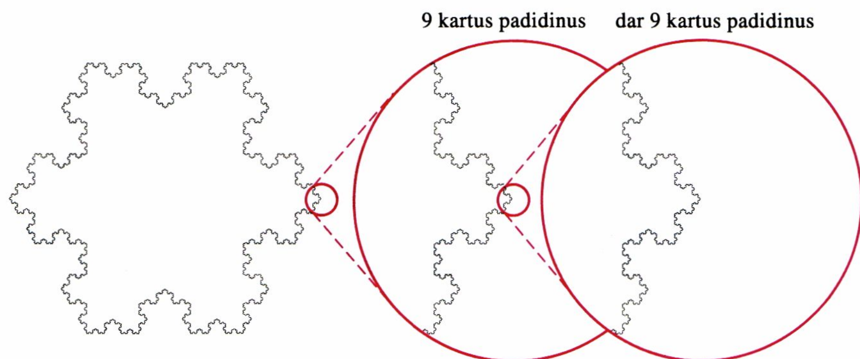
Detales paliekame patikrinti skaitytojui (žr. 24 pratimą).

Dabar jau esame pasirengę finišui. Reikia tik suvokti, kas gi atsitiks su dydžiu $(4/9)^N$, kai N vis didės ir didės. Iš tikrųjų, kas gi atsitiks su bet kuriuo teigiamu už vienetą mažesniu skaičiumi, kai jį kelsime vis didesniais laipsniais? Jei jūs žinote atsakymą, tai darbą baigėte. Jei ne, tai paimkite skaičiuoklį, įveskite tarp 0 ir 1 esantį skaičių ir vis dauginkite jį iš jo paties. (Jūs greitai įsitikinsite, kad rezultatas vis labiau ir labiau artėja prie 0.) Išvada būtų tokia: N vis didėjant, laužtiniuose skliausteliuose esanti išraiška vis labiau ir labiau artėtų prie 1, ir todėl srities plotas vis labiau ir labiau artėtų prie $1{,}6A$.

Mastelio simetrija

Tarkime, kad mus dar ne visai įtikino tai, kas buvo pasakyta apie Koch snaigę ir Koch kreivę, ir norėtume pasižiūrėti į jas atidžiau. Į ką gi panašios smulkesnės kreivės dalys? 12.9 pav. mes matome devynis kartus padidintą Koch kreivės dalį ir dar mažesnę, vėl devynis kartus padidintą tos dalies dalį. Kad ir kiek tą didinimą tęstume, niekas nepasikeis. Kad ir kiek bepersukinėtume mūsų įsivaizduojamąjį mikroskopą, vis matysime tą patį vaizdą!

Ši nuostabi Koch kreivės savybė yra vadinama **mastelio simetrija** (arba kartais **panašumu į save**). Kaip galime suprasti iš pavadinimo, tai skirtingų mastelių simetrija, – simetrija tarp didelio ir mažo, tarp mažo ir dar mažesnio. Todėl kai sakome, kad Koch kreivė pasižymi mastelio simetrija, tai reiškia, kad bet kuri jos dalelė gali būti surasta kitame padidinimo lygmenyje ir kad apibrėžiantysis elementas __/__ yra begalinėje daugybėje mastelių.



12.9 pav.

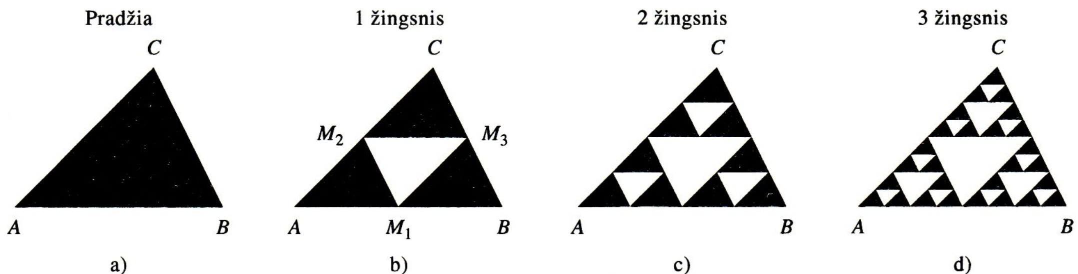
Prieš tęsiant toliau, derėtų pasakyti dar kelis žodžius. Tarkime, kad norėtume tikroviško geometrinio labai vingiuotos jūros kranto dalies (tarkime, kažko panašaus į Skandinavijos fiordus) aprašymo. Mums būtų sunku rasti tradicinį geometrijos kontūrą, perteikiantį tokį kranto linijos vaizdą, kaip kad Koch kreivės dalis. Koch snaigė ir jos kraštas – Koch kreivė – nėra kažkokia matematinė keistenybė, bet veikiau labai patogus matematinis gamtoje esamų formų (tokių kaip kranto linija) aprašymas.

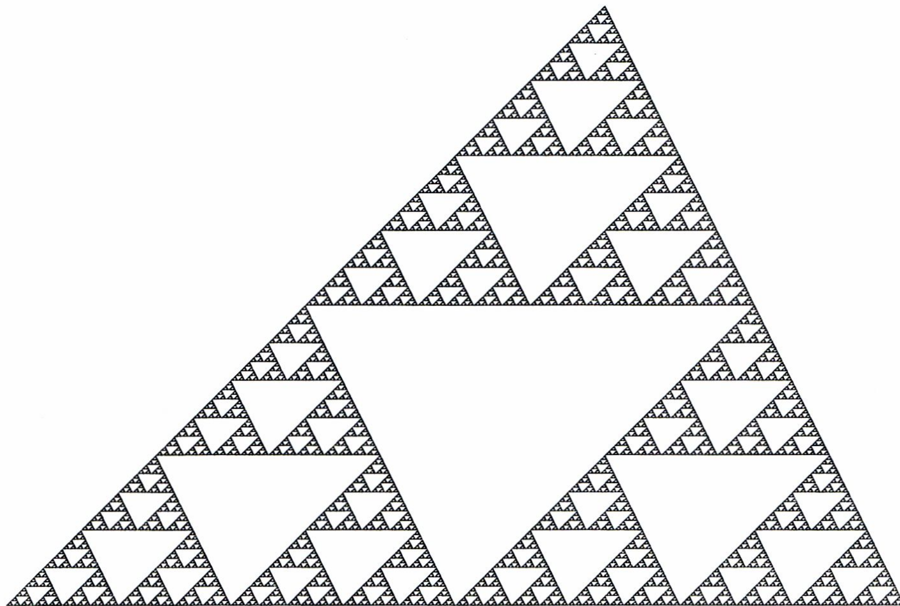
SIERPINSKIO NĖRINYS

Šią konstrukciją pirmasis pasiūlė (truputėlį kita forma) lenkų matematikas V. Sierpinskis (Wacław Sierpiński) apie 1915 metus. Čia rekursinė konstrukcija yra labai panaši į Koch snaigę. Ir ji prasideda nuo juodo trikampio, kaip ir Koch snaigės atveju, tik čia pradinis juodas trikampis nebūtinai lygiakraštis – tinka bet kuris juodas trikampis (12.10 a) pav.). Šioje konstrukcijoje, užuot *pridėję* mažesnes pradinio trikampio kopijas, jas *pašaliname* iš pradinio trikampio tokiu būdu:

- **Pradžia.** Imame bet kurį juodą trikampį ABC.
- **1 žingsnis.** Sujungiame kraštinių AB, AC ir BC vidurio taškus M_1, M_2 ir M_3. Turime keturis trikampius (AM_1M_2, BM_1M_3, CM_2M_3 ir *vidurinįjį* trikampį $M_1M_2M_3$, kaip matome 12.10 b) pav.). Kiekvienas iš tų keturių trikampių yra panašus į pradinį (žr. 1 pratimą). Dabar pašaliname vidurinį trikampį $M_1M_2M_3$ ir padarome pradiniame trikampyje baltą tuštumą. Jei vidurinio trikampio $M_1M_2M_3$ vidų pavadintume trikampio ABC *širdimi*, tai galėtume pavartoti žiaurią, bet tinkamą metaforą – mes „išpjauname trikampio širdį“!
- **2 žingsnis.** Išpjauname širdį kiekvienam iš trijų po pirmo žingsnio likusiųjų juodų trikampių. Liekame su 9 juodais trikampiais (visi panašūs į pradinį trikampį ABC) ir 4 baltomis trikampėmis tuštumomis (12.10 c) pav.).
- **3, 4 ir tolesni žingsniai.** Procesą kartojame (išpjauname kiekvieno juodojo trikampio širdį) be galo.

12.10 pav.





12.11 pav. Sierpinskio nėrinys.

Padarę be galo daug šios rekursinės konstrukcijos žingsnių, gausime keistą geometrinį šveicarišką sūrį, vadinamą **Sierpinskio nėriniu** (12.11 pav.)

Dar kartą pabrėšime, kad 12.11 pav. yra tik Sierpinskio nėrinio artinys. Mažyčiai juodi trikampėliai, kuriuos matome, yra gryna regimybė bei spausdinimo kokybės trūkumas. Sierpinskio nėrinys neturi jokių ištisinių juodų trikampėlių! Jeigu padidintume bet kurį iš šių tariamai juodų trikampėlių, tai matytume tikslią kopiją to, ką matome 12.11 pav. (žr. 12.12 pav.). Mes jau esame įvardiję šį nepaprastą reiškinį – Sierpinskio nėrinys turi mastelio simetriją.

Kaip ir Koch snaigę, taip ir Sierpinskio nėrinį galima labai patogiai aprašyti rekursine keitimo taisykle.

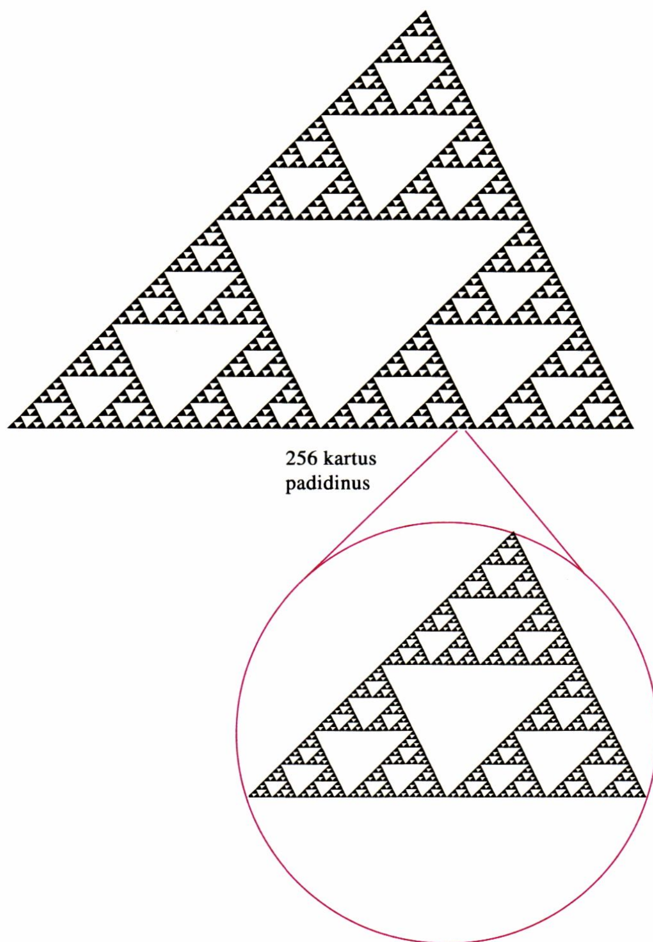
Rekursinė keitimo taisyklė Sierpinskio nėriniui

- Imame bet kurį juodą trikampį .
- Kur tik matome , pakeičiame į .

Toliau pateikiamus du faktus paliekame patikrinti skaitytojui:

- Sierpinskio nėrinys turi nulinį plotą (žr. 3 pratimą).
- Sierpinskio nėrinys turi be galo ilgą kraštą (dabar mūsų jau niekas nebestebina! – žr. 4 pratimą).

47. – 76



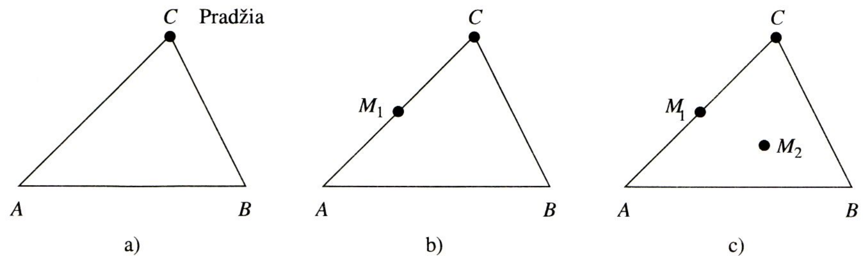
12.12 pav.

CHAOSO ŽAIDIMAS

Šiame pavyzdyje tinka bet koks trikampis ABC ir lošimo kauliukas. Kiekvienai trikampio viršūnei priskirkime dvi iš šešių galimų kauliuko metimo baigčių – tarkime, viršūnei A priskiriame skaičius 1 ir 2, B priskiriame 3 ir 4, o C – 5 ir 6 (mūsų tikslas – kad kiekviena viršūnė turėtų vienodą tikimybę būti pasirinkta; žinoma, užuot mėtę kauliuką, mes galėtume ir traukti iš kepurės ant kortelių parašytas raides A, B ir C). Dabar jau esame pasirengę žaisti.

- **Pradžia.** Ridename kauliuką. Pažymime viršūnę, atitinkančią atvirtusį skaičių. Tarkime, kad iškrito 5 – tada pažymime viršūnę C (12.13 a) pav.). Tai mūsų išeities viršūnė.
- **1 žingsnis.** Vėl ridename kauliuką. Tarkime, kad atvirto 2 (taigi išsirenkame viršūnę A). Pažymime tašką M_1, esantį pusiaukelėje tarp išeities viršūnės C ir naujosios viršūnės A (12.13 b) pav.).

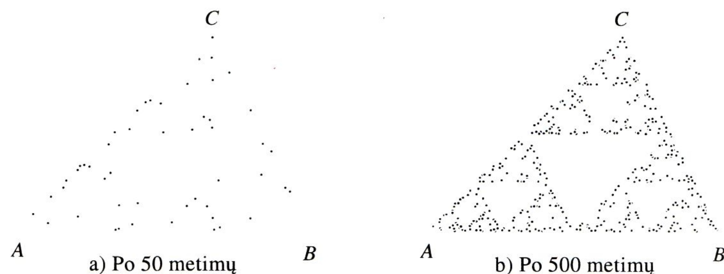
- **2 žingsnis.** Vėl ridename kauliuką. Pažymime tašką M_2, esantį pusiaukelėje tarp buvusiojo taško M_1 ir naujai išsirinktos viršūnės. Jei atvirstų, sakykime, 3, tai pažymėtume pusiaukelės tarp M_1 ir B tašką – M_2 (12.13 c) pav.).
- **3, 4 ir tolesni žingsniai.** Tęsiame šį chaoso žaidimą iki begalybės, kiekvieną kartą pažymėdami pusiaukelės tašką tarp buvusiojo pusiaukelės taško ir naujai išsirinktos viršūnės.



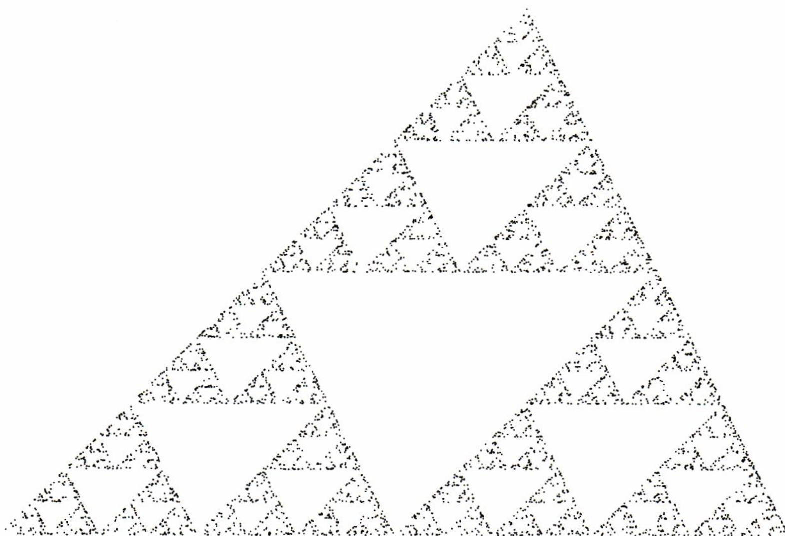
12.13 pav. Chaoso žaidimas po trijų kauliuko metimų.

Kokį gi paveikslą sukuria chaoso žaidimas? 12.14 a) pav. rodo, kas išėjo po pirmųjų 50 kauliuko metimų – išmėtytų taškų spiečius. 12.14 b) pav. rodo, kas išėjo po 500 kauliuko metimų, ir mums ima ryškėti neaiškūs kažkokio pažįstamo vaizdo kontūrai. 12.15 pav. parodyta, kas išėjo po 5000 kauliuko metimų – tai neabejotinai Sierpinskio nėrinys! Mes neberodysime, kokį vaizdą gautume po milijardo metimų, nes 12.11 pav. labai į jį panašus.

Tai gana nelauktas įvykių posūkis – chaoso žaidimą valdo kauliuko ridenimas, taigi atsitiktinumo dėsniai. Atrodytų, kad neįmanoma numatyti, koks susidarys paveikslas, o iš tikrųjų pasirodo visiškai aiškus vaizdas. Čia nėra jokių „jeigu“ ar „bet“ – kuo ilgiau jūs žaidžiate chaoso žaidimą, tuo arčiau Sierpinskio nėrinio jūs esate!



12.14 pav.



Po 5000 metimų

12.15 pav.

Taigi, chaoso žaidimas leidžia mums kitaip sukurti Sierpinskio nėrinį. Nors šis procesas taip pat rekursinis, čia dar prisideda atsitiktinumo elementas.

MASTELIO SIMETRIJA MENE IR LITERATŪROJE

Mastelio simetrijos samprata, gimstanti iš Koch snaigės ar Sierpinskio nėrinio, nėra būdinga tik matematikai ar geometrijai. Savais būdais savo tikslams ją naudojo menininkai, poetai, rašytojai ir netgi filosofai. Šiame skyrelyje mes tik trumpai paminėsime keletą tokių pavyzdžių.

12.16 pav. yra tipiška meninė mastelio simetrijos išraiška. Šiame paveikslėlyje matome dailininką, tapantį autoportretą. Tapomame paveiksle yra toks pat vaizdas – dailininkas tapo autoportretą, ir taip iki begalybės. Kaip ir ankstesniuose mūsų pavyzdžiuose, paveikslėlyje slypi rekursinė procedūra, kurią iš tikrųjų galėtume labai tiksliai aprašyti geometrine kalba – turime paveikslėlį, kuriame yra dailininkas, molbertas, paletė, teptukas ir kita (viskas, išskyrus patį paveikslą), o tą paveikslą reikia sumažinti ir pastumti taip, kad jis atsidurtų pradiniame paveikslėlyje esančiame molberte. Jeigu vis kartotume šį procesą, tai gautume 12.16 pav. parodytą rezultatą.

Kaip ir kitais meniniais mastelio simetrijos perteikimo atvejais, taip ir 12.16 pav. mastelio simetrija yra tik iliuzinė – laikoma, kad rekursinis procesas tęsiasi be galo, nors šiuo atveju jis baigiasi po keturių žingsnių. (Menininkas galų gale turi ir kitų darbų.) Tačiau impulsas neabejotinas – emociškai visi sutinkame, kad rekursija tęsiasi be galo, nors ir žinome, kad iš tikrųjų procesas kažkur turi sustoti.



12.16 pav.

Išradingų meninių mastelio simetrijos pavyzdžių galima rasti olandų dailininko M. Ešerio (M. C. Escher) darbuose bei literatūriniuose tokių skirtingų rašytojų, kaip L. Kerolio (Lewis Carroll) ar A. Hekslio (Aldous Huxley) kūriniuose. Net filosofai mąstė apie mastelio simetriją. Vokiečių matematikas ir filosofas G. Leibnicas (G. W. Leibniz) tikėjo, kad kiekviename vandens lašelyje glūdi ištisas pasaulis, turintis visus mūsų pasaulio elementus (įskaitant, žinoma, ir daugybę kitų vandens lašelių).

Šį skyrelį baigsime Dž. Svifto (Jonathan Swift) eilėraščiu. Jo tema, be abejo, yra mastelio simetrija.

Ir mato gamtininkas, kaip jo blusą
Apstoja mažosios bluselės,
O šias dar daug smulkesnės kanda . . .
Ir jokio galo tam nėra.

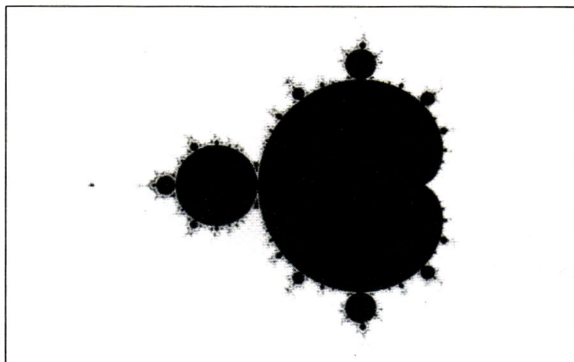
MANDELBROTO AIBĖ

Dabar panagrinėsime matematiškesnį pavyzdį. Šiam pavyzdžiui reikalingos matematinės žinios kiek pranoksta šios knygos lygį (reikėtų būti susipažinus su *kompleksiniais skaičiais*), todėl bendrąją idėją perteiksime paprastais, gal kartais net per daug paprastais žodžiais. Tikrasis šio pavyzdžio tikslas yra ne matematinės smulkmenos, bet noras parodyti vieną svarbų, dar nematytą mastelio simetrijos atvejį. Be to, tai bus gera dingstis susipažinti su keliais neįtikėtinai egzotiškais vaizdais.

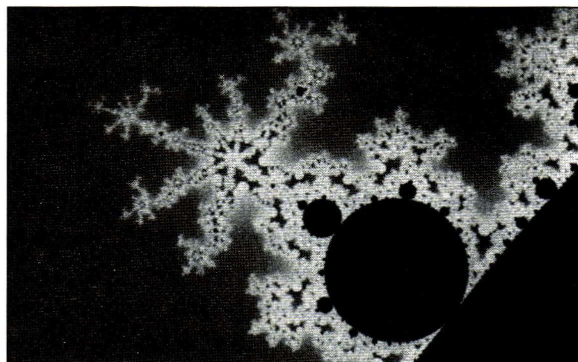
Mandelbroto aibė yra taip pavadinta gerai žinomos kompiuterius gaminančios firmos IBM bendradarbio ir Jeilio (Yale) universiteto profesoriaus B. Mandelbroto (Benoit Mandelbrot) garbei*. Mandelbrotas buvo pirmasis, ėmęsis ją nagrinėti bei puikiai suvokęs šio nuostabaus ir sudėtingo matematinio objekto reikšmę.

12.17 pav.

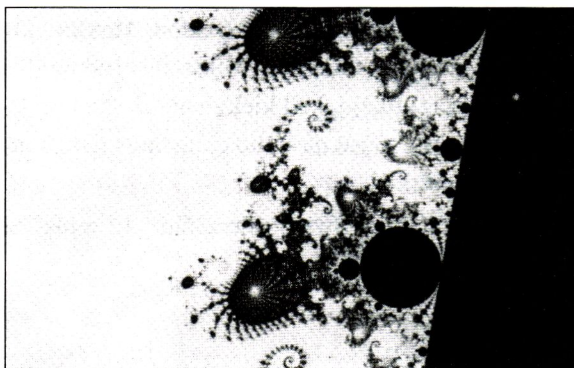
Konstrukcija, kurią tuoj aprašysime, kaip tik ir yra svarbus geometrinis darinys, vadinamas Mandelbroto aibe. 12.17 a) pav. parodytas juodai bal-



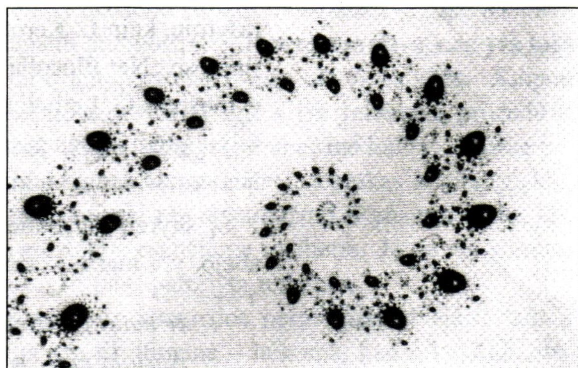
a)



b)



c)



d)

* Beje, jo tėvai gyveno Vilniuje. (Vertėjo pastaba.)

tas Mandelbroto aibės vaizdas. Daugumai žmonių Mandelbroto aibė yra truputį panaši į vabzdį – na, sakykime, į kitos planetos tarakoną. Mandelbroto aibę galima įsivaizduoti esant sudėtą iš kūno, galvos bei iš viršugalvyje styrančios antenos. Tiek galva, tiek ir kūnas apaugę įvairaus dydžio ataugomis. 12.17 a) pav. matome, kad didelės ataugos panašios (bet ne tokios pat) į pradinį objektą (vėl kūnas, galva ir antenos). Išdidinę vieną iš ataugų (12.17 b) pav.), galime aiškiai matyti visos pradinės bendrosios struktūros pakartojimą, įskaitant ataugų ataugas ir ataugėles. Kartu matome naujus ir įdomius darinius, tokius, kaip sūkurius, esančius 12.17 b) pav. dešinės pusės viršuje bei žemiau centre, taip pat darinius, primenančias snaiges, esančias kairės pusės viršuje. Taip pat matome keletą išbarstytų mažų juodų dėmių, primenančių pradinę Mandelbroto aibę. 12.17 c) paveikslėlyje iš arčiau parodyta viena iš 12.17 b) paveikslėlio mažųjų ataugų. Jo centre matome kažką panašaus į brangakmeniu papuoštą sagę, susuktą, nelyginant jūrų arkliuko uodega, o žemiau naują nematytą sūkurio darinį. Mažesni šių darinių variantai vėl gali būti aptikti visame paveikslėlyje. Tokių naujų struktūrų viduje galime vėl surasti tai, kas būtų mažesnės pradinio paveikslėlio kopijos. 12.17 d) pav. matome padidintą 12.17 c) pav. jūros arkliuko uodegos dalį. Ją sudaro jau matytos įvairaus dydžio formos, taip pat ir naujos, kokių dar nematėme. Procesas vis tęsiasi ir tęsiasi, ir tęsiasi. Kiekvieną kartą, kai tik kurią nors detalę padidiname, mes randame tiek jau matytus, tiek dar ir nematytus darinius, susipynusius kvapą gniaužiančiame begalinio pasikartojimo ir begalinės įvairovės šokyje – struktūros kartojasi begaline mastelių daugybe, bet tiek pat tiksliai – niekada.

Kokią gi mastelio simetriją randame Mandelbroto aibėje? Pirmuosiuose mūsų pavyzdžiuose (Koch snaigė, Sierpinskio nėrinys, dailininko autoportretas 12.16 pav.) mastelio simetrija reiškė, kad tiksli struktūros kopija pasirodo begaline mastelių daugybe. Tai kartais apibūdinama kaip **tikslioji** mastelio simetrija. Tačiau Mandelbroto aibėje tėra **apytikslė** mastelio simetrija, kai dariniai kartojasi begaline mastelių daugybe, tačiau taip pat tiksliai niekada nesikartoja.

Mandelbroto aibės sudarymas

Susidūrus su Mandelbroto aibės grožiu ir sudėtingumu (žr. spalvotas įklijas), nesunku pamiršti jos kilmę, o juk Mandelbroto aibė yra visiškai matematinis objektas, kuris, panašiai kaip Koch snaigė ir Sierpinskio nėrinys, aprašomas palyginant paprasta rekursine keitimo taisykle. Pats rekursinis procesas yra maždaug toks: pradžioje pasirenkame skaičių, vadinamą rekursinio proceso **sėkla**, ir po to be galo daug kartų taikome rekursinę taisyklę, pagal kurią kiekviename žingsnyje naujai surastasis skaičius keliamas kvadratu ir prie rezultato pridedama sėkla. Toliau pateikta lentelė apibendrina rekursinį procesą, kurį vadinsime **Mandelbroto keitimo procesu**.

Mandelbroto keitimo procesas

- **Pradžia.** Imame sėklą (s).
- **Rekursinis žingsnis.** x pakeičiame į $x^2 + s$.

Pradinės reikšmės pavadinimas „sėkla“ yra labai patogi metafora. Kiekviena pasėtoji sėkla duoda skirtingą skaičių seką (medį). Rekursijos žingsniai yra tarsi taisyklė, nurodanti medžiui, kaip jam kitą sezoną augti toliau. Kiekvienas medis turi savąją, užkoduotą sėkloje augimo taisyklę, tačiau skirtingi medžiai auga pagal vieną bendrą schemą.

Na, o dabar pakeliaukime po mūsų botanikos sodą ir pasižiūrėkime į keletą Mandelbroto keitimo proceso pavyzdžių.

1 pavyzdys. (Sėkla $s = 1$.)

	Pradžia	1 žingsnis	2 žingsnis	3 žingsnis	4 žingsnis	...
Sėkla	$s = 1$	$s = 1$	$s = 1$	$s = 1$	$s = 1$	
Pradmuo		$x = 1$	$x = 2$	$x = 5$	$x = 26$	
Rekursinis žingsnis		$x^2 + s = 2$	$x^2 + s = 5$	$x^2 + s = 26$	$x^2 + s = 677$	
Rezultatas		$x = 2$	$x = 5$	$x = 26$	$x = 677$	

Matome, jog iš šios sėklos, procesui tęsiantis, gauname vis didesnius skaičius. Tokiu atveju sakome, kad Mandelbroto keitimo procesas *tolsta į begalybę*.

2 pavyzdys. (Sėkla $s = -1$.)

	Pradžia	1 žingsnis	2 žingsnis	3 žingsnis	4 žingsnis	...
Sėkla	$s = -1$	$s = -1$	$s = -1$	$s = -1$	$s = -1$	
Pradmuo		$x = -1$	$x = 0$	$x = -1$	$x = 0$	
Rekursinis žingsnis		$x^2 + s = 0$	$x^2 + s = -1$	$x^2 + s = 0$	$x^2 + s = -1$	
Rezultatas		$x = 0$	$x = -1$	$x = 0$	$x = -1$	

Matome, kad iš sėklos $s = -1$ išaugantys skaičiai šokinėja pirmyn ir atgal iš 0 į -1. Tokiu atveju mes sakome, kad Mandelbroto keitimo procesas yra *periodinis* (t.y. cikliškai kartojasi).

3 pavyzdys. (Sėkla $s = -0{,}75$.)

	Pradžia	1 žingsnis	2 žingsnis	3 žingsnis	4 žingsnis	...
Sėkla	$s = -0{,}75$	$s = -0{,}75$	$s = -0{,}75$	$s = -0{,}75$	$s = -0{,}75$	
Pradmuo		$x = -0{,}75$	$x = -0{,}1875$	$x = -0{,}714844$	$x = -0{,}238998$	
Rekursinis žingsnis		$x^2 + s = -0{,}1875$	$x^2 + s = -0{,}714844$	$x^2 + s = -0{,}238998$	$x^2 + s = -0{,}69288$	
Rezultatas		$x = -0{,}1875$	$x = -0{,}714844$	$x = -0{,}238998$	$x = -0{,}69288$	

Skaitytojui siūlome pratęsti šį pavyzdį kaip pratimą (žr. 25 pratimą), padaryti dar apie 100 žingsnių ir pabandyti perprasti, kas gi čia vyksta. Dabar užsiminsime, kaip tą (ir kitus pavyzdžius) galėtume labai efektyviai atlikti su skaičiuokliu, turinčiu atmintį ir kvadratinės funkcijos klavišą.

- **Pradžia.** Skaičių $-0{,}75$ (t.y. s) įveskite į atmintį.
- **Rekursinis žingsnis.** Paspauskite $\boxed{x^2}$ (turimąją reikšmę keliame kvadratu).
  Paspauskite $\boxed{+}$.
  Paspauskite atminties iškvietimo klavišą.
  Paspauskite $\boxed{=}$ (pridedame atminties turinį)

Kompleksiniai skaičiai

Pirmuosiuose trijuose pavyzdžiuose mes rūpestingai ėmėme kaip sėklą labai paprastus skaičius (sveikuosius skaičius arba dešimtaines trupmenas). Tikrovėje Mandelbroto keitimo taisyklė yra įdomiausia, kai ją taikome sudėtingesnių skaičių kategorijai, vadinamai kompleksiniais skaičiais. Jūs galėjote susidurti su jais ir anksčiau (gal papildomame algebros kurse). Tai skaičiai, leidžiantys traukti kvadratinę šaknį iš neigiamų skaičių, išspręsti bet kokią kvadratinę lygtį ir pan. Pagrindinis kompleksinių skaičių darybos elementas yra skaičius $\sqrt{-1} = i$. Turėdami i, galime sudaryti visus kitus kompleksinius skaičius, tokius kaip $(3 + 2i)$, $\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{5}i\right)$ ir apskritai kompleksinį skaičių $(a + bi)$.

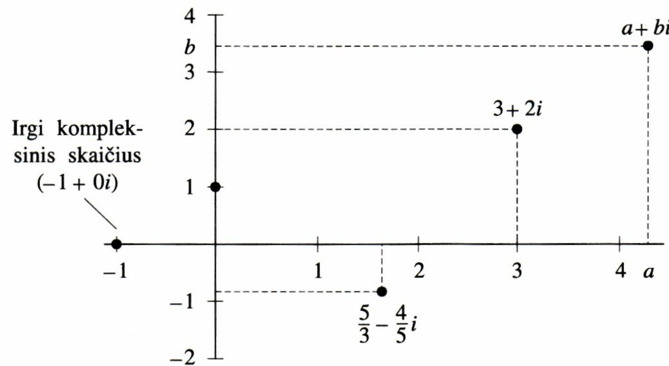
Dabar pažiūrėkime dar vieną Mandelbroto keitimo proceso pavyzdį, kai sėkla yra kompleksinis skaičius.

4 pavyzdys. (Sėkla: $s = i$.)

	Pradžia	1 žingsnis	2 žingsnis	3 žingsnis	4 žingsnis	...
Sėkla	$s = i$	$s = i$	$s = i$	$s = i$	$s = i$	
Pradmuo		$x = i$	$x = -1 + i$	$x = -i$	$x = -1 + i$	
Rekursinis žingsnis		$x^2 + s = i^2 + i$ $= -1 + i$	$x^2 + s = (-1 + i)^2 + i$ $= 1 - 2i + i^2 + i = -i$	$x^2 + s = (-i)^2 + i$ $= -1 + i$	$x^2 + s = -i$ (žr. 2 žingsnį)	
Rezultatas		$x = -1 + i$	$x = -i$	$x = -1 + i$	$x = -i$	

Ši situacija beveik tokia pati, kaip 2 pavyzdyje (procesas cikliškai kartojasi), išskyrus tai, kad ciklas negrįžta į sėklą.

Mums svarbiausias kompleksinių skaičių teorijos faktas yra tai, kad juos galima vaizduoti plokštumos taškais. 12.18 pav. kalba pats už save. Taigi mes galime kalbėti apie kompleksinius skaičius ir plokštumos taškus kaip apie vieną ir tą patį.



12.18 pav. Kompleksinius skaičius galima tapatinti su plokštumos taškais.

Atgal prie Mandelbroto aibės

Dabar jau (galų gale) galime paaiškinti, kaip gimsta Mandelbroto aibė. Turime rekursinį Mandelbroto keitimo procesą, kuriam kaip sėklos tinka visi plokštumos taškai (t.y. kiekvienas kompleksinis skaičius). Pirmuosiuose keturiuose pavyzdžiuose įsitikinome, kad Mandelbroto keitimo procesas duoda skirtingus rezultatus, ir tai priklauso nuo sėklos reikšmės. Atskirkime tas sėklas, kai Mandelbroto procesas tolsta į begalybę, nuo tų, kai jis *netolsta* į begalybę (kaip kad antrame, trečiame ir ketvirtame pavyzdžiuose). Jei pirmąsias sėklas nudažytume baltai, o antrąsias – juodai, tai gautume Mandelbroto aibę. Ne taip paprasta, kaip dukart du, bet pakankamai aišku!

Mandelbroto keitimo proceso paprastumas neįtikėtinai skiriasi nuo gaunamo rezultato sudėtingumo. Mandelbroto aibę kažkas pavadino „sudėtingiausiu žmonėms žinomu matematiniu objektu“. Ji yra vienas iš garsiausių ir žavingiausių šio šimtmečio matematikos atradimų.

FRAKTALAI

Terminą **fraktalas** (iš lotyniško žodžio *fractus* „sudužęs, suskilęs“) apie aštuntojo dešimtmečio vidurį pasiūlė B. Mandelbrotas, norėdamas viena sąvoka aprašyti tokius skirtingus objektus, kaip Koch kreivę, Sierpinskio nėrinį ir Mandelbroto aibę, taip pat ir daugybę gamtoje pasitaikančių darinių, tokių kaip debesys, krantai, žaibai, kalnai, žmogaus kraujagyslių sistema ar plaučių sandara.

Visi minėtieji objektai yra fraktalai ir turi keletą bendrų savybių. Viena iš jų – visi jie turi tam tikrą mastelio simetriją. Kai kurios kitos fraktalų matematinės savybės lieka už šios knygos ribų. Skaitytojams, kurie norėtų plačiau susipažinti su kitomis fraktalų matematinėmis savybėmis, galime, deja, pasiūlyti tik knygas anglų kalba.

Derėtų skaitytoją perspėti, kad mūsų apibrėžta mastelio simetrija dar negarantuoja objekto fraktališkumo. Pavyzdžiui, 12.16 paveikslėlio figūra nors ir turi mastelio simetriją, tačiau nėra fraktalas. Tačiau visi fraktalai turi tam tikrą mastelio simetriją, – kartais tikslią mastelio simetriją (kaip Koch kreivės ar Sierpinskio nėrinio atveju), o kartais apytikslę (kaip Mandelbroto aibės).

Per paskutiniuosius 15 metų fraktalų nagrinėjimas pasidarė viena iš šiuolaikiškiausių matematikos temų. Kaip tyrimų sritis, fraktalų geometrija yra išsipildžiusi matematikų svajonė – ji aprėpia sudėtingą ir įdomią matematiką, nuostabią grafiką (žr. spalvotas įklijas) ir nepaprastą tikroviškumą.

IŠVADOS. FRAKTALŲ GEOMETRIJA

Savo knygoje „Gamtos fraktalų geometrija“ B. Mandelbrotas rašė:

> *Kodėl (elementarioji) geometrija dažnai vadinama šalta ir sausa? Viena iš priežasčių – tai negalėjimas atvaizduoti debesų, kalnų, krantų ar medžio formų. Debesys – ne rutuliai, kalnai – ne kūgiai, krantai – ne apskritimai, ir nei medžio žievė glodi, nei žaibas tiesėm sklinda.*
> *... daugybė gamtos formų yra tokios netaisyklingos ir padrikos, kad palyginti su elementariąja geometrija gamta demonstruoja ne tik aukštesnį, bet ir visiškai kitokį sudėtingumo laipsnį.*

Tradicinės geometrijos objektai ir tie geometriniai dariniai, kuriuos nagrinėjome šiame skyriuje, stulbinančiai skiriasi. Sunku vienus supainioti su kitais. Tradicinės geometrijos figūros (kvadratai, apskritimai, kūgiai ir t.t.) ir jais remiantis sukurti daiktai (tiltai, mašinos, namai ir t.t.) turi aiškiai dirbtinę išvaizdą, ir to nepaslėps joks dizainas. Mandelbroto žodžiais, niekas nesugebėtų padaryti tikroviško debesies, naudodamasis vien rutuliais ir kūgiais. Ilgą laiką buvo manyta, kad padaryti tikroviškus geometrinius gamtos

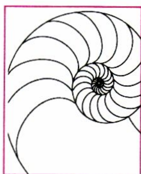
modelius beveik neįmanoma. Tačiau naujosios, **fraktalų geometrijos** priemonėmis buvo sukurti nuostabūs dirbtiniai peizažai (žr. spalvotas įklijas). Šioje geometrijoje matematiškai apibrėžti fraktalai pakeičia tradicinius kvadratus, apskritimus, kūgius ir t.t., panašiai kaip kompiuteris pakeičia tradicinę liniuotę, skriestuvą, matlankį ir t.t.

Mandelbrotas, kuris yra fraktalų geometrijos pradininkas, pirmasis suprato, jog su fraktalais galima sukurti fantastines gamtą imituojančias geometrines konstrukcijas. Tai sukėlė revoliuciją daugybėje sričių, esmingai susijusių su gamtos modeliavimu. Viena iš visiems mums pažįstamų sričių – tai kompiuterinė animacija. Mačiusieji filmą „Antrasis žvaigždžių žygis – Chano pyktis", be abejo buvo sužavėti Sutvėrimo planetų sistema. Ekologiškai nekenksminga bomba numetama į apleistą planetą, ir prieš mūsų akis gimsta vešlus tropinis pasaulis. Visi tie nepaprasti efektai buvo sukurti kompiuteriu, pasitelkus fraktalų geometriją. Nuo tada fraktalais sukurti peizažai nuolat matomi fantastiniuose filmuose bei daugelyje stulbinančių kompiuterinio meno kūrinių.

Kadangi mastelio simetrija yra esmingiausia daugelio gamtos objektų savybė, tai fraktalai tapo pagrindine tokių objektų tyrimo priemone – ir numatant, ir analizuojant, ir imituojant tiek pačios gamtos objektus, tiek ir jų savybes. Paskutiniaisiais metais svarbūs fraktalų geometrijos taikymai buvo atlikti tokiose įvairiose srityse, kaip medžiagotyra, populiacijų biologija žmogaus fiziologija ir netgi psichologija.

Elementariąją geometriją išplėtojo graikai daugiau kaip prieš 2000 metų, ir ji pasiekė mus beveik nepakitusi. Ji buvo (ir tebėra) didžiulė žmogaus proto pergalė, padėjusi daug nuveikti technikoje, architektūroje ir kitur. Tačiau ši geometrija apskritai nepasiteisino kaip tikslaus gamtos vaizdavimo ir modeliavimo įrankis ir kalba. Fraktalų geometrijos atradimas davė mokslui tinkamą matematinę kalbą šiam trūkumui pašalinti, ir todėl yra vienas iš didžiausių dvidešimtojo amžiaus matematikos pasiekimų.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

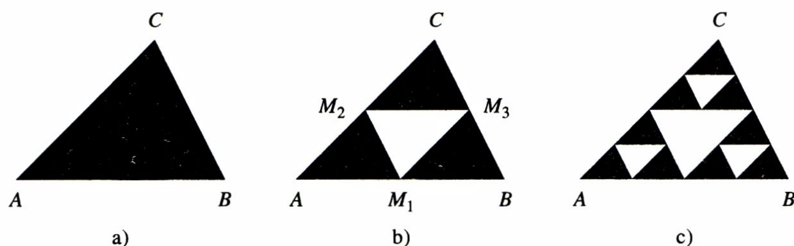


chaoso žaidimas
fraktalas
fraktalų geometrija
Koch kreivė (snaigės kreivė)
Koch snaigė
Mandelbroto aibė
Mandelbroto keitimo procesas
mastelio simetrija
rekursinio keitimo taisyklė
Sierpinskio nėrinys
sėkla

PRATIMAI

Apšilimas

1–4 *pratimai susiję su šiame skyriuje aprašyto Sierpinskio nėrinio sudarymu. Žemiau parodyti pirmi trys Sierpinskio nėrinio sudarymo žingsniai.*



1. a) Paaiškinkite, kodėl trikampis AM_1M_2 yra panašus į trikampį ABC.
b) Paaiškinkite, kodėl trikampis $M_3M_2M_1$ yra panašus į trikampį ABC.
c) Paaiškinkite, kodėl trikampiai AM_1M_2, M_1BM_3 ir M_2M_3C yra lygūs.
d) Kelintą trikampio ABC dalį sudaro trikampis $M_3M_2M_1$? Kodėl?

2. Paėmę popieriaus lapą ir pradėję nuo bet kurio jūsų pasirinkto trikampio, padarykite pirmuosius tris Sierpinskio nėrinio sudarymo žingsnius.

3. Tarkime, kad trikampio ABC plotas yra X.
a) Raskite pirmais trimis Sierpinskio nėrinio sudarymo žingsniais gautų figūrų plotus.
b) Raskite N-tuoju Sierpinskio nėrinio sudarymo žingsniu gautos figūros plotą.
c) Paaiškinkite, kodėl Sierpinskio nėrinys turi nulinį plotą.

4. Kiekvienu Sierpinskio nėrinio sudarymo žingsniu gaunamos figūros sieną sudaro visos atkarpos, skiriančios baltąsias sritis nuo juodųjų. Tarkime, kad pradinio trikampio ABC perimetras buvo P.
a) Raskite pirmais trimis žingsniais gautų figūrų krašto ilgį.
b) Raskite N-tuoju žingsniu gautos figūros krašto ilgį.
c) Paaiškinkite, kodėl Sierpinskio nėrinio kraštas turi begalinį ilgį.

5–8 *pratimai remiasi tokia rekursine konstrukcija:*

- *Pradžia. Imame ištisinį juodą kvadratą.*
- 1 *žingsnis. Padalijame kvadratą į devynis lygius kvadratėlius ir pašaliname centre esantį kvadratėlį.*
- 2, 3 *ir tolesni žingsniai. Tęsiame centrinių kvadratėlių šalinimą iš visų smulkinamųjų kvadratėlių iki begalybės.*

Fraktalas, gaunamas šiuo rekursiniu procesu, yra vadinamas **Sierpinskio kilimu**.

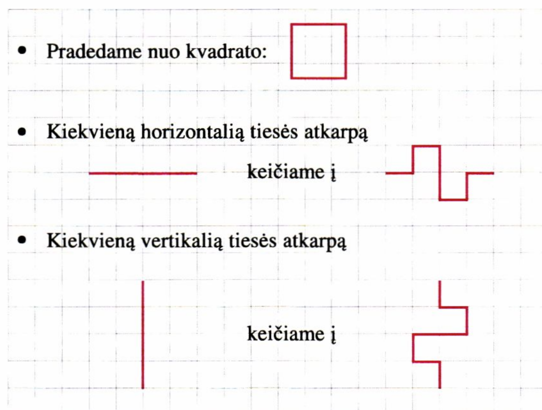
5. Nubraižykite popieriaus lape, ką gaunate po pirmųjų trijų Sierpinskio kilimo sudarymo žingsnių.

6. Parašykite Sierpinskio kilimo rekursinę keitimo taisyklę. (*Nurodymas*. Dar kartą pasižiūrėkite į taisyklę Sierpinskio nėriniui, 353 psl.)

7. Tarkime, kad pradinio kvadrato plotas yra X.
a) Kiek juodųjų kvadratėlių yra figūroje po trečio sudarymo žingsnio?
b) Koks yra trečiu sudarymo žingsniu gaunamos figūros plotas?
c) Kiek juodųjų kvadratėlių yra figūroje po N-tojo sudarymo žingsnio?
d) Koks yra N-tuoju sudarymo žingsniu gaunamos figūros plotas?
e) Paaiškinkite, kodėl Sierpinskio kilimas turi nulinį plotą.

8. Tarkime, kad pradinio kvadrato kraštinės ilgis yra 1.
a) Raskite po 1 ir 2 sudarymo žingsnių gautų figūrų krašto ilgius.
b) Raskite po N-tojo sudarymo žingsnio gautos figūros krašto ilgį.
c) Paaiškinkite, kodėl Sierpinskio kilimo kraštas yra begalinio ilgio.

9–12 *pratimai remiasi tokia rekursinio keitimo taisykle*:



Fraktalas, gaunamas tokiu rekursiniu procesu, vadinamas **kvadratine Koch sala**.

9. Paėmę popieriaus lapą, nubraižykite figūrą, kurią gaunate po pirmųjų dviejų kvadratinės Koch salos sudarymo žingsnių.

10. Tarkime, kad pradinio kvadrato plotas yra X.
a) Raskite kvadratinių Koch salų, gautų po antro ir trečio sudarymo žingsnių, plotus.
b) Raskite kvadratinės Koch salos, gautos po N-tojo sudarymo žingsnio, plotą.

11. Figūra, gauta po N-tojo kvadratinės Koch salos sudarymo žingsnio, yra daugiakampis. Kiek gi jis turi kraštinių?

12. a) Raskite daugiakampių, gautų po pirmųjų dviejų kvadratinės Koch salos sudarymo žingsnių, perimetrą.

b) Raskite daugiakampio, gauto po N-tojo kvadratinės Koch salos sudarymo žingsnio, perimetrą.

13–15 *pratimuose naudojamasi tokia rekursinio keitimo taisykle*:

- *Pradžia. Turime juodą kvadratą.*
- 1 *žingsnis. Padalijame kiekvieną kvadrato kraštinę į tris lygias dalis. Prie kiekvienos kraštinės vidurinės dalies iš išorės prijungiame po baltą kvadratą, kurio kraštinės ilgis yra trečdalis pradinio kvadrato kraštinės ilgio.*
- 2, 3 *ir tolesni žingsniai. Tęsiame procesą* (*vis dalijame kraštines į tris dalis ir prie vidurinės prijungiame tinkamo dydžio kvadratus*).

13. Paėmę popieriaus lapą, nubraižykite figūras, kurias gaunate po pirmųjų trijų sudarymo žingsnių.

14. Tarkime, kad pradinio kvadrato plotas yra X.

a) Kokie yra po pirmųjų trijų sudarymo žingsnių gautų figūrų plotai?

b) Koks yra po N-tojo sudarymo žingsnio gautos figūros plotas?

15. Tarkime, kad pradinio kvadrato kraštinės ilgis yra 1.

a) Raskite po pirmųjų dviejų sudarymo žingsnių gautų figūrų krašto ilgius.

b) Raskite po N-to sudarymo žingsnio gautos figūros krašto ilgį.

16 ir 17 *pratimai susiję su šiame skyriuje aprašytu chaoso žaidimu. Tarkime, kad turime bet kurį trikampį ABC ir ridename kauliuką. Viršūnei A priskiriame skaičius* 1 *ir* 2, *viršūnei B –* 3 *ir* 4, *o C –* 5 *ir* 6.

16. Tarkime, kad kauliuką metėme 16 kartų, o baigtys buvo 3, 4, 2, 3, 6, 1, 6, 5, 5, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 3. Pažymėkite taškus nuo P_1 iki P_{16}, atitinkančius šias baigtis.

17. Tarkime, kad kauliuką metėme 12 kartų, o baigtys buvo 5, 5, 1, 2, 4, 1, 6, 3, 3, 6, 2, 5. Pažymėkite visus taškus nuo P_1 iki P_{12}, atitinkančius šias baigtis.

18–20 *pratimai remiasi šiame skyriuje aprašytu Mandelbroto keitimo procesu. (Skaičiuojant gali prireikti skaičiuoklio.)*

18. a) Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = 2$ ir raskite penkių žingsnių rezultatus.

b) Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

19. a) Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = -2$ ir raskite pirmųjų penkių žingsnių rezultatus.
b) Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

20. a) Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = -0{,}25$ ir raskite pirmųjų dvidešimties žingsnių rezultatus.
b) Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

Treniruotė

21. Šis pratimas susijęs su Sierpinskio nėrinio sudarymu. Paaiškinkite, kodėl po N-tojo sudarymo žingsnio turime $(3^N - 1)/2$ baltųjų trikampių.

22. Šis pratimas susijęs su Sierpinskio kilimo sudarymu, nagrinėtu 5–8 pratimuose. Kiek iš viso baltųjų kvadratėlių yra figūroje po N-tojo sudarymo žingsnio?

23. Paaiškinkite, kodėl, sudarinėdami Sierpinskio nėrinį, niekada negausime visiškai balto trikampio.

24. Remdamiesi geometrinės progresijos narių sumos formule, įrodykite, kad
a)

$$1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1} = \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right],$$

b)

$$\left(\frac{1}{3}\right)A + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)A + \left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)A + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)A =$$
$$= \frac{3}{5}A\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right].$$

25–30 *pratimai remiasi šiame skyriuje aprašytu Mandelbroto keitimo procesu. (Skaičiuojant gali prireikti skaičiuoklio.)*

25. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = -0{,}75$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

26. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = 0{,}2$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

27. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = 0{,}25$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

28. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = -1{,}25$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

29. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = \sqrt{2}$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

30. Taikykite Mandelbroto keitimo procesą sėklai $s = -\sqrt{2}$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

Varžybos

31. Tarkime, kad trikampyje ABC žaidžiame chaoso žaidimą, o taškai M_1, M_2 ir M_3 yra to trikampio kraštinių vidurio taškai. Paaiškinkite, kodėl žaidžiant neįmanoma pakliūti į trikampio $M_1M_2M_3$ vidų.

32. Nagrinėkime fraktalus, apibrėžtus 13–15 pratimuose. Raskite jų plotus.

33. Pritaikykite Mandelbroto keitimo procesą tokioms sėkloms:
   a) $s = 1 + i$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?
   b) $s = 1 - i$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

34. Pritaikykite Mandelbroto keitimo procesą tokioms sėkloms:
   a) $s = -0{,}25 + 0{,}25i$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?
   b) $s = -0{,}25 - 0{,}25i$. Kaip kistų skaičiai, jei šį procesą tęstume be galo?

35. Įrodykite, kad Mandelbroto aibė turi atspindžio simetriją. (*Nurodymas.* Žr. 33 ir 34 pratimus.)



13 Duomenų rinkimas

„Dėstykite duomenis!“ – nekantriai sušuko Holmsas. „Be duomenų aš kaip puodžius be molio!“

A. KONAN DOILIS (ARTHUR CONAN DOYLE)

Tyrimai, apklausos, eksperimentai

Atsivertus laikraštį, galima perskaityti tokias antraštes:

- Daugiau kaip 60% Lietuvos gyventojų pritaria naujajai Vyriausybės socialinės politikos programai.
- Plataus vartojimo prekių kainos per paskutinį ketvirtį padidėjo 5 procentais.
- Vasario mėnesį televizijos žaidimo „Taip ir Ne“ reitingas padidėjo 1,5 balo, ir šiuo metu tai populiariausias televizijos žaidimas.
- Naujausi tyrimai rodo, kad, kasdien valgant daugiau kaip 0,5 kg šokolado, rizika susirgti diabetu padidėja iki 40%.

Visos šios išvardytos, tiesa, išgalvotos, bet gyvenimiškos laikraštinės antraštės turi vieną bendrą dalyką – jos teikia informaciją. Dalis šios informacijos (ar net ji visa) yra išreikšta skaičiais – tai *skaitinė*, arba *kiekybinė*, informacija. Todėl kiekviena iš šių antraščių yra statistinis teiginys.

Skaitinė, arba kiekybinė, informacija – tai **duomenys**, o statistika yra duomenų rinkimo ir analizavimo mokslas.

Už kiekvienos tokios antraštės (statistinio teiginio) slypi ištisa istorija, kurioje, kaip ir kiekvienoje istorijoje, yra pradžia, vidurys, pabaiga ir pamokos. Šiame skyriuje aptarsime tokių istorijų pradžią. Statistikoje tai – *duomenų rinkimo* procesas. Duomenys – tai daugybė atskirų faktų, kurie sudaro statistinę informaciją. Jei pradiniai duomenys yra iškreipti, tai išvados, padarytos remiantis tokiais duomenimis, teturi labai menką vertę arba neturi jos iš viso.

Atrodytų, kad rinkti duomenis yra labai paprasta. Deja, taip nėra. Surinkti patikimus ir naudingus duomenis – tai dažniausiai pats sunkiausias statistinio tyrimo etapas. Kiekviename žingsnyje kyla rimtų sunkumų, ir mūsų tyko visokie pavojai, kurių reikia išvengti.

Šiame skyriuje aptarsime keletą duomenų rinkimo metodų ir pagrindines duomenų rinkimo problemas.

POPULIACIJOS DYDŽIO NUSTATYMAS

Kiekvienas statistinis teiginys tiesiogiai ar netiesiogiai apibūdina tam tikrą individų ar objektų grupę. Statistikoje šis individų ar objektų rinkinys vadinamas **populiacija**. Pirmoje laikraštinėje antraštėje populiacija yra „Lietuvos gyventojai“. Antroje – populiacija yra veikiau skaičiai nei žmonės (kainos, kurias žmonės moka už plataus vartojimo prekes). Paskutinėse dviejose antraštėse iš konteksto sunku tiksliai pasakyti, kas čia yra populiacija. Dažnai reikia perskaityti tekstą kelis kartus, kad galėtume tiksliai apibūdinti populiaciją.

Populiacijos apibūdinimas

Tiksliai apibūdinti populiaciją yra būtina, kad žinotume, apie ką kalbame. Atrodytų, kad tai savaime suprantamas dalykas, tačiau dažnai to nepadaroma: kartais dėl nerūpestingumo, o kartais dėl to, kad iš tikrųjų to nė neįmanoma padaryti. Grįžkime prie pirmos antraštės. Kas turima omenyje, kai sakoma „Lietuvos gyventojai“? Ar įskaitomi vaikai? Ar įskaitomi užsieniečiai, laikinai gyvenantys Lietuvoje? O Lietuvos gyventojai, kurie šiuo metu išvykę į kitas šalis? Klausimų gali kilti ir daugiau. Taigi frazė „Lietuvos gyventojai“ nėra pakankamai tiksli ir gali tapti ginčų objektu, ir statistinė informacija, kurią mes norime perteikti, gali netekti reikšmės.

Yra atvejų, kai tiksliai apibūdinti populiaciją labai sudėtinga ar net neįmanoma. Pavyzdžiui, prognozuodamos rinkimų rezultatus, daugelis viešosios nuomonės apklausų nagrinėja „rinkėjų populiaciją“. O kas iš tikrųjų yra rinkėjai? Ar tai žmonės, turintys balso teisę, ar tie, kas iš tiesų balsuoja rinkimuose?

Kokio dydžio yra populiacija?

Sudėtinga ne tik tiksliai apibūdinti populiaciją. Dažnai nelengva ir nustatyti populiacijos dydį. Darydami statistines išvadas, mes dažnai remiamės populiacijos dydžiu – informacija yra juo svaresnė, juo didesnė populiacija yra apibūdinama. Tačiau kiek patikima yra informacija apie populiacijos dydį? Kai populiacija nedidelė, ją nesudėtinga suskaičiuoti taip, kaip skaičiuojame centus taupyklėje. Kai mokytojas praneša klasei kontrolinio darbo rezultatus, populiacija yra visi kontrolinį darbą rašę moksleiviai. Mokytojas lengvai gali nustatyti tikslų populiacijos dydį – užtenka žvilgtelėti į klasės žurnalą.

Kai populiacija yra didelė, nustatyti jos dydį yra sudėtinga ir labai brangu (arba net neįmanoma).

Kiek vilkų yra Lietuvoje? Neturėdami tokios informacijos, ar galime pasikliauti kokiu nors statistiniu teiginiu apie vilkus? Štai dar vienas pavyzdys. Kiek žmonių gyvena Lietuvoje? Tokią informaciją duoda visuotinis gyventojų surašymas. Pagal 1989 metų visuotinio gyventojų surašymo duomenis Lietuvoje gyveno 3 673 889 gyventojai. Daugelis svarbių statistinių teiginių remiasi būtent šiuo skaičiumi. Kitas klausimas, ar galima pasitikėti šio skaičiaus tikslumu.

TYRIMAI

Kai populiacija nustatyta, kiekvienas jos narys yra potencialus duomenų šaltinis. Tėra tik dvi galimybės tirti populiaciją: 1) rinkti duomenis iš kiekvieno populiacijos individo arba 2) rinkti duomenis tik iš dalies populiacijos narių. Pirmuoju atveju turime **ištisinį tyrimą**. Geriausias ištisinio tyrimo pavyzdys – visuotinis gyventojų surašymas, kai stengiamasi apklausti ir surinkti informaciją apie visus šalies gyventojus. Kalbant apie negyvų objektų populiacijas, tinkamas ištisinio tyrimo pavyzdys yra inventorizacija (kai surašomas visas turimas inventorius ar prekės). Antruoju atveju turime **pasirinktinį tyrimą**.

Ištisinis tyrimas, arba surašymas, yra taikomas tada, kai populiacija yra nedidelė ir lengvai nustatoma. Žinoma, „nedidelė populiacija" yra santykinis pasakymas, tačiau taip jau susiklostė, kad kai populiacijoje yra daugiau nei keli tūkstančiai objektų, ištisiniai tyrimai nedaromi be rimtos priežasties. Tačiau net tuo atveju, kai populiacija nėra didelė, ištisinis tyrimas gali netikti. Sakykime, mes norime surinkti duomenis apie nedidelio tvenkinio žuvų dydį ir svorį. Atlikti ištisinį tyrimą – tai reiškia pagauti, pasverti ir išmatuoti kiekvieną žuvį tvenkinyje. Bet žuvys yra labai judrūs ir sunkiai pagaunami padarai, todėl greičiausiai sugaišime tiek laiko ir įdėsime tiek pastangų, kad galų gale visa tai nepasiteisins. Be to, ar būsime tikri, kad jau pagavome ir išmatavome visas žuvis? Panašių problemų kyla ir visuotinio gyventojų surašymo metu. Gyventojų surašymas paprastai trunka 7–10 dienų. Juk mes negalime „pririšti" gyventojų dešimčiai dienų, kad jie sėdėtų namuose ir lauktų, kol ateis statistikas ir juos apklaus. Žmonės keliauja, vyksta į svečius, keičia gyvenamąją vietą – net jei mums pavyktų visus rasti namuose, situacija labai greitai keičiasi, ir tai, kas buvo teisinga vakar, jau nebebus teisinga

po keleto dienų. Be to, niekad negalėsime būti tikri, kad jau surašėme visus gyventojus.

Ištisinio tyrimo alternatyva yra pasirinktinis tyrimas, kai duomenys renkami tik iš populiacijos dalies, kuri vadinama **imtimi**. Pasirodo, į klausimus apie visą populiaciją galima atsakyti, remiantis iš imties surinkta informacija. Sunkiausia tokiame tyrime yra pasirinkti imtį, kuri iš tikrųjų atstovautų visai populiacijai. Tai lengviau pasakyti, negu padaryti, kadangi populiacija nėra sudaryta iš vienodų individų ar objektų.

Todėl kai populiacijos nariai nėra panašūs, pasirinktiniai tyrimai turi kitą trūkumą, nei ištisiniai tyrimai: pirmiesiems reikia mažiau darbo, jie mažiau kainuoja, tačiau, taikant šį metodą, visada padaroma paklaida. Vis tiktai, jei imtis yra sudaryta tinkamai, tai paklaida, kaip tvirtina statistikos teorija, bus labai maža, taigi mažesnės išlaidos ir pastangos kompensuos tikslumo stoką. Daugelyje situacijų pasirinktinis tyrimas yra vienintelis įmanomas duomenų rinkimo būdas, ir tokių tyrimų praktinė vertė buvo įrodyta daug kartų.

Viena iš labiausiai žinomų pasirinktinių tyrimų rūšių yra *viešosios nuomonės apklausos*. Pasaulyje gerai žinomos viešosios nuomonės tyrimo kompanijos „Gallup“, „Harris“, „MAI“ ir kitos. Lietuvos spauda dažnai spausdina kompanijų „Baltijos tyrimai“, „Vilmorus“ atliktų viešosios nuomonės apklausų rezultatus. Viešosios nuomonės apklausos yra atliekamos siekiant sužinoti gyventojų nuomonę tokiais klausimais, kaip aplinkos apsauga, nusikalstamumas, ekonomikos reforma, pasitikėjimas valdžia ir pan. Šių tyrimų imties dydis paprastai yra 1000–2000 asmenų.

Kaip tokios mažos imtys gali suteikti informaciją apie daug didesnę populiaciją? Atsakymas į šį klausimą slypi tinkamame imties sudaryme, jos įvairiapusiškume. Dž. Gelapas (George Gallup), vienas iš šiuolaikinių viešosios nuomonės apklausų kūrėjų, tai paaiškino maždaug taip:

> *Ar norite apklausą atlikti Niujorko valstijoje, ar Baton Ružo mieste* (160 000 *gyventojų*), *jums reikia apklausti tiek pat gyventojų. Čia nėra jokio stebuklo – kai verdami du puodai sriubos, ir vienas iš jų yra dešimt kartų didesnis už kitą, virėjui nereikia semti dešimt kartų daugiau šaukštų iš didesniojo puodo, kad nustatytų sriubos skonį.*

Tą pačią mintį galima paaiškinti ir kitu pavyzdžiu: nustatant ligonio kraujo sudėtį, juk pasitenkinama vos kelių mililitrų mėginiu.

Pagrindinės sąvokos

Dabar apibrėšime pagrindines statistikos sąvokas. Pradėsime nuo susitarimo: nuo šiol populiacijos dydį žymėsime N, o imties dydį n. Kadangi imtis pagal apibrėžimą yra populiacijos dalis, tai visada $n < N$. Santykis n/N yra vadinamas **imties koeficientu**. Procentinis imties koeficientas $x = \frac{n}{N} \cdot 100$ rodo, kad imtis sudaro $x\%$ visos populiacijos.

1 pavyzdys. Sakykime, kad populiacijos dydis $N = 500\,000$. Jei imties dydis $n = 1000$, imties koeficientas $1000/500\,000 = 1/500$, arba 0,2%. Tai reiškia, kad kiekvienas imties narys atstovauja 500 populiacijos narių, arba imtis sudaro 0,2% visos populiacijos.

2 pavyzdys. Vėl sakykime, kad populiacijos dydis $N = 500\,000$, o mums reikėtų, kad imties koeficientas būtų lygus 3%. Todėl imties dydis turėtų būti $500\,000 \cdot 0{,}03 = 15\,000$.

Dabar jau žinome, kad vienas iš būdų gauti statistinę informaciją apie visą populiaciją yra imties tyrimas. Skirdami tikslią statistinę informaciją apie populiaciją nuo imtimi grindžiamos statistinės informacijos, statistikai vartoja terminą **parametras**, kai kalbama apie ištisinį tyrimą, ir terminą **statistika**, kai duomenys yra gauti iš imties. Rasti parametrą dažniausiai yra labai sunku, o kartais ir neįmanoma. Vienintelė galimybė gauti tikslią parametro skaitinę reikšmę yra ištisinis tyrimas. Kai remiamės imtimi, mes gauname tik parametro įvertį, kuris ir vadinamas statistika.

Imties paklaida – tai parametro ir statistikos (parametro įverčio) skirtumas. Imties paklaidą sudaro atsitiktinė paklaida ir sistemingoji paklaida. **Atsitiktinė paklaida** atsiranda todėl, kad statistika negali suteikti visiškai tikslios informacijos apie visą populiaciją, – pagal apibrėžimą ji remiasi tik daline informacija (imtimi). Atsitiktinė paklaida priklauso nuo imties dydžio. Atsitiktinės paklaidos išvengti neįmanoma – mes tegalime sumažinti ją iki minimumo, rūpestingai pasirinkę imtį ir tinkamai nustatę imties dydį. **Sistemingąją paklaidą** dažniausiai lemia **imties iškreiptis**, atsirandanti dėl prasto jos sudarymo. Mes galime turėti geriausių ketinimų, norėdami sudaryti imtį, išties atstovaujančią visai populiacijai, tačiau labai sunku atsižvelgti į visus faktorius, kurie gali turėti įtakos imties reprezentatyvumui. Priešingai nei atsitiktinės paklaidos atveju, sistemingosios paklaidos galima išvengti taikant tinkamus imties metodus. Šiame skyriuje savo dėmesį sutelksime į sistemingosios paklaidos priežastis. Atsitiktines paklaidas plačiau aptarsime 16 skyriuje. Pakartosime svarbiausius faktus apie pasirinktinius tyrimus:

- Parametras yra tiksli tam tikros populiacijos charakteristikos skaitinė reikšmė, o statistika yra parametro įvertis, gautas iš imties.
- Parametras yra nekintamas dydis, tuo tarpu statistika priklauso nuo pasirinktos imties. Jei imtys skirtingos, galime būti tikri, kad gausime skirtingas statistikas (tai yra teisinga net tuo atveju, kai imtys sudaromos lygiai tomis pačiomis procedūromis). Šis faktas vadinamas **imčių kintamumu**.

- Imties paklaida – tai parametro ir statistikos (parametro įverčio), kuri gauta iš imties, skirtumas. Imties paklaidą sudaro atsitiktinė paklaida ir sistemingoji paklaida.
- Atsitiktinė paklaida yra neišvengiamas imčių kintamumo padarinys.
- Sistemingoji paklaida dažniausiai yra imties iškreipties (nereprezentatyvumo) padarinys. Iškreiptis atsiranda taikant netinkamus imties metodus.
- Nors atsitiktinės paklaidos išvengti neįmanoma, tačiau ją galima sumažinti sudarant tinkamą imtį: juo didesnė imtis, juo mažesnė atsitiktinė paklaida. Ši prieklausa nėra tiesinė – pradedant tam tikru dydžiu, imties didinimas jau nebedaro didesnės įtakos atsitiktinei paklaidai.
- Priešingai nei atsitiktinės paklaidos atveju, imties didinimas negarantuoja imties sistemingosios paklaidos mažėjimo. Jei imtis sudaroma prastai, didindami imtį, galime netgi padidinti imties iškreiptį, taigi ir sistemingąją paklaidą.

Paskutinį teiginį pailiustruosime pavyzdžiu, kuris žinomas kaip vienas iš prasčiausiai atliktų tyrimų viešosios nuomonės apklausų istorijoje.

IŠKREIPTOSIOS IMTYS. „LITERATŪROS APŽVALGOS“ APKLAUSA

1936 metų JAV prezidento rinkimuose Alfredas Lendonas – Respublikonų partijos gubernatorius iš Kanzaso – balotiravosi prieš Frankliną D. Ruzveltą. 1936 metai – tai Didžiosios depresijos periodo JAV pabaiga, kai nedarbas bei kitos ekonominės problemos buvo dar labai aktualios ir neatsitiktinai tapo pagrindinėmis rinkimų kampanijos temomis. „Literatūros apžvalga“ („Literary Digest“) buvo vienas iš respektabiliausių to meto žurnalų ir garsėjo tuo, kad tiksliai prognozavo prezidento rinkimų laimėtojus nuo 1916 metų. 1936 m. „Literatūros apžvalga“ organizavo vieną didžiausių ir brangiausių apklausų – imties dydis buvo maždaug 2,4 mln. žmonių. Pagal apklausos duomenis žurnalas prognozavo, kad 1936 m. JAV Prezidento rinkimuose Lendonas gaus 57% rinkėjų balsų, o Ruzveltas – 43% (tokios buvo *statistikos*, besiremiančios imties apklausa). Tikrieji rinkimų rezultatai sukėlė šoką: 62% rinkėjų balsavo už Ruzveltą, o už Lendoną balsavo tik 38% (tai jau rinkimų *parametrai*). Taigi šio tyrimo imties paklaida buvo 19% – didžiausia paklaida, kokia kada nors yra buvusi svarbiausiose viešosios nuomonės apklausose. Beveik visą imties paklaidą sudarė sistemingoji paklaida. Tuo pat metu, kai „Literatūros apžvalga“ taip skaudžiai apsiriko, Dž. Gelapas sugebėjo numatyti Ruzvelto pergalę remdamasis kelis kartus mažesne imtimi – maždaug 50 000 žmonių.

Ši istorija patvirtina, kad, didindami imtį, mes negalime išvengti klaidų, atsirandančių dėl netinkamų imties metodų. Svarbiausia pasirinktiniuose tyrimuose yra ne didinti imtį, o siekti, kad ji būtų neiškreipta.

Savo apklausą žurnalas organizavo taip: remiantis visais Jungtinių Valstijų telefonų sąrašais, žurnalų prenumeratorių sąrašais, klubų ir asociacijų narių sąrašais ir kitais šaltiniais, buvo sudarytas 10 milijonų adresatų sąrašas. Kiekvienam pakliuvusiam į sąrašą buvo pasiųstas netikras balsavimo biuletenis ir buvo prašoma užpildyti šį biuletenį ir atsiųsti žurnalui atgal.

Iš tiesų „Literatūros apžvalga" padarė dvi labai rimtas (ir labai dažnas) klaidas – tai ir buvo žurnalo žlugimo* priežastis.

Pirma ir didžiausia apklausos problema buvo respondentų (žmonių, kuriuos ketinama apklausti) sąrašo sudarymas. Kaip jau minėjome, jis buvo sudarytas remiantis telefonų abonentų, klubų narių, žurnalų prenumeratorių sąrašais. Bet nepamirškime, kad 1936 m. telefonas buvo kur kas didesnė prabanga negu dabar (net ir JAV). Be to, šalyje buvo dar 9 milijonai bedarbių, ir šių žmonių pavardės vargu ar galėjo būti įvairių klubų narių ar žurnalų prenumeratorių sąrašuose. Todėl toks sąrašas, be abejo, labiau atstovavo vidutinės ir aukštesniosios klasės rinkėjams. Vadovaujantis tokiais imties sudarymo principais, mažesnes pajamas turintys rinkėjai neturėjo jokių šansų patekti į respondentų sąrašus. Gal kitu atveju respondentų materialinė padėtis ir nėra toks svarbus veiksnys, tačiau 1936 metais, kai JAV vis dar išgyveno ekonominius sunkumus, jis turėjo lemiamą reikšmę pasirenkant kandidatą. Kai sudarant imtį atsiribojama (tegu ir nesąmoningai) nuo tam tikros populiacijos dalies, sakoma, kad tyrimui kenkia imties sudarymo, arba **ėmimo iškreiptis**. Nors akivaizdu, kad, norint gerai atlikti tyrimą, ėmimo iškreipties būtina išvengti, tačiau tai pavyksta toli gražu ne visada. Net nuoširdžiausios pastangos sudaryti imtį, kuri atspindėtų visą populiaciją, gali nepasiekti tikslo.

Kita „Literatūros apžvalgos" apklausos problema buvo ta, kad iš dešimties milijonų žmonių, kurių vardai buvo adresatų sąraše, atsiliepė tik 2,4 milijono. Žodžiu, imties dydis buvo keturis kartus mažesnis, negu buvo tikėtasi. Gerai žinoma, kad žmonės, kurie atsiliepia tiriant, labai skiriasi nuo žmonių, kurie neatsiliepia. Skiriasi ne tik jų požiūris į panašius tyrimus (pirmieji paprastai jiems pritaria, antrieji – vertina skeptiškai), bet ir kiti, labai subtilūs, tačiau reikšmingi dalykai: į „Literatūros apžvalgos" anketas dažniau atsakė labiau išsilavinę ir geresnes materialines sąlygas turintys žmonės, o jie buvo labiau linkę balsuoti už respublikoną Lendoną.

Apklausoje dalyvavusių žmonių skaičiaus ir prašytų joje dalyvauti žmonių skaičiaus santykis yra vadinamas **atsakymo lygmeniu**. „Literatūros apžvalgos" apklausoje atsakymo lygmuo buvo $2\,400\,000/10\,000\,000 = 0{,}24$. Kai šis lygmuo yra labai mažas**, sakoma, kad tyrimui kenkia **neatsakymo iškreiptis**. Neatsakymas iškreipia imtį, kadangi nenorintys ar tingintys dalyvauti apklausoje žmonės automatiškai į ją nepatenka.

* Ir ne tik perkeltine prasme – gana greitai po šios apklausos žurnalas nustojo ėjęs.

** Kadangi nėra taisyklės, pagal kurią galėtume nustatyti, koks atsakymo lygmuo yra pakankamas, tai paprastai laikoma, kad mažesnis už 0,5 atsakymo lygmuo yra per mažas.

Kovoti su neatsakymu labai sunku: demokratiškoje visuomenėje negalima versti žmonių dalyvauti tyrimuose. Bandymas mokėti žmonėms ir taip suinteresuoti juos dalyvauti tyrimuose nelabai pasiteisina, kadangi daugeliu atveju tai sudaro sąlygas kitoms imties iškreipties formoms. Neatsakymo iškreiptis priklauso nuo apklausos metodo, ir daugiausia neatsakymų būna apklausoje paštu, kiek mažiau, kai apklausiama telefonu, ir mažiausiai, kai apklausiama asmeniškai (akis į akį su respondentu).

„Literatūros apžvalgos“ tyrimai buvo atliekami paštu, o žmonės labai dažnai mano apklausą paštu esant viso labo beprasmišką popiergalių siuntinėjimą. Žinoma, prisiminus respondentų sąrašo dydį, aišku, kad žurnalas neturėjo kito pasirinkimo. Tai dar kartą patvirtina, kad didelė imtis sukelia daugiau rūpesčių nei naudos.

Lietuvoje šiuo metu visos svarbesnės viešosios nuomonės apklausos yra atliekamos apklausiant asmeniškai, ir labai retai – telefonu. Žinoma, asmeniniai interviu kainuoja gerokai brangiau, tačiau telefoninės apklausos neatsakymo iškreiptis yra didesnė, todėl rezultatai mažiau patikimi. Be to, daugiau nei trečdalis Lietuvos gyventojų neturi namuose telefono. Vakaruose telefoninės apklausos atliekamos dažniau nei Lietuvoje, tačiau ir ten didelė gyventojų dalis neturi namie telefonų, taigi imties iškreiptis tebėra visų telefoninių apklausų problema.

Labiausiai tyrimai iškreipiami, kai imtis sudaroma tik iš tų individų, kurie patys prašosi į imtį. Tai, pavyzdžiui – laikraščių apklausos, kai skaitytojų prašoma atsakyti į laikraštyje išspausdintą anketą. Šiuo atveju respondentas turi ne tik pirkti (prenumeruoti) tą laikraštį, bet ir voką su pašto ženklu (už 20 ar daugiau centų). Žmonės, kurie nori sumokėti už tai, kad galėtų išreikšti savo nuomonę, vargu ar gali atspindėti visą populiaciją, todėl iš tokių apklausų surinkta informacija abejotina.

Tad „Literatūros apžvalgos“ apklausos istorija duoda dvi pamokas: 1) bloga didelė imtis yra daug blogiau negu gera maža imtis ir 2) reikia vengti ėmimo iškreipties ir neatsakymo iškreipties.

KVOTINĖS IMTYS

Kvotinę imtį pradėjo taikyti Dž. Gelapas dar 1935 metais, ir tuo metu šis imties metodas buvo laikomas pagrįsčiausiu. Jis pelnė gerą vardą, kai Dž. Gelapas sėkmingai pasinaudojo juo prognozuodamas 1936, 1940 ir 1944 metų prezidento rinkimų rezultatus. Kvotinis ėmimas – tai bandymas sudaryti imtį, kuri atitiktų visos populiacijos sudėtį pagal tam tikrus požymius: imtyje turi būti tam tikras skaičius moterų ir vyrų, jaunų ir senų, išsilavinusių ir mažamokslių, gyvenančių kaime ir mieste, ir t.t. Kiekvienos grupės narių imama tiek, kad imtyje būtų išlaikytos tokios pat proporcijos, kokios yra visoje gyventojų populiacijoje.

Įsivaizduokime, kad kvotomis atsižvelgiama į kiekvieną svarbią populiacijos charakteristiką. Tuomet natūralu tikėtis, kad **kvotinė imtis** bus tinkama, ir mūsų prognozės bus tikslios.

Tačiau tai nėra taip paprasta. Paviršutiniškai žiūrint, pagrindinė kvotinio ėmimo idėja išties yra gera – sudaryti imtį, kuri būtų mažas visos populiacijos modelis, tiksliai atkartojantis visų pagrindinių populiacijos charakteristikų proporcijas. Bet kokios gi populiacijos charakteristikos yra svarbios? Svarbu yra ir lytis, ir amžius, ir tautybė, ir išsilavinimas, ir materialinė padėtis, ir urbanizacijos lygis ir t.t. Čia ir kyla pirmoji iš problemų: o kada sustoti? Kad ir kiek būtume atidūs, visada galime praleisti kokį nors labai svarbų veiksnį, turintį įtakos individų elgesiui konkrečioje situacijoje, ir imtis būtų šiuo požiūriu iškreipta. Be to, mes ne visada tiksliai žinome tam tikrų populiacijos charakteristikų proporcijas – kas gali mums tiksliai pasakyti, kokia yra Lietuvos gyventojų materialinė padėtis? Materialinė padėtis nėra vien pajamos, kurias žmogus nuolat gauna, bet ir daiktai jo namuose. Statistikos departamentas gali pasakyti, koks yra vidutinis Lietuvos gyventojų uždarbis, bet niekas negali tiksliai suskaičiuoti, kiek gyventojai uždirba, augindami daržoves, plaudami automobilių langus ar pardavinėdami rankų darbo staltiesėles.

Dar rimtesnis kvotinės imties trūkumas yra tai, kad galutinis pasirinkimas, kas paklius į imtį, priklauso nuo klausėjų. Juk kai kvotos yra nustatytos, klausėjai gali laisvai pasirinkti, ką apklausti. Deja, klausėjai taip pat yra žmonės su savo pažiūromis, todėl, pasirinkdami respondentus ar klausinėdami, jie gali padaryti tam tikrą įtaką apklausos rezultatams (vadinamoji **klausėjų įtaka**).

Būtent dėl šių kvotinės imties trūkumų Dž. Gelapui 1948 metais nepavyko nuspėti, kad JAV prezidentu taps H. Trumenas, ir šio metodo teko atsisakyti.

Kvotinės imties metodo istorija duoda tokią pamoką: net imantis visų atsargumo priemonių, žmogaus įsikišimas į imties sudarymą gali ją iškreipti.

ATSITIKTINĖS IMTYS

Jei bet koks žmogaus kišimasis į imties sudarymą iškreipia imtį, tai kaip kitaip galima būtų sudaryti imtį? Atsakymas būtų toks – leisti atsitiktinumo dėsniams spręsti, kas turi pakliūti į imtį. Žinoma, sunkoka patikėti, kad geriausias būdas pasirinkti populiacijos atstovus yra panašus į laimingo loterijos bilieto traukimą. Juk net ir atsitiktinai imdami, galime gauti labai tendencingą imtį (sakykim, vienas moteris). Teoriškai tai įmanoma, bet kai imtis yra didelė, tikimybė, kad taip atsitiks, yra labai maža. Daugelis šiuolaikinių viešosios nuomonės apklausų atliekamos **atsitiktinės imties** metodais. Atsitiktinės imties pagrįstumas yra patvirtintas tiek praktine patirtimi, tiek ir matematikos teorija. Kai kuriuos šios teorijos dalykus mes aptarsime 16 skyriuje.

Pagrindinė atsitiktinės imties rūšis yra vadinamoji **paprastoji atsitiktinė imtis**. Ji užtikrina, kad bet kuri populiacijos narių grupė turi tokią pat galimybę patekti į imtį, kaip ir bet kuri kita, jei jos visos yra vienodo dydžio. Kitaip sakant, bet kuris populiacijos narys turi tokią pat galimybę patekti į imtį, kaip ir kitas populiacijos narys; bet kurie du populiacijos nariai turi tokią pat galimybę patekti į imtį, kaip ir kiti du nariai; bet kurie penki populiacijos nariai turi tokią pat galimybę patekti į imtį, kaip ir kiti penki nariai ir t.t.

Iš principo paprastoji atsitiktinė imtis gali būti atlikta taip: į kepurę sumetame korteles su kiekvieno populiacijos nario pavarde, jas gerai sumaišome, o tada ištraukiame tiek kortelių, kiek mums reikia imčiai. Žinoma, apie kepurę čia kalbama tik vaizdumo dėlei. Jei populiacijos dydis yra 2 milijonai rinkėjų, o mes norime paprastosios atsitiktinės imties būdu išrinkti 5 tūkstančius, tai sudėti visas korteles į kepurę ir ištraukti vieną po kitos tikriausiai nepavyktų. Dabar tam paprastai pasitelkiamas kompiuteris: sudaromas populiacijos narių sąrašas, jis įvedamas į kompiuterį ir leidžiama kompiuteriui atsitiktinai išrinkti pavardes.

Kokie sunkumai tyko mūsų, kai taikome paprastąją atsitiktinę imtį? Visų pirma, mums reikia turėti visų populiacijos narių sąrašą. Kaip jau minėjome skyriaus pradžioje, pati populiacija dažnai būna ne visiškai aiškiai apibūdinta. Net jeigu populiacija apibūdinta, tai dažnai sudaryti pilną jos narių sąrašą neįmanoma. Ar galime sužymėti visus vilkus ir sudaryti jų sąrašą? O ar įmanoma sudaryti tikslų visų Lietuvoje gyvenančių žmonių sąrašą? Atsakymas į abu šiuos klausimus yra neigiamas.

Kita rimta problema, kylanti taikant paprastosios atsitiktinės imties metodą, yra tyrimo kaina. Apklausti keletą tūkstančių žmonių, išrinktų atsitiktinai – tai ieškoti žmonių po visą šalį. Tam reikia daugybės laiko ir pinigų, o to neturi nė viena kompanija, atliekanti viešosios nuomonės apklausas, ypač jei ji tą daro reguliariai.

Kokią gi išeitį randa viešosios nuomonės apklausų kompanijos? Pasirodo, joms į pagalbą ateina modifikuoti atsitiktinės imties metodai. Vienas iš labiausiai paplitusių metodų yra sluoksninė imtis.

SLUOKSNINĖ IMTIS

Šiuolaikinių viešosios nuomonės tyrimų imties metodams yra keliami du prieštaringi reikalavimai: 1) maža imties iškreiptis ir 2) priimtina tyrimo kaina ir trukmė. Abu šiuos reikalavimus apytikriai tenkina sluoksninės imties metodas.

Pagrindinė šio metodo mintis tokia: pirmiausia populiacija suskirstoma į **sluoksnius** (vadinamuosius stratus), o tada iš kiekvieno sluoksnio imama atsitiktinė imtis.

Pagal kokius kriterijus populiacija suskirstoma į sluoksnius? Viešosios nuomonės apklausose į sluoksnius paprastai skirstoma derinant geografinius ir demografinius kriterijus. Pavyzdžiui, iš pradžių gyventojų populiacija yra suskirstoma į kategorijas pagal gyvenvietės dydį (didieji miestai, vidutiniai miestai, miesteliai, kaimai, vienkiemiai). Kiekviena iš šių kategorijų yra dalijama pagal geografinį regioną (Žemaitija, Aukštaitija, Suvalkija ir pan.). Taip gyventojai suskirstomi sluoksniais (pavyzdžiui, Žemaitijos vidutinių miestų gyventojai, Suvalkijos miestų gyventojai, Dzūkijos miestelių gyventojai ir t.t.). Po to iš kiekvieno sluoksnio imama atsitiktinė imtis (kurios dydis proporcingas sluoksnio dydžiui). Tokia dviejų etapų procedūra ir yra **sluoksninė imtis**.

Ką tik aprašytos procedūros antrajame etape buvo taikoma paprastoji atsitiktinė imtis. Dažnai čia patogesnė vadinamoji **daugiapakopė atsitiktinė imtis**. Jeigu sluoksniai pasirodo per dideli, vėl susiduriame su senomis bėdomis. Tada kiekvieną sluoksnį dalijame į **lizdus** (klasterius), ir atsitiktinai iš kiekvieno sluoksnio lizdų imame atsitiktinę imtį (palyginti nedaug lizdų). Jei ir tie lizdai per dideli, juos vėl dalijame į mažesnius lizdelius, vėl atsitiktinai imame lizdelių imtį ir t.t. Paskutiniame etape taikome paprastąją atsitiktinę imtį. Mūsų pavyzdyje tai atrodytų maždaug taip. Pavyzdžiui, Žemaitijos vidutinių miestų gyventojai (sluoksnis) yra natūraliai suskirstyti į lizdus – kiekvieno miesto gyventojus. Iš tų miestų atsitiktinai išrenkami keli. Išrinktuose miestuose atsitiktinai išsirenkami keli kvartalai. Šie kvartalai savo ruožtu dalijami į dar smulkesnius vienetus, vadinamus apylinkėmis, ir kiekviename kvartale atsitiktinai pasirenkamos kelios apylinkės. Atskirose apylinkėse gyvenančių žmonių sąrašai jau nėra tokie dideli, todėl, pasirenkant konkrečius respondentus, taikoma paprastoji atsitiktinė imtis.

Sluoksninės (ypač daugiapakopės) atsitiktinės imties privalumai lyginant su paprastąja atsitiktine imtimi yra akivaizdūs. Imties nariai yra sugrupuojami į aiškiai apibrėžtas ir glaudžias sritis, todėl apklausos kaina ir sugaištas laikas yra gerokai mažesnis. Kiekvienas populiacijos narys turi vienodus šansus pakliūti į imtį, ir tai lemia mažą imties iškreiptį (nors, pavyzdžiui, du kaimynai turi daugiau šansų kartu pakliūti į sluoksninę (daugiapakopę) imtį, negu du skirtingų miestų gyventojai). Todėl šiandien dauguma viešosios nuomonės tyrimo kompanijų remiasi viena ar kita sluoksninės imties modifikacija (ir garantuoja mažesnę kaip 3% paklaidą).

EKSPERIMENTAS

Iki šiol nagrinėjome situacijas, kai tyrėjas gali gauti objektyvią informaciją iš pačių populiacijos narių, užduodamas klausimus: jei rytoj vyktų rinkimai į Seimą, už kokią partiją jūs balsuotumėte? Kiek vaikų gyvena kartu su Jumis? Kokias TV laidas jūs vakar žiūrėjote? ir t.t. Mes sprendėme tik duomenų rinkimo problemas: ar reikia apklausti visus populiacijos narius, ar užtenka

apklausti tik tam tikrą jų dalį, kokio dydžio turi būti imtis, kaip ji turi būti sudaroma ir t.t.

Visai kitos duomenų rinkimo problemos iškyla, kai į keliamus klausimus nėra aiškaus tiesioginio atsakymo. Ar rūkymas pavojingas sveikatai? Ar reguliarus pamokų lankymas padeda geriau išlaikyti matematikos egzaminą? Ar kava padeda geriau sutelkti dėmesį? Visi šie klausimai turi du bendrus dalykus: 1) juose suformuluota priežastis ir pasekmė ir 2) atsakymai reikalauja ilgalaikio stebėjimo.

Norint atsakyti į tokios rūšies klausimus, reikia atlikti tam tikrą **eksperimentą**. Jei norime sužinoti, ar tam tikra priežastis X sukelia tam tikrą pasekmę Y, atliekame eksperimentą, kuriuo galima nustatyti priežasties X pasekmes. Jei atsiranda pasekmė Y, tikėtina, kad X iš tikrųjų buvo pasekmės Y priežastis. Tačiau visuomet yra tikimybė (ir tai neduoda mums ramybės), kad kuri nors kita priežastis, o visai ne X sukėlė pasekmę Y (o X iš viso neturi su tuo nieko bendra!).

Štai jums išgalvotas, bet visai įmanomas pavyzdys. Tarkime, kad mes norime išsiaiškinti, ar didelis šokolado kiekis kasdieniniame racione didina riziką tapti diabetiku. Čia priežastis X yra didelis šokolado kiekis racione, o pasekmė Y yra diabetas. Atlikime tokį eksperimentą: 100 žiurkių duokime šešis mėnesius kasdien po pusę kilogramo šokolado. Po 6 mėnesių 15 žiurkių iš 100 suserga diabetu. Kadangi visoje žiurkių populiacijoje yra tik 3% diabetikių, išvada turėtų būti tokia: diabetas iš tikrųjų yra perdėto maitinimo šokoladu rezultatas. Deja, nėra jokios garantijos, kad būtent šokoladas sukėlė diabetą. Gal gali būti kita, nežinoma priežastis, sukėlusi tokias pasekmes? Gal tai gali būti tiriamų žiurkių judėjimo stoka? Galbūt ne pats šokoladas, o tik labai didelis jo kaloringumas yra diabeto priežastis? Galbūt tai yra šios atskiros žiurkių grupės genetinis polinkis? Juk dažniausiai gyvenime pasekmė gali turėti daug galimų ir įmanomų priežasčių.

Į tokius klausimus gali būti atsakyta tik rūpestingai suplanuotais ir atliktais eksperimentais.

Svarbiausia bet kurio eksperimento sąlyga yra atskirti veiksnį, kurio poveikį norime tirti, nuo visų kitų poveikių, galinčių sukelti tą pačią pasekmę. Eksperimento metu tiriamos dvi grupės: **bandomoji grupė** ir **kontrolinė grupė**. Pagal savo sudėtį ir eksperimento sąlygas šios grupės turi būti vienodos, be to, kiek įmanoma, jos turi atitikti populiaciją, kuri yra tiriama. Vienintelis skirtumas yra tas, kad eksperimentinė grupė yra paveikiama, o kontrolinė – ne. Kontrolinė grupė yra reikalinga tik palyginimui. Jei yra priežasties ir pasekmės ryšys tarp mūsų tiriamo veiksnio ir laukiamos pasekmės, tuomet bandomojoje grupėje ši pasekmė turi atsirasti, o kontrolinėje – ne. Jei taip atsitinka, galime pagrįstai teigti, kad šis veiksnys yra tos pasekmės priežastis.

Bet koks eksperimentas, kuriame priežasties ir pasekmės ryšys yra tikrinamas lyginant bandomosios ir kontrolinės grupės rezultatus, yra vadinamas **kontroliuojamuoju eksperimentu**. Šis metodas labai plačiai taikomas psichologijoje ir medicinoje (aprobuojant naujus vaistus, vakcinas ir pan.).

Poliomielito vakcinos bandymai

Poliomielitas (kūdikių paralyžius) praktiškai jau su šaknimis išrautas. Tačiau dar dvidešimtojo amžiaus pirmoje pusėje tai buvo baisi liga. Reikėjo sukurti nuo jo patikimą vakciną. Galų gale tai 1953 metais padarė J. Salkas (Jonas Salk) iš Pitsburgo (JAV) universiteto. Kaip įsitikinti vakcinos efektyvumu?

Bet kurios naujos vakcinos ar vaistų testavimas sukuria daug etinių problemų – jei vakcina yra netinkama, mes rizikuojame žmonių gyvybėmis!

Galų gale buvo nuspręsta, kad poliomielito vakcinos efektyvumas bus tikrinamas kontroliuojamojo eksperimento būdu: bandomoji grupė gaus tikrą vakciną, o kontrolinė grupė – nekenksmingą fiziologinį tirpalą. Tokios rūšies eksperimentas yra vadinamas **kontroliuojamuoju placebo eksperimentu**. Kontrolinės grupės nariai gauna netikrą poveikį (netikrą vakciną, netikrus vaistus ir pan.), kuris yra vadinamas **placebu**. Placebas reikalingas tam, kad bandomoji ir kontrolinė grupės būtų kiek galima labiau panašios visais atžvilgiais, žinoma, išskyrus tai, kad viena grupė gauna tikrą vakciną, o kita tik placebą. Gerai žinoma, kad vien žinojimas (psichologinis nusiteikimas), jog esi gydomas, gali sukelti tam tikrų pokyčių organizme. Būtent dėl šio efekto, vadinamo **placebo efektu**, medicininiuose tyrimuose yra plačiai taikomas kontroliuojamasis placebo eksperimentas.

Suprantama, atliekant kontroliuojamąjį placebo eksperimentą, visada norima, kad nei bandomosios, nei kontrolinės grupės nariai nežinotų, kuriai iš dviejų grupių priklauso. Jei laikomasi tokios sąlygos, eksperimentas vadinamas **akluoju**. Be to, siekiama, kad tyrėjai, atliekantys eksperimentą, taip pat nežinotų, kuriems individams duodamas placebas. Visų šių reikalavimų tikslas yra laiduoti eksperimento bei rezultatų analizės nešališkumą. Kontroliuojamasis eksperimentas, kurio metu nei tiriamieji, nei tyrėjai nežino, kuri grupė yra bandomoji, o kuri kontrolinė, yra vadinamas **dvigubai aklu eksperimentu**. Atlikti dvigubai aklą eksperimentą poliomielito vakcinos testavimo atveju buvo ypač svarbu, kadangi poliomielitas nėra liga, kurią galima lengvai diagnozuoti – ji būna daugelio skirtingų formų ir skirtingų laipsnių. Kartais ją lydi tam tikri simptomai, ir jeigu gydytojas iš anksto žino, ar ligonis gavo tikrą vakciną ar ne, jis gali subjektyviai vienaip ar kitaip pakreipti diagnozę.

Po šios įžangos pereisime prie šio eksperimento aprašymo. 1954 metais apie 750 000 vaikų buvo atsitiktinai pasirinkti dalyvauti tyrime. Iš jų apie 340 000 atsisakė, o dar 8 500 iškrito bandymo metu. Likusieji vaikai buvo padalyti į dvi grupes – bandomąją grupę ir kontrolinę grupę – maždaug po 200 000 vaikų kiekvienoje grupėje. Kiekviena iš grupių buvo sudaryta atsitiktinio ėmimo metodu. (Eksperimentas, kuriame eksperimentinė ir bandomoji

grupės sudaromos atsitiktinio ėmimo metodu, vadinamas **atsitiktiniu kontroliuojamuoju eksperimentu**.) Kai kurie eksperimento skaičiai ir rezultatai pateikti 13.1 lentelėje. Nors 13.1 lentelėje yra tik maža dalis duomenų, surinktų eksperimento metu, gana gerai matyti, kad skirtumas tarp bandomosios ir kontrolinės grupės didelis, ir tyrėjai drąsiai galėjo teigti, kad vakcina yra efektyvi.

	Vaikų skaičius	Susirgusių poliomielitu vaikų skaičius	Poliomielito sukelto paralyžiaus atvejų skaičius	Mirties atvejų skaičius
Bandomoji grupė	200 745	82	33	0
Kontrolinė grupė	201 229	162	115	4
Atsisakė dalyvauti eksperimente	338 778	182	121	0
Iškrito eksperimento metu	8 484	2	1	0
Iš viso	749 236	428	270	4

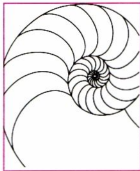
13.1 lentelė.

IŠVADOS

Šiame skyriuje aptarėme duomenų rinkimą. Šiaipjau geriausias būdas rinkti duomenis būtų ištisinis tyrimas, kai duomenys renkami iš kiekvieno populiacijos nario. Bet daugeliu atvejų, atsižvelgiant į išlaidas ir laiko sąnaudas, ištisinis tyrimas yra visiškai nerealus. Jei duomenys renkami tik iš dalies populiacijos (imties), duomenų rinkimo metodas yra vadinamas pasirinktiniu tyrimu. Svarbiausia gero tyrimo taisyklė yra pašalinti arba kiek galima sumažinti imties iškreiptį. Šiandien beveik visada, sudarant imtis, yra remiamasi atsitiktinumu, ir tokie duomenų rinkimo metodai yra vadinami atsitiktinės imties metodais. Atsitiktinė imtis yra geriausias būdas pašalinti ar sumažinti imties iškreiptį. Du labiausiai paplitę atsitiktinės imties metodai yra paprastoji atsitiktinė imtis ir sluoksninė atsitiktinė imtis. Kai kada gali būti naudojamasi sudėtingesniais imties metodais.

Kartais vien tik imties neužtenka. Tais atvejais, kai kalbama apie priežastinius ryšius, atsakymą galima gauti tik atlikus sudėtingą tyrimą, vadinamą eksperimentu. Norint gauti patikimus rezultatus, yra būtina atskirti nagrinėjamą veiksnį nuo kitų veiksnių, galinčių sukelti tą pačią pasekmę. Dažniausiai tai pasiekiama kontroliuojamuoju eksperimentu, kurio metu imtis yra padalijama į bandomąją (gaunančią poveikį) ir kontrolinę (negaunančią poveikio) grupes. Kontroliuojamieji eksperimentai yra plačiai taikomi moksle ir medicinoje.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



aklasis eksperimentas
atsakymo lygmuo
atsitiktinis kontroliuojamasis eksperimentas
atsitiktinė imtis
atsitiktinė paklaida
bandomoji grupė
daugiapakopė atsitiktinė imtis
duomenys
dvigubai aklas eksperimentas
ėmimo iškreiptis
imčių kintamumas
imties iškreiptis
imties koeficientas
imties paklaida
imtis
ištisinis tyrimas
klausėjų įtaka
kontrolinė grupė
kontroliuojamasis placebo eksperimentas
kvotinė imtis
neatsakymo iškreiptis
paprastoji atsitiktinė imtis
parametras
pasirinktinis tyrimas
placebas
placebo efektas
populiacija
sluoksniai
sluoksninė imtis
statistika

PRATIMAI

Apšilimas

1–4 *pratimuose kalbama apie tokį tyrimą. Vienas populiarus žurnalas paprašė savo skaitytojų atsakyti, ar jie meluoja savo antrajai pusei, ar ne. Skaitytojų atsakymai susumuoti lentelėje*:

	Moterys	Vyrai
Nemeluoja	127 318	44 807
Meluoja	22 468	15 743
Iš viso	149 786	60 550

Remdamasis šio tyrimo rezultatais, žurnalas padarė išvadą, kad yra daug daugiau darnių vedybinių porų, negu paprastai manoma.

1. a) Aprašykite kiek galima smulkiau šio tyrimo populiaciją.
b) Koks buvo imties dydis?
c) Kaip buvo sudaryta imtis?
d) 85% moterų, atsiliepusių į šią apklausą, sakėsi nemeluojančios. Ar skaičius 85% yra parametras? Statistika? Nei viena, nei kita? Pagrįskite savo atsakymą.

2. a) Paaiškinkite, kodėl šio tyrimo imtis galėjo būti iškreipta.
b) Paaiškinkite, kodėl šiam tyrimui grėsė neatsakymo iškreiptis.

3. a) Remdamiesi žurnalo duomenimis, apskaičiuokite procentinį santykį vedusių vyrų, nemeluojančių savo žmonoms.
b) Remdamiesi žurnalo duomenimis, apskaičiuokite procentinį santykį vedusiųjų, nemeluojančių savo sutuoktiniams.
c) Kiek jūsų nuomone tikslūs šie įvertinimai? Paaiškinkite.

4. Jei pinigai nerūpėtų, ar galėtumėte suplanuoti tyrimą, kuris duotų tikslesnius duomenis, negu šis? Trumpai aprašykite, ką jūs darytumėte.

5–8 *pratimuose nagrinėjama tokia situacija. Miesto savivaldybė norėjo sužinoti, ar gyventojai pritaria senojo parko atkūrimui miesto centre. Buvo nuspręsta atlikti tokį tyrimą: samdomi penki profesionalūs klausėjai (A, B, C, D ir E), kurių kiekvienas turi laisvai pasirinkti gatvės kampą. Kiekvieną dieną nuo* 16 *iki* 18 *valandos klausėjai turi paklausti kiekvieną praeivį, ar jis sutinka dalyvauti tyrime, o praeiviui sutikus, jo prašoma atsakyti į tokį klausimą: Ar jūs pritariate, ar nepritariate senojo parko atkūrimui už visuomenines lėšas? Kiekvienas klausėjas dirba tol, kol apklausia* 100 *žmonių. Buvo surinkti tokie duomenys.*

Klausėjas	Pritaria	Nepritaria	Atsisakė dalyvauti apklausoje
A	35	65	321
B	21	79	208
C	58	42	103
D	78	22	87
E	12	63	594 (šis klausėjas nebaigė apklausos)

5. a) Kiek galima smulkiau aprašykite šio tyrimo populiaciją.
b) Koks yra imties dydis?

6. a) Apskaičiuokite šio tyrimo atsakymo lygmenį.
b) Paaiškinkite, kodėl šiam tyrimui gresia neatsakymo iškreiptis.

7. a) Kuo galite paaiškinti tokius didelius skirtumus tarp skirtingų klausėjų duomenų?
b) Vienas iš klausėjų atliko apklausą miesto centre. Kuris? Atsakymą pagrįskite.
c) Kaip jūs manote, ar šiam tyrimui gresia klausėjų įtaka? Paaiškinkite.
d) Ar šiame tyrime buvo taikoma kvotinė imtis?

8. Kaip jūs manote, ar tai geras tyrimas? Jei jūs būtumėte savivaldybės konsultantas, ar galėtumėte pasiūlyti kokių nors pagerinimų? Smulkiai paaiškinkite.

9–12 pratimuose nagrinėjamas toks tyrimas. Seniūnija, siekdama tinkamiau suplanuoti savo biudžetą, norėtų sužinoti, kiek gyventojų ketina artimiausiu metu įsigyti vandens skaitiklius. Seniūnijai priklauso 15 000 *butų. Buvo nuspręsta, kad kiekvieno buto gyventojų apklausos išlaidos būtų per didelės, todėl pasiūlytas toks metodas. Imamas visų butų sąrašas, sudarytas pagal abonentinės mokesčių knygelės numerius didėjimo tvarka. Atsitiktinai pasirenkamas skaičius tarp* 1 *ir* 100 *ir einama tuo sąrašu žemyn, imant tą butą, kuris turi šį numerį ir kiekvieną šimtąjį po jo (pavyzdžiui, jei atsitiktinai pasirinktas skaičius yra* 73, *tai iš sąrašo imami* 73, 173, 273 *ir t.t. butai). Tarkime, kad tyrimo atsakymo lygmuo yra* 0,95.

9. a) Nustatykite šio tyrimo populiaciją.
b) Pasakykite tikslią N reikšmę.

10. a) Raskite imties dydį n.
b) Raskite imties koeficientą.

11. a) Ar šis tyrimas gali nukentėti nuo imties iškreipties? Paaiškinkite.
b) Paaiškinkite, kodėl šis metodas nėra paprastoji atsitiktinė imtis.

12. Kaip jūs manote – ar šio tyrimo rezultatai bus patikimi? Paaiškinkite.

Treniruotė

13–16 pratimuose nagrinėjamas toks tyrimas. Didelė farmacijos korporacija sukūrė naują vaistą X ir nusprendė ištirti jo veiksmingumą gydant paprasčiausią persišaldymą. Penkiems šimtams persišaldžiusių sostinės moksleivių buvo sumokėta už dalyvavimą tyrime. Jie visi gavo po dvi vaisto X tabletes per dieną. Remiantis informacija, gauta iš pačių ligonių, 457 *iš* 500 *išsigydė nuo persišaldymo per* 3 *dienas. Vidutiniškai peršalimas tęsiasi* 4,87 *dienos. Remdamasis šio tyrimo rezultatais, gamintojas paskelbė, kad „vaistas X yra* 90% *veiksmingas gydant persišaldymą“.*

13. a) Kiek galėdami smulkiau aprašykite galimą šio tyrimo populiaciją.
b) Kaip buvo sudaroma imtis?
c) Koks buvo imties dydis n?
d) Ar šis sveikatos tyrimas yra kontroliuojamasis eksperimentas?

14. a) Kaip jūs manote – ar placebo efektas suvaidintų kokį nors vaidmenį šiame tyrime?
b) Išvardykite kitas tris galimas priežastis, nepaisydami vaisto X veiksmingumo, kurios galėjo paveikti šio tyrimo rezultatus.

15. Išvardykite keturis šio tyrimo trūkumus, kurie liudija prastą jo parengimą.

16. Pateikite keletą pasiūlymų, kaip pagerinti šį tyrimą.

21–24 *pratimuose nagrinėjama tokia išgalvota situacija. Universiteto profesorius paskelbė teoriją, kad* 10 *miligramų kofeino dozė per dieną gali pagerinti studentų mokslo rezultatus. Tikrindamas šią teoriją jis išsirinko* 13 *pirmojo kurso psichologijos studentų, kurie vos gavo patenkinamus pažymius pirmajame semestre, ir paprašė juos ateiti pas jį tris kartus per savaitę „individualioms konsultacijoms". Studentui atėjus į jo kabinetą, jis draugiškai su juo pasišnekučiuodavo ir pavaišindavo keliais puodeliais stiprios kavos. Tai jis darė visą mėnesį ir nustatė, kad iš* 13 *studentų antrajame semestre* 8 *gavo kur kas geresnius pažymius,* 3 *– šiek tiek geresnius, o dviejų studentų pažymiai nepagerėjo. Tuo remdamasis, profesorius padarė išvadą, kad jo prielaida pasitvirtino.*

17. Kuri iš šių sąvokų geriausiai aprašo profesoriaus tyrimą: i) atsitiktinis kontroliuojamasis eksperimentas, ii) dvigubai aklas eksperimentas, iii) kontroliuojamasis placebo eksperimentas, iv) eksperimentas? Paaiškinkite savo pasirinkimą. Kodėl jūs atmetėte kitas galimybes?

18. Išvardykite bent tris kitus (be kofeino poveikio) veiksnius, kurie galėjo paveikti tyrimo rezultatus.

19. Patarkite profesoriui, kaip būtų galima pagerinti tyrimą.

20. **Neformalūs tyrimai**. Kasdieniniame gyvenime mes nuolatos atliekame tokius veiksmus, kurie gali būti apibūdinti kaip neformalūs tyrimai. Štai keletas pavyzdžių:

i) Alius rytą atsikelia ir nori sužinoti, kokia bus diena. Jis žvilgteli pro langą, nemato lietaus debesų, todėl nusprendžia, kad nelis.

ii) Birutė gurkšteli iš puodelio kavos ir nusitvilko lūpas. Ji daro išvadą, kad kava per karšta ir nusprendžia įpilti į ją truputį šalto vandens.

iii) Danutė eina pas gydytoją pasitikrinti. Seselė iš jos dešinės rankos paima 5 ml kraujo ir nusiunčia į laboratoriją. Laboratorijos atsakymas yra neigiamas visoms tirtoms ligoms.

Kiekviename iš išvardytų pavyzdžių:

a) Nustatykite populiaciją.

b) Aptarkite, ar imtis yra atsitiktinė, ar ne.

c) Aptarkite išvadų pagrįstumą kiekvienu atveju. (Nėra nei teisingo, nei klaidingo požiūrio, bet jūs turite protingai paaiškinti savo poziciją.)

21. Persiskaitykite 20 pratimo neformalių tyrimų pavyzdžius. Pateikite dar tris savo pavyzdžius. Pasistenkite, kad jūsų pavyzdžiai kuo daugiau skirtųsi nuo 20 pratimo pavydžių (neužtenka kavą pakeisti arbata!).

22. Klausimo iškreiptis. Jei klausimas yra suformuluotas taip, kad iš anksto nuteikia respondentą duoti tam tikrą atsakymą, tai sakoma, kad tyrimui kenkia klausimo iškreiptis. Štai jums tokia išgalvota situacija.

Vienas visuomeninis judėjimas, visur ir visada kritikuojantis vyriausybę, nusprendė savo kritiką paremti „objektyviais“ duomenimis ir atliko „mokslinę“ apklausą. Pagrindinis apklausos klausimas buvo suformuluotas taip:

Ar jūs pritariate mokesčių didinimui remiant vyriausybę ir jos beveiksmę ekonominę politiką bei biudžeto nevaldymą? Taip —— Ne ——

Devyniasdešimt penki procentai apklaustųjų atsakė „ne“. Tyrimo rezultatus organizatoriai apibendrino tokiu sakiniu:

Viešosios nuomonės apklausos rodo, kad 95% *gyventojų yra prieš mokesčių didinimą.*

a) Paaiškinkite, kodėl šio tyrimo rezultatai gali būti iškreipti.
b) Perfrazuokite klausimą taip, kad jis skambėtų neutraliai.
c) Sudarykite savo tendencingą klausimą. Paaiškinkite, kodėl jis tendencingas.

23. Ženklinimo metodas. Dažnai yra sunku nustatyti tikslų laukinės (kartais ir žmonių) populiacijos dydį. Norėdami apskaičiuoti laukinės populiacijos dydį, biologai dažnai naudojasi vadinamuoju ženklinimo metodu. Pagrindinė šio metodo mintis yra sugauti dydžio n_1 imtį, paženklinti gyvūnus nedarant jiems žalos ir paleisti. Po tam tikro laiko sugaunama nauja dydžio n_2 imtis ir suskaičiuojamas paženklintųjų gyvūnų skaičius k. Esant palankioms sąlygoms, visos populiacijos dydis gali būti apytiksliai apskaičiuotas iš n_1, n_2 ir k reikšmių. Šio pratimo tikslas yra pasiaiškinti, kaip tai daroma.

a) Jūs turite nedidelį tvenkinį ir norite įvertinti, kiek jame yra žuvų. Tarkime, kad jūs sugavote $n_1 = 500$ žuvų, sužymėjote jas ir paleidote atgal į tvenkinį. Po poros dienų jūs tvenkinyje sugaunate $n_2 = 120$ žuvų, iš kurių $k = 30$ yra žymėtosios. Pagal n_1, n_2 ir k reikšmes apskaičiuokite tvenkinio žuvų populiacijos dydį N.
b) Parašykite formulę, pagal kurią galima suskaičiuoti N, turint n_1, n_2 ir k reikšmes.
c) Surašykite visas prielaidas, kurios jūsų nuomone turi būti padarytos šių dviejų imčių atveju, kad ženklinimo metodas duotų patenkinamą N įvertį.
d) Nurodykite priežastis, dėl kurių daugeliu atveju punkto c) prielaidos gali būti pažeistos.

e) Norint apskaičiuoti ruonių jauniklių populiaciją perykloje, 4965 ruonių jauniklių buvo sugauti ir paženklinti rugpjūčio pradžioje. Rugpjūčio pabaigoje buvo pagauti 900 ruonių jauniklių. Iš jų 218 buvo paženklinti. Remdamiesi šiais skaičiais, apskaičiuokite kailinių ruonių jauniklių populiaciją perykloje šimto tikslumu.

Varžybos

24. Išnagrinėkime dar vieną išgalvotą situaciją. Nauji vaistai gydyti AIDS turi būti išbandyti eksperimentu. Bandymai su laboratoriniais gyvūnais parodė, kad vaistai labai efektyvūs gydant ligą, bet sukelia daug pašalinių pasekmių, įskaitant rimtus inkstų negalavimus apie 20% gyvūnų.

a) Į kokias etines ir moralines problemas, jūsų nuomone, reikėtų atsižvelgti planuojant šių vaistų bandymus?

b) Aprašykite, kaip jūs suplanuotumėte šių naujų vaistų bandymus. (Pavyzdžiui, kaip jūs pasirinktumėte eksperimento dalyvius, bandomąją ir kontrolinę grupes, ir t.t.)



14 Aprašomoji statistika

Kalbėti paprastai apie svarbius dalykus – aukštos kultūros požymis.
R. V. EMERSONAS (RALPH WALDO EMERSON)

Duomenų grafinis vaizdavimas ir apdorojimas

13 skyriuje aptarėme įvairius statistinių duomenų rinkimo aspektus. O ką daryti su duomenimis, juos surinkus?

Dažniausiai duomenys renkami visuomenei – ir ne tik jai informuoti, bet ir kuo nors ją įtikinti. Paradoksalu, bet surinktų duomenų dažnai būna ir *„per daug"*. Iš savo patirties žinome, jog gaunamos informacijos kiekiui pasiekus tam tikrą ribą, mūsų protas jau nebepajėgia jos priimti ar net suvokti. Šio keblumo galima bandyti išvengti dvejopai. Pirma – pateikti duomenis grafiškai, nes vaizdinę informaciją paprastai suvokiame geriau už skaičius; antra – naudotis skaičių suvestinėmis, tam tikrais duomenų „koncentratais". Dažnai šie būdai derinami, naudojantis vienu metu ir grafiniais vaizdais, ir skaitinėmis suvestinėmis.

Šiame skyriuje aptarsime duomenų pateikimo būdus. Ši statistikos sritis vadinama **aprašomąja statistika**. Pagrindinis jos tikslas yra glaustai ir tiksliai išreikšti duomenų informaciją.

GRAFINIS DUOMENŲ VAIZDAVIMAS

Sena tiesa „geriau vieną kartą pamatyti, negu šimtą kartų išgirsti“ visiškai tinka ir aprašomajai statistikai, – čia vienas paveikslas gali atstoti tūkstantį plikų skaičių (statistikai šiuos atskirus skaičius vadina **duomenų reikšmėmis**, arba **duomenų taškais**).

Grafinį duomenų vaizdavimą nagrinėti pradėsime pavyzdžiu.

1 pavyzdys. (**Profesoriaus Kirvaičio statistikos egzamino balai**.) Profesorius Kirvaitis yra žinomas Mokslamiesčio universitete kaip negailestingas egzaminatorius. Paskutinio egzamino rezultatus matome 14.1 lentelėje.

Kodas	Balas	Kodas	Balas	Kodas	Balas	Kodas	Balas	Kodas	Balas
1257	12	2651	10	4355	8	6336	11	8007	13
1297	16	2658	11	4396	7	6510	13	8041	9
1348	11	2794	9	4445	11	6622	11	8129	11
1379	24	2795	13	4787	11	6754	8	8366	13
1450	9	2833	10	4855	14	6798	9	8493	8
1506	10	2905	10	4944	6	6873	9	8522	8
1731	14	3269	13	5298	11	6931	12	8664	10
1753	8	3284	15	5434	13	7041	13	8767	7
1818	12	3310	11	5604	10	7196	13	9128	10
2030	12	3596	9	5644	9	7292	12	9380	9
2058	11	3906	14	5689	11	7362	10	9424	10
2462	10	4042	10	5736	10	7503	10	9541	8
2489	11	4124	12	5852	9	7616	14	9928	15
2542	10	4204	12	5877	9	7629	14	9953	11
2619	1	4224	10	5906	12	7961	12	9973	10

14.1 lentelė. Tarpinio statistikos kurso egzamino balai (iš 25 galimų balų). $N = 75$.

Šiame pavyzdyje egzaminuotų studentų skaičius $N = 75$. Kiekvienas iš 75 studentų turi savo kodą (anonimiškumo reikalavimas draudžia vartoti pavardes), o egzamino balai (sveikieji skaičiai nuo 0 iki 25) surašyti kiekvieno studento kodo dešinėje. Visas duomenų reikšmių rinkinys vadinamas **duomenų aibe**, arba **imtimi**. Taigi pavyzdžio duomenų aibė sudaryta iš visų egzamino balų (žinoma, studentų kodai nėra duomenys). Šia duomenų aibe naudosimės kelis kartus šiame ir vėlesniuose skyriuose. Toliau šią aibę vadinsime *egzamino duomenų aibe*, arba tiesiog *balų aibe*.

Kiek ir visiems, tiek ir profesoriaus Kirvaičio studentams visų pirma rūpi du klausimai, susiję su laikytu egzaminu: 1) Kaip pavyko man? 2) Kaip pavyko visai grupei? Atsakymą į pirmą klausimą galima tiesiog rasti 14.1 lentelėje, o štai norint atsakyti į antrąjį klausimą, reikia įdėti šiek tiek daugiau pastangų. Kaip glaustai perteikti visą 14.1 lentelėje esančią informaciją? Papasakosime apie kelis būdus.

Stulpelinės diagramos ir jų atmainos

Pirmasis būdas sutvarkyti duomenis – tai pateikti juos *dažnių lentele*.

Balas	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	24
Dažnis	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1

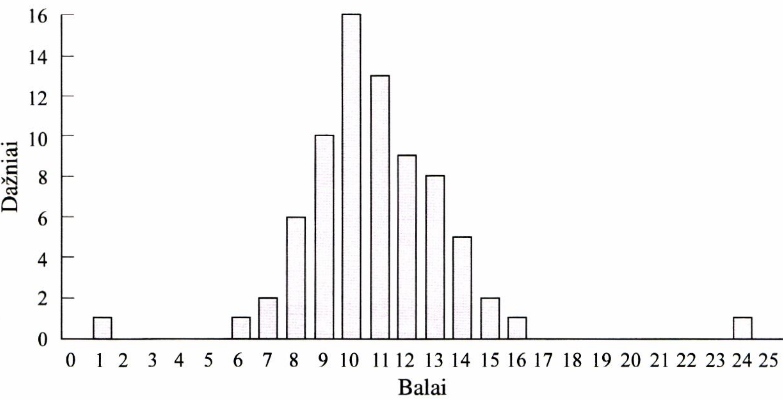
14.2 lentelė. Egzamino duomenų aibės dažnių lentelė.

Skaičius po kiekvienu egzamino pažymiu reiškia to balo **dažnį**, t.y. tą balą gavusių studentų skaičių. Matome, kad 16 studentų gavo po 10, du studentai – po 15 ir t.t. Beje lentelėje nerašomi tie balai, kurių negavo nė vienas studentas (t.y. kurių dažnis lygus 0).

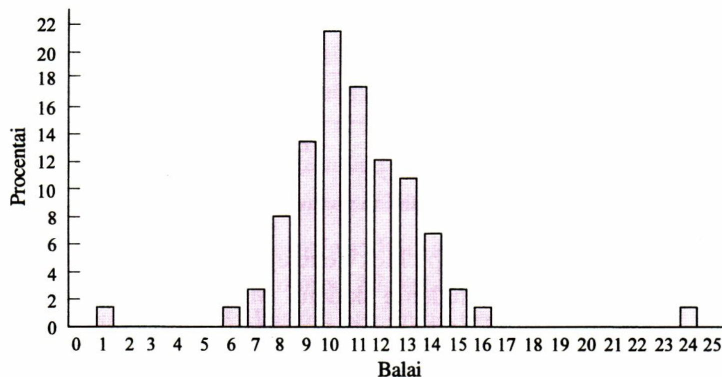
Nors 14.2 lentelė yra gerokai vaizdesnė už 14.1 lentelę, norėtųsi dar daugiau. 14.1 pav. pateikiama vadinamoji **stulpelinė diagrama** tą pačią informaciją daro dar vaizdesnę.

Stulpelinėje diagramoje dažnį atspindi stulpelio *aukštis*, ir, vos žvilgtelėję į ją, iš karto matome bendrą vaizdą. Panagrinėkime, pavyzdžiui, išskirčių nustatymo uždavinį. **Išskirtis** – tai duomenų reikšmė, išsiskirianti iš bendros visumos, t.y. reikšmė, kuri yra nenatūraliai didesnė arba mažesnė už kitas duomenų reikšmes. Vienas iš stulpelinių diagramų pranašumų yra tai, kad išskirtys jose įžvelgiamos plika akimi. 14.1 pav. diagramos atveju – tai vieno studento neįtikėtinai žemas balas (1) ir vieno studento neįprastai aukštas balas (24); abu šie balai – išskirtys. Suprantama, kad iš stulpelinės diagramos nematyti, kurie studentai gavo tą ar kitą balą – norėdamas tai nustatyti, profesorius Kirvaitis turėtų žvilgterėti į 14.1 lentelę.

Kartais patogiau dažnius pateikti ne konkrečiais skaičiais, o imties dydžio N procentais, ypač kai duomenų aibės yra labai didelės.



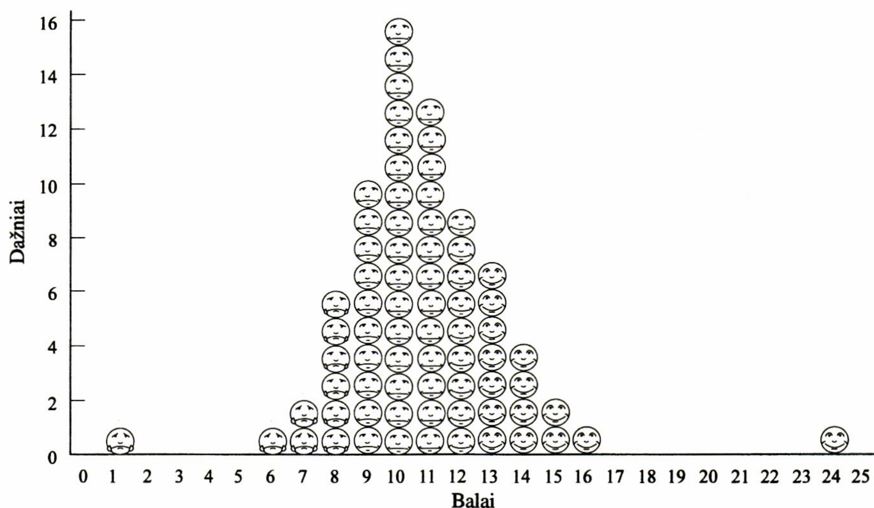
14.1 pav. Egzamino duomenų aibės stulpelinė diagrama.



14.2 pav. Egzamino duomenų aibės procentinė stulpelinė diagrama.

14.2 pav. matome stulpelinę diagramą, kurioje balą atitinkančio stulpelio aukštis rodo, kiek procentų bendro studentų skaičiaus gavo tą balą. Žymėjimai vertikaliojoje ašyje rodo, kad čia kalbama apie procentus, o ne absoliučius skaičius. Perėjimas nuo skaičių prie procentų nekeičia diagramos formos, nes iš esmės tai yra tik mastelio pakeitimas.

Nors terminu „stulpelinė diagrama“ dažniausiai vadinamos diagramos, panašios į parodytas 14.1 ir 14.2 pav., tačiau norint pagyvinti ar paryškinti plikos informacijos turinį, stulpelių brūkšnius galima pakeisti įdomesniais ženklais. Pavyzdžiui, profesorius Kirvaitis galėtų pavaizduoti egzamino rezultatus 14.3 pav. Čia pateikta ta pati 14.1 pav. informacija, o kartu neįkyriai parodyta, ką profesorius mano apie studentų žinias.

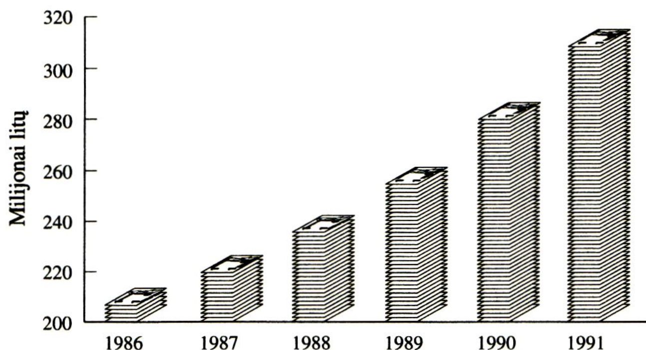


14.3 pav. Egzamino duomenų aibės dažnių diagrama.

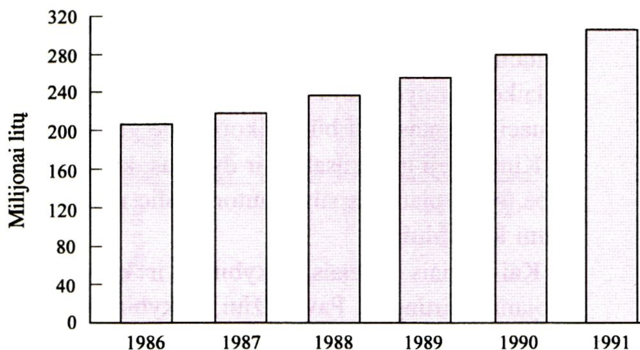
Beje, diagramomis dažnai siekiama ne tik informuoti, bet ir sudaryti įspūdį arba kuo nors įtikinti. Išradingas dažnių dydžių pavaizdavimas gali būti įtaigesnis negu įprastinis stulpelis. Štai dėl ko mes noriau vartosime terminą **dažnių diagrama** tokioms diagramoms kaip 14.3 ir 14.4 pav.

2 pavyzdys. 14.4 pav. pateikiama dažnių diagrama, rodanti „įspūdingą" korporacijos XYZ apyvartos augimą nuo 1986 iki 1991 metų.

14.5 pav. pavaizduota nuosaikesnė stulpelinė diagrama, pateikianti tą pačią informaciją realistiškiau. Toks didžiulis regimasis šių dviejų diagramų skirtumas yra susijęs su keliais veiksniais: 1) vertikaliosios ašies pradine reikšme, 2) vertikaliosios ašies masteliu, 3) grafiniais simboliais (pvz., banknotų stirtos 14.4 pav.).



14.4 pav. Dažnių diagrama. Korporacijos XYZ metinė apyvarta.



14.5 pav. Stulpelinė diagrama. Korporacijos XYZ metinė apyvarta.

2 pavyzdys padeda suprasti, kad grafinis duomenų vaizdavimas yra ir menas, ir mokslas, o diagramos įtaka auditorijai priklauso ne tik nuo pačių duomenų, bet ir nuo jų pateikimo. Būtent tai daro aprašomąją statistiką tokią patrauklią ir kartu pavojingą, ir čia ypač sunku apčiuopti skiriamąją ribą tarp objektyvumo ir, švelniai tariant, tikrovės pagražinimo.

KIEKYBINIAI IR KOKYBINIAI, TOLYDIEJI IR DISKRETIEJI KINTAMIEJI

Prieš pradedant nagrinėti diagramas, mums reikia trumpai paanalizuoti **kintamojo** sąvoką. Statistikų vartosenoje kintamasis yra dydis, kintantis kartu su imties nariais. Profesoriaus Kirvaičio studentai egzaminą laiko nevienodai, taigi *egzamino balas* – tai kintamasis, kurio reikšmės šiame konkrečiame pavyzdyje yra sveikieji skaičiai nuo 0 iki 25. Kai kuriais atvejais, pavyzdžiui, kai dėstytojas rašo kelių egzamino dalių vidutinius balus, egzamino rezultatas bus kintamasis, įgyjantis trupmenines reikšmes, pavyzdžiui, $18\frac{1}{2}$ ar net $18\frac{1}{4}$. Tačiau net ir šiais atvejais galimi kintamojo reikšmių pokyčiai yra nusakomi tam tikru minimaliu dydžiu – 1/4, 1/2 ir pan. Palyginimui imkime kitą kintamąjį – *laiką*, kurį studentas sugaišta laikydamas egzaminą. Šiuo atveju kintamasis gali įgyti reikšmes, besiskiriančias kiek norima mažu dydžiu – sekunde, dešimtadaliu sekundės, šimtąja sekundės dalimi ir t.t.

Kai kintamasis išreiškia matuojamą dydį, jis vadinamas **kiekybiniu kintamuoju.** Kiekybinis kintamasis vadinamas **tolydžiuoju**, jei skirtumas tarp kintamojo reikšmių gali būti kiek norima mažas. Jei kiekybinio kintamojo reikšmės gali skirtis ne mažiau kaip tam tikru minimaliu pokyčiu, kintamasis vadinamas **diskrečiuoju kintamuoju**. Diskrečiųjų kintamųjų pavyzdžiai yra IQ*, pulsas, batų dydis, šeimos dydis, išnuomotų automobilių skaičius, krepšinio rungtynių taškų skaičius. Tolydžiųjų kintamųjų pavyzdžiai – aukštis, svoris, pėdos dydis (kaip priešingybė batų dydžiui), laikas, per kurį nubėgama 100 metrų.

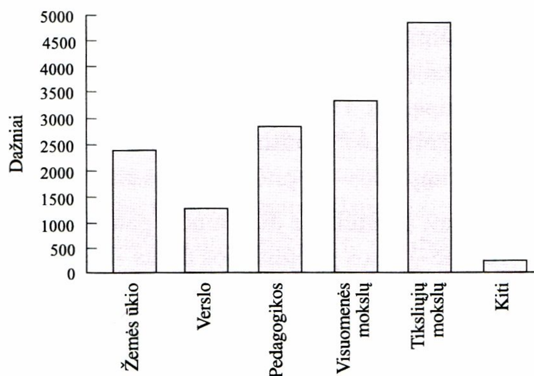
Kartais realiame pasaulyje nėra aiškaus skirtumo tarp tolydžiųjų ir diskrečiųjų kintamųjų. Aukštis, svoris, amžius – tai tolydieji kintamieji teoriškai, bet praktiškai jie dažnai yra apvalinami iki sveikojo centimetrų, kilogramų, metų (ar mėnesių, kai kalbama apie kūdikius) skaičiaus. Antra vertus, pinigai, kurie teoriškai yra diskretusis kintamasis (skirtumas tarp dviejų šio kintamojo reikšmių negali būti mažesnis už centą), beveik visada gali būti laikomi tolydžiuoju kintamuoju, kadangi daugumoje realių gyvenimiškų situacijų centas gali būti laikomas be galo mažu pinigų kiekiu.

Kintamieji gali nusakyti ir dydžius, kurių negalima įvertinti skaičiais: tautybė, lytis, plaukų spalva, automobilio markė ir t.t. Šio tipo kintamieji vadinami **kokybiniais**.

Kai kuriais atvejais kokybiniai ir kiekybiniai kintamieji turi būti traktuojami skirtingai. Pavyzdžiui, kokybiniai kintamieji negali būti sudedami, dauginami, vidurkinami. Tačiau kai kada su kokybiniais kintamaisiais gali būti elgiamasi labai panašiai kaip su diskrečiaisiais kiekybiniais kintamaisiais, ypač kai kalbama apie stulpelines arba dažnių diagramas.

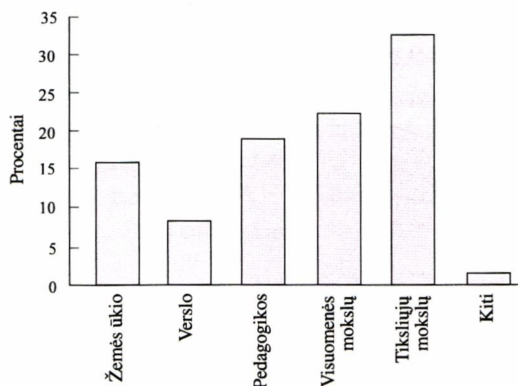
* *Intelligence quotient* – specialiu testu nustatomas rodiklis, nusakantis žmogaus protinių sugebėjimų lygį.

3 pavyzdys. 14.6 pav. stulpelinė diagrama rodo Mokslamiesčio universiteto studentų skaičių įvairiuose fakultetuose. Šiame pavyzdyje kintamasis yra fakultetas, kuriame mokosi studentas.



14.6 pav. Studentų skaičius Mokslamiesčio universiteto fakultetuose. $N = 15\,000$.

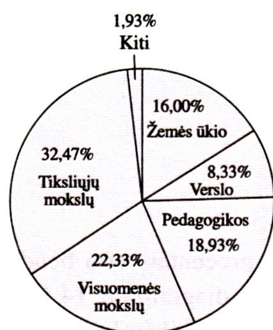
14.7 pav. diagramoje pateikta ta pati informacija procentais nuo bendro studentų skaičiaus. Praktiškai skirtumas tarp šių dviejų diagramų ir 14.1 bei 14.2 pav. pavaizduotų diagramų nedidelis, tik duomenų „reikšmės" čia yra *kategorijos* (kartais vadinamos *klasėmis*), o ne skaičiai.



14.7 pav. Studentų skaičius Mokslamiesčio universiteto fakultetuose procentais. $N = 15\,000$.

Kategorija, pažymėta žodžiu „kiti", dažnai pasitaiko stulpelinėse diagramose ir verta atskiro paaiškinimo. „Kiti" vartojama kaip patogi vieta populiacijos nariams, kurie nevisiškai tinka kuriai nors iš pagrindinių kategorijų (3 pavyzdyje – tai studentai, lankantys kelis fakultetus), arba kaip vieta, į kurią telpa kelios kategorijos, apimančios per mažas imties dalis, kad jos būtų nurodytos atskirai.

Kai kategorijų skaičius yra nedidelis, kaip 3 pavyzdyje, kitas dažnai naudojamas santykinių dažnių vaizdavimo būdas yra **skritulinė diagrama**. Skritulinėje diagramoje visas skritulys atitinka visą populiaciją (100%), o išpjovos atitinka kategorijas proporcingai jų santykiniam dažniui. Kai kuriuos santykinius dažnius, kaip 50%, 25% ir t.t., labai lengva pavaizduoti; o kaip tiksliai pavaizduoti sudėtingesnį dažnį, sakykime, 32,47%? Čia pravers truputis geometrijos žinių. Kadangi išpjovos plotas yra proporcingas išpjovos centriniam kampui, tai užtenka rasti atitinkamą centrinį kampą. Kadangi 100% atitinka 360° kampą, tai 1% lygus $360°/100 = 3{,}6°$. Iš čia gauname, kad, pavyzdžiui, dažnį 32,47% atitinka kampas $32{,}47 \cdot 3{,}6° = 117°$ (suapvalintas iki sveikojo laipsnio – to praktiškai visada pakanka).

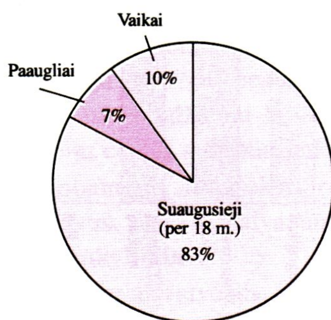


14.8 pav. Studentų skaičius Mokslamiesčio universiteto fakultetuose procentais. $N = 15\,000$.

14.8 pav. skritulinėje diagramoje pateikta ta pati informacija, kaip ir 14.7 pav. N reikšmė – visos populiacijos dydis – yra nurodyta po diagrama. Tada skaitytojas žino skaičių, kurio procentai vaizduojami skritulinėje diagramoje, ir, jei reikia, gali paversti šiuos procentus absoliučiais skaičiais. Pateikti populiacijos dydį N kartu su skrituline diagrama yra statistikos „geras tonas".

Stulpelinės ir skritulinės diagramos yra puikus būdas grafiškai pateikti kokybinius duomenis, bet, kaip visada, turime būti atsargūs ir iš diagramos nedaryti skubotų išvadų. Tai iliustruoja kitas mūsų pavyzdys.

4 pavyzdys. Remiantis tyrimų duomenimis, vakaro (nuo 20 iki 23 val.) televizijos žiūrovai pagal amžių procentais buvo suskirstyti taip: suaugusiųjų (18 metų ir vyresni) – 83%; paauglių (12–17 metų) – 7%; vaikų (2–11 metų) – 10%. 14.9 pav. skritulinė diagrama vaizduoja žiūrovų sudėtį.



14.9 pav. Vakaro televizijos žiūrovų sudėtis pagal amžiaus grupes.

Žiūrint į šią diagramą, atrodytų, kad bent jau vakarais nedaug vaikų ir paauglių žiūri televizorių. Ar ši išvada teisinga?

14.9 pav. diagrama nors ir tiksli, bet gali labai klaidinti: vaikai (2–11 metų) tesudaro 15% visų gyventojų, paaugliai (12–17) – tik 8%, o suaugusieji sudaro visą likusią dalį. Kadangi suaugusiųjų yra 5 kartus daugiau negu vaikų, tai argi stebėtina, kad žiūrinčių vakarais televizorių suaugusiųjų yra

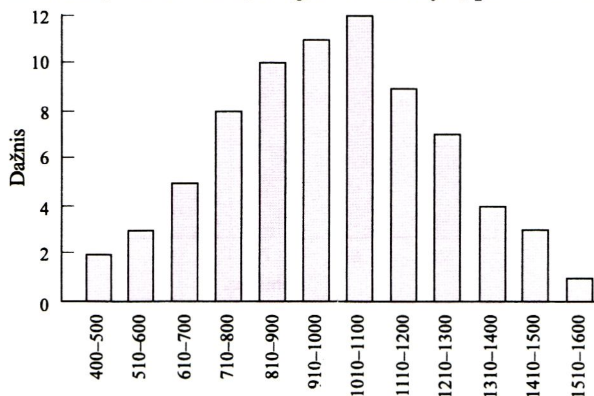
daugiau negu vaikų? Lygiai taip pat vakarais televizorių žiūrinčių vaikų absoliučiuoju skaičiumi yra daugiau negu paauglių, bet tai tik todėl, kad apskritai vaikų yra beveik dvigubai daugiau negu paauglių. Santykinai televizorių žiūri daugiau procentų paauglių (iš bendro paauglių skaičiaus) negu vaikų (tai visai nestebina, nes dauguma vaikų vakare eina miegoti apie 20 val.).

Šis pavyzdys rodo, kad absoliutūs procentiniai dydžiai (kaip 14.9 pav.) gali klaidinti. Lyginant populiacijos kategorijas, labai svarbu turėti mintyje santykinius įvairių kategorijų dydžius.

Grupavimo intervalai

Skirtumas tarp kokybinių ir kiekybinių duomenų yra svarbus įvairiais statistikos aspektais, bet kai tik norime kuo geriau grafiškai pavaizduoti populiacijos dažnius, pagrindinis tampa klausimas: į kelias kategorijas skirstyti duomenis? Kai kategorijų skaičius yra per didelis (pavyzdžiui, šimtai), tai stulpelinė arba dažnių diagrama gali būti perdaug marga ir todėl nevaizdi. Dėl kokybinių duomenų sunkumų paprastai nekyla, o dėl kiekybinių duomenų dažnai esti gana rimtų problemų: tolydusis kintamasis apskritai įgyja be galo daug reikšmių, o diskrečiojo kintamojo reikšmių skaičius gali būti per didelis bet kokiai priimtinai diagramai.

5 pavyzdys. Tarkime, kad kitame tyrime mus domina tų pačių studentų iš 1 pavyzdžio (klausiusių profesoriaus Kirvaičio statistikos kurso) sveikatingumo testo rezultatai, kintantys nuo 400 iki 1600 taškų su 10 taškų žingsniu. Kaip ir 1 pavyzdyje, mūsų duomenys yra diskretusis kiekybinis kintamasis (šiuo atveju sveikatingumo testo rezultatai). Nors teoriškai situacija nesiskiria nuo 1 pavyzdžio situacijos, tačiau praktiškai dėl didelio galimų rezultatų skaičiaus mes turime elgtis su tokiais duomenimis kitaip. Paprastai šioje situacijoje, prieš darant dažnių diagramą, galimos rezultatų reikšmės suskirstomos į **grupavimo intervalus**. Kaip juos pasirinkti, kiek jų turėtų būti, – tai skonio ir patirties dalykas. Šiame pavyzdyje patogu imti dvylika grupavimo intervalų. Tada mūsų diagrama atrodytų panašiai kaip 14.10 pav.



14.10 pav. Sveikatingumo testo rezultatai $N = 75$-iems prof. Kirvaičio studentams.

5 pavyzdyje mes ėmėme iš esmės vienodo dydžio grupavimo intervalus*, tačiau kartais geriau imti juos skirtingų ilgių. Tai pailiustruosime kitu pavyzdžiu.

6 pavyzdys. Pagaliau galėsime visiems suprantamai įvertinti profesoriaus Kirvaičio studentus. Pereikime nuo balų prie (raidinių) įvertinimų. Kalbant mūsų terminais, tai yra perėjimas nuo kiekybinio kintamojo (egzamino balo) prie kokybinio kintamojo. Grupavimo intervalai atitiks vertinimo kategorijas. Šiuo atveju yra rimtų argumentų imti nevienodo ilgio intervalus – profesorius Kirvaitis turi savo sistemą ir grupavimo intervalus nustato remdamasis 14.3 lentele.

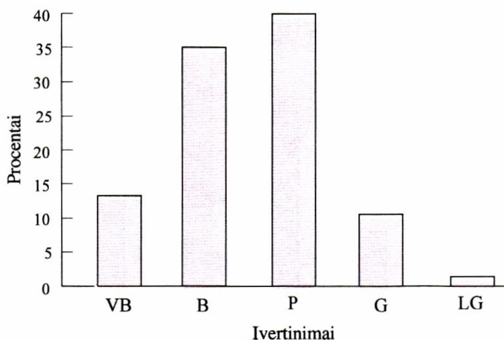
Grupavimo intervalas	Įvertinimas
18–25	LG
14–17	G
11–13	P
9–10	B
0–8	VB

14.3 lentelė. LG – labai gerai; G – gerai; P – patenkinamai; B – blogai; VB – visai blogai.

14.2 lentelėje pateiktus egzamino rezultatus pergrupavę pagal 14.3 lentelės intervalus, gausime naują dažnių 14.4 lentelę ir atitinkamą stulpelinę diagramą (14.11 pav.).

Įvertinimas	VB	B	P	G	LG
Dažnis	10	26	30	8	1
Procentai	13,33	34,67	40	10,67	1,33

14.4 lentelė.



14.11 pav. Statistikos egzamino įvertinimų skirstinys.

* Mažytė išimtis buvo padaryta intervalui 400–500, turinčiam viena reikšme daugiau už kitus intervalus.

Histogramos

Kai kiekybinis kintamasis yra tolydus, kintamojo reikšmės gali kisti be galo mažais pokyčiais. Todėl tarpų tarp grupavimo intervalų nėra, ir mūsų įprastas diagramos vaizdavimo būdas (juodi arba iš kokių nors patrauklesnių simbolių sudaryti stulpeliai, aiškumo dėlei atskirti tarpais) jau nebetiks. Tokiu atveju mes naudosimės stulpelinės diagramos atmaina, vadinama **histograma**. Histogramos sąvoką pailiustruosime tokiu pavyzdžiu.

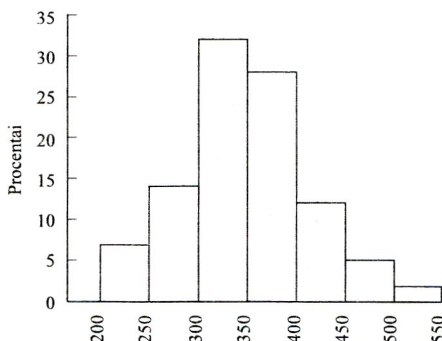
7 pavyzdys. Sakykime, kad norime diagrama pavaizduoti, kaip pasiskirstę ką tik baigusių Mokslamiesčio universitetą $N = 3528$ absolventų atlyginimai.

Baigusiųjų atlyginimai svyruoja nuo 205 iki 540 litų per mėnesį. Paisydami kiek tiksliai mes norime pavaizduoti skirstinį, turime apsispręsti dėl grupavimo intervalų ilgio. Griežtų taisyklių čia nėra, tačiau, imdami ne daugiau kaip 20 grupavimo intervalų, gausime pakankamai aiškią diagramą. Imant daugiau intervalų, diagrama būna per marga. Taigi imkime 50 Lt dydžio intervalus. 14.5 lentelė yra dažnių lentelė su tokiais grupavimo intervalais. Trečiame lentelės stulpelyje duomenys pateikti procentais.

Atlyginimas	Absolventų skaičius	Procentai
200–250	228	7
250^+–300	456	14
300^+–350	1043	32
350^+–400	912	26
400^+–450	391	12
450^+–500	163	5
500^+–550	65	2
Iš viso	3258	100

14.5 lentelė.

Šių duomenų histograma pavaizduota 14.12 pav.



14.12 pav. Mokslamiesčio universiteto absolventų pradiniai atlyginimai.

Kaip matome iš 14.12 pav., histograma yra labai panaši į stulpelinę diagramą. Tačiau reikia pažymėti keletą ypatybių. Visų pirma, histograma vaizduojami tolydieji kintamieji, todėl tarp grupavimo intervalų negali būti tarpų, ir histogramos stulpeliai turi liestis. Antra, ką daryti, kai reikšmė patenka tiksliai ant ribos tarp dviejų grupavimo intervalų? Kuriam intervalui – esančiam į kairę ar į dešinę nuo reikšmės – reikėtų tą reikšmę priskirti? Atitinkama procedūra vadinama *galinių taškų priskyrimu*. Pliuso ženklas 14.5 lentelėje parodo, kaip sprendžiamas galinių taškų priskyrimo klausimas 14.12 pav.: $250^{+}-300$ reiškia, kad intervalui priklauso skaičiai, *didesni* už 250, bet *mažesni arba lygūs* 300.

Kaip ir sudarant stulpelines diagramas, histogramose reikia stengtis imti vienodo ilgio grupavimo intervalus. Kai grupavimo intervalų ilgis nevienodas, histogramų sudarymo taisyklės yra gerokai sudėtingesnės. Tokiu atveju stulpelio aukštis jau netinka grupavimo intervalo dažniui pavaizduoti. Mes smulkiau nesvarstysime šios situacijos, o besidominčiam skaitytojui siūlome išspręsti 41 ir 42 pratimus šio skyriaus gale.

SKAITINĖS DUOMENŲ CHARAKTERISTIKOS

Kaip matėme, grafiniai vaizdai labai padeda apibūdinti didelius duomenų kiekius. Deja, aplinkybės ne visada leidžia pasinaudoti piešiniais. Jei profesorių Kirvaitį, beeinantį per universiteto miestelį, sustabdytų studentas ir nerūpestingu balsu paklaustų: „Kaip baigėsi tas statistikos egzaminas?“, būtų sunku tikėtis, kad profesorius išsitrauktų lapelį su stulpeline diagrama. Regimąjį grafinio vaizdo efektą dažnai gali pakeisti arba papildyti duomenų *skaitinės charakteristikos*.

Šiame skyrelyje mes aptarsime būdus, padedančius keliais gerai parinktais skaičiais apibūdinti dideles duomenų aibes. Tas charakteristikas patogu suskirstyti į dvi grupes. Vienos grupės charakteristikos apibūdina duomenų reikšmių didumą, o kitos – kaip tos reikšmės išsisklaidžiusios. Pirmosios charakteristikos vadinamos **padėties charakteristikomis**, o antrosios – **sklaidos charakteristikomis**. Svarbiausios padėties charakteristikos yra **vidurkis**, **mediana** ir **kvartiliai**. Svarbiausios sklaidos charakteristikos yra **plotis**, **kvartilinis plotis** ir **standartinis nuokrypis**. Tokia tvarka jas ir aptarsime.

Vidurkis

Geriausiai žinoma skaitinė charakteristika yra **vidurkis**, kartais vadinamas **matematine viltimi** (kiek įmanoma, laikysimės pirmojo pavadinimo, nes tai vaizdus ir praktiškas žodis). N skaičių aibės **vidurkis** gaunamas tų skaičių sumą padalijus iš N. Jei skaičių aibė yra maža, vidurkį dažnai galima apskaičiuoti ir mintyse. Kai duomenų aibė didesnė, prireiks popieriaus ir pieštuko arba skaičiuoklio. Bet kokiu atveju apskaičiuoti vidurkį labai paprasta.

8 pavyzdys. Per dešimt rungtynių krepšininkas pelnė atitinkamai 8, 5, 11, 7, 15, 0, 7, 4, 11 ir 14 taškų. Iš viso pelnyti 82 taškai, todėl vidurkis yra lygus 8,2 taško per vienerias rungtynes. Savaime aišku, kad žaidėjas negali pelnyti lygiai 8,2 taško per vienerias rungtynes. Taigi pats vidurkis gali ir nesutapti su jokia galima duomenų reikšme (taip atsitinka gana dažnai).

9 pavyzdys. Dabar suskaičiuokime vidutinį profesoriaus Kirvaičio egzamino balą. Skaitytojų patogumui mes dar kartą pateikiame dažnių lentelę:

Egzamino balas	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	24
Dažnis	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1

14.6 lentelė. Egzamino duomenų aibės dažnių lentelė.

75 duomenų reikšmių sumą galima rasti padauginus kiekvieną reikšmę iš jos dažnio ir sandaugas sudėjus:

$$\text{suma} = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 16 + 11 \cdot 13 + \\ + 12 \cdot 9 + 13 \cdot 8 + 14 \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 24 \cdot 1 = 814.$$

Egzamino balo vidurkis (suapvalintas iki šimtųjų dalių) lygus

$$\frac{814}{75} \approx 10{,}85 \text{ balo.}$$

Intuityviai mes suvokiame šį vidurkį kaip „tipiško“ studento rezultatą. Jei visi egzamino balai būtų maždaug vienodi, o jų suma ta pati, tai kiekvienas balas būtų „maždaug“ 10,85 balo.

14.7 lentelėje pavaizduota bendroji dažnių lentelė.

Reikšmė	s_1	s_2	$\cdots$	s_k
Dažnis	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

14.7 lentelė.

Apskaičiuodami duomenų vidurkį, laikomės tokios schemos:

- **1 žingsnis.** Apskaičiuojame reikšmių sumą:

$$\text{suma} = (s_1 \cdot f_1) + (s_2 \cdot f_2) + \cdots + (s_k \cdot f_k).$$

- **2 žingsnis.** Apskaičiuojame N:

$$N = f_1 + f_2 + \cdots + f_k.$$

- **3 žingsnis.** Apskaičiuojame vidurkį:

$$\text{vidurkis} = \frac{\text{suma}}{N}.$$

Žinoma, tokio tipo algoritmus ypač patogu atlikti kompiuteriais, ir net skaičiuokliai dažnai turi klavišą vidurkiams skaičiuoti.

Iki šiol visuose mūsų pavyzdžiuose buvo tik teigiami skaičiai. Kai tiek teigiamos, tiek neigiamos reikšmės yra vidurkinamos, rezultatai gali šiek tiek klaidinti.

10 pavyzdys. Mėnesinis šeimos pelnas (mėnesio pajamų ir mėnesio išlaidų skirtumas) per vienerius metus pavaizduotas 14.8 lentelėje. Neigiama reikšmė rodo, kad šeima tą mėnesį išleido daugiau, negu turėjo pajamų.

Mėnuo	Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė	Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Gruodis
Pelnas (Lt)	−732	−158	−71	−238	1839	−103	−148	−162	−85	−147	−183	500

14.8 lentelė.

Vidutinis mėnesinis šios šeimos pelnas lygus

$$\frac{-732-158-71-238+1839-103-148-162-85-147-183+500}{12} = 26.$$

26 litų vidutinis mėnesinis pelnas perša apgaulingą mintį, kad šios šeimos finansinė būklė nebloga. O iš tikrųjų ši šeima gyvena ne pagal pajamas – teigiamą vidurkį nulėmė vienkartinis loterijos laimėjimas gegužės mėnesį.

Kitas mūsų pavyzdys iliustruoja svarbią sąvoką – *nuokrypį nuo vidurkio*.

11 pavyzdys. Grįžkime prie statistikos egzamino duomenų aibės. Dabar mes norėtume žinoti, kiek balo reikšmės nukrypdavo nuo egzamino balų vidurkio 10,85 (t.y. kiekvienos reikšmės ir skaičiaus 10,85 skirtumus). 14.9 lentelėje matome šiuos skirtumus, vadinamus **nuokrypiais nuo vidurkio**.

Balas	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	24
Nuokrypis (balas – 10,85)	−9,85	−4,85	−3,85	−2,85	−1,85	−0,85	0,15	1,15	2,15	3,15	4,15	5,15	13,15
Dažnis	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1

14.9 lentelė.

Apskaičiavę šių nuokrypių vidurkį, gauname, kad

$$\text{vidutinis nuokrypis nuo 10,85 (vidutinio balo)} =$$
$$= \frac{-9{,}85 - 4{,}85 - 3{,}85 \cdot 2 - 2{,}85 \cdot 6 + \cdots + 13{,}15}{75} =$$
$$= \frac{0{,}25}{75} \approx 0{,}0033.$$

Toks mažas vidutinis nuokrypis nuo vidutinio balo 11 pavyzdyje gali įteigti mintį, kad egzamino balai yra labai artimi vienas kitam bei vidutiniam balui, nors taip visai nėra. Iš tikrųjų čia neigiami ir teigiami nuokrypiai nuo vidurkio panaikino vieni kitus. Vidutinis nuokrypis nelygus 0 tik todėl (žr. 44 pratimą), kad mes suapvalinome vidutinį egzamino balą šimtosios tikslumu ($814/75 \approx 10{,}85$). Taigi teigiamų ir neigiamų skaičių vidurkinimas gali klaidingai atspindėti santykinius šių skaičių dydžius (vadinamasis **pasinaikinimo efektas**).

Yra du būdai šiam sunkumui nugalėti, ir abu remiasi neneigiamųjų dydžių nagrinėjimu. Vienas būdas – imti absoliučiuosius dydžius, kitas – kelti visus skaičius kvadratu (skaičių kvadratai yra neneigiami). Antrasis būdas praktiškai patogesnis, ir juo paprastai naudojasi statistikai.

Šiuos samprotavimus galima reziumuoti taip:

1. Nagrinėjant tiek teigiamus, tiek neigiamus duomenis, vidurkiai klaidina dėl teigiamų ir neigiamų reikšmių pasinaikinimo.

2. Išvengti pasinaikinimo efekto galima pakėlus visus skaičius kvadratu, o po to rasti kvadratų vidurkį.

12 pavyzdys. Pritaikykime šią strategiją statistikos egzamino balų nuokrypiams nuo vidurkio.

Dažnis	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1
Nuokrypis nuo vidurkio	$-9,85$	$-4,85$	$-3,85$	$-2,85$	$-1,85$	$-0,85$	$0,15$	$1,15$	$2,15$	$3,15$	$4,15$	$5,15$	$13,15$
Nuokrypio kvadratas	97,02	23,52	14,82	8,12	3,42	0,72	0,02	1,32	4,62	9,92	17,22	26,52	172,92

14.10 lentelė.

Suskaičiavę 14.10 lentelės paskutinės eilutės skaičių vidurkį, gauname:

$$\text{nuokrypių kvadratų vidurkis} = \\ = \frac{97{,}02 + 23{,}52 + 14{,}82 \cdot 2 + 8{,}12 \cdot 6 + \cdots + 172{,}92}{75} = \\ = \frac{577{,}20}{75} = 7{,}70.$$

Nuokrypio kvadratai yra teigiami, ir todėl išsprendžiama pasinaikinimo problema, bet sukuriama nauja: kėlimas kvadratu pakeičia skaičių dimensiją. Palyginus su pradiniais, dabar turime kvadratinius vienetus. Paskutiniame pavyzdyje vienetai buvo egzamino balai, bet gautasis vidurkis išreikštas kvadratiniais balais (kad ir ką tai reikštų). Šio nepatogumo išvengiame ištraukę kvadratinę šaknį (iš duomenų kvadratų vidurkio). Taigi 12 pavyzdyje imdami $\sqrt{7{,}70}$, turėsime tos pačios dimensijos dydį, kaip ir pradinės duomenų reikšmės.

Kvadratinis vidurkis

Ką tik aprašytas procesas iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti painus ir suktas. Bet jis duoda svarbią duomenų aibės skaitinę charakteristiką, vadinamą **kvadratiniu vidurkiu** (žymėsime KV). KV yra naudingas vidurkio pakaitalas, ypač kai būtina išvengti pasinaikinimo.

KV skaičiavimo procedūrą sudaro trys žingsniai.

- **1 žingsnis.** Pakeliame kvadratu visas duomenų reikšmes (ir nebeturime neigiamų reikšmių).
- **2 žingsnis.** Randame 1 žingsnyje gautų reikšmių vidurkį (šis vidurkis turi kvadratinę dimensiją).
- **3 žingsnis.** Ištraukiame kvadratinę šaknį iš 2 žingsnyje gauto dydžio (tai grąžina vidurkiui teisingą dimensiją).

Ypač svarbus yra ne pačių duomenų reikšmių, o jų nuokrypių nuo vidurkio kvadratinis vidurkis. Kaip tik taip jis buvo skaičiuojamas 12 pavyzdyje.

Pradėję nuo egzamino duomenų aibės, apskaičiavome nuokrypius nuo vidurkio, ir radome šios naujos skaičių aibės KV. Šis KV (pavyzdyje jis lygus $\sqrt{7{,}70} \approx 2{,}77$) vadinamas pradinės duomenų aibės **standartiniu nuokrypiu**. Prie jo grįšime skyriaus gale.

Mediana

Mediana yra kita svarbi dažnai vartojama skaitinė duomenų aibės charakteristika. Norėdami ją rasti, pirma turime išrikiuoti skaičius pagal dydį. Kitaip tariant, mes turime perrašyti skaičius didėjimo tvarka iš kairės į dešinę (arba atvirkščiai). Po to imame skaičių, esantį rikiuotės „viduryje“. Šis skaičius ir yra **mediana**.

---

13 pavyzdys. Norėdami rasti skaičių aibės 4,8; –2; 3,1; –6,5; 1,6; 0,5 ir 4,25 medianą, pirma juos išrikiuojame pagal dydį:

$$-6{,}5;\ \ -2;\ \ 0{,}5;\ \ 1{,}6;\ \ 3{,}1;\ \ 4{,}25;\ \ 4{,}8.$$

Vidurinis yra ketvirtas skaičius, taigi mediana yra 1,6.

---

14 pavyzdys. Kaip rasti skaičių aibės 2,2; –5,1; –2,7; 4,1; 6,2; –3; 1,2; 3,8 medianą? Išrikiavę skaičius pagal dydį, gauname:

$$-5{,}1;\ \ -3;\ \ -2{,}7;\ \ 1{,}2;\ \ 2{,}2;\ \ 3{,}8;\ \ 4{,}1;\ \ 6{,}2.$$

Kuris skaičius yra „vidurinis“ šiame aštuonių skaičių sąraše? Galima būtų sakyti, kad yra du skaičiai – ketvirtas (1,2) ir penktas (2,2), turintys vienodą teisę vadintis „viduriniaisiais“. Šį ginčą išsprendžiame kompromisiškai: mediana vadiname skaičių, esantį pusiaukelėje tarp šių dviejų skaičių (t.y. jų vidurkį). Taigi šiame pavyzdyje mediana lygi $(1{,}2 + 2{,}2)/2 = 1{,}7$.

13 ir 14 pavyzdžių procedūrą apibendrinsime tokiu algoritmu.

N skaičių aibės medianos radimas

- **1 žingsnis.** Išrikiuojame skaičius pagal dydį.
- **2 žingsnis.** Randame skaičių, esantį šitaip sutvarkyto sąrašo viduryje (ar du tokius skaičius). Galimi du atvejai:
  a) Skaičius N nelyginis. Vidurinio skaičiaus numeris yra $(N+1)/2$, todėl tas skaičius ir yra mediana.
  b) Skaičius N lyginis. Turime du vidurinius skaičius, kurių numeriai yra $N/2$ ir $(N/2)+1$. Mediana yra tų dviejų skaičių vidurkis.

15 pavyzdys. Dabar rasime profesoriaus Kirvaičio statistikos egzamino balų medianą. Skaitytojo patogumo dėlei pakartojame dažnių lentelę.

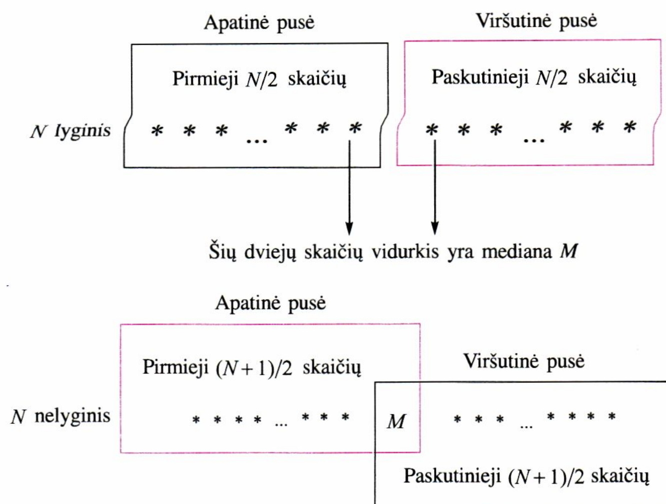
Egzamino balas	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	24
Dažnis	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1

14.11 lentelė. Egzamino duomenų aibės dažnių lentelė.

Turint dažnių lentelę, nebereikia rikiuoti rezultatų – dažnių lentelėje tai jau atlikta. Bendras duomenų skaičius lygus $N = 75$, todėl sąraše yra vienintelis vidurinis numeris. Tai $(75 + 1)/2 = 38$. Taigi žinome, kad mediana lygi 38-ajam taip sutvarkyto sąrašo skaičiui (nesupainiokime – mediana yra ne 38, o 38-asis skaičius tame sąraše). Norėdami nustatyti 38-ąjį skaičių, sumuojame dažnius iš kairės į dešinę 14.11 lentelėje: $1+1=2$, $1+1+2=4$, $1+1+2+6=10$, $1+1+2+6+10=20$, $1+1+2+6+10+16=36$. Matome, kad 36-asis egzamino duomuo yra 10 (paskutinis iš „dešimtukų"), o tolesni 13 duomenų yra lygūs 11. Taigi 38-asis skaičius (egzamino balų mediana) yra 11. Tai reiškia, kad pusė kurso gavo 11 arba mažesnį balą, o kita pusė kurso gavo 11 arba didesnį balą.

Rasti medianą nėra sunku – truputį pasipraktikavęs skaitytojas tai supras (pradėkite nuo 2, 5 ir 11 pratimų). Kaip ir ieškant vidurkio, didelių duomenų aibių atveju patartina skaičiuoti kompiuteriu ar skaičiuokliu.

Gana dažna klaida yra medianos (vidurio) ir vidurkio painiojimas. Šios dvi sąvokos giminingos, todėl net ir tie, kurie gerai jas skiria, dažnai klysta



14.13 pav.

ir mano, kad mediana ir vidurkis turėtų būti artimi vienas kitam. Nors iš tikrųjų taip dažnai ir būna, bet bendru atveju tai nėra teisinga. Imkime, pavyzdžiui, skaičius 1, 1, 1 ir 97. Šių skaičių mediana yra 1, o vidurkis yra daug didesnis ir lygus 25. Kita vertus, skaičių 1, 1, 100, 101 ir 102 mediana (100) yra daug didesnė už jų vidurkį (61). Taigi klaidinga būtų manyti, jog mediana ir vidurkis yra „maždaug tas pats".

Mediana perskiria surūšiuotus duomenis į dvi dalis: *apatinę pusę* ir *viršutinę pusę*. Tai iliustruoja 14.13 pav.

---

16 pavyzdys. 10 vaikų ūgiai centimetrais lygūs 138, 141, 136, 149, 128, 144, 135, 143, 139, 141. Norėdami rasti šių duomenų apatinę ir viršutinę puses, pirma išrikiuokime juos pagal dydį. Gauname 128, 135, 136, 138, 139, 141, 141, 143, 144, 149. Apatinė pusė yra 128, 135, 136, 138, 139, o viršutinė – 141, 141, 143, 144, 149. Medianinis šios grupės ūgis yra 140 cm.

---

17 pavyzdys. Įsivaizduokime, kad vienas 132 cm ūgio vaikas dar prisideda prie grupės. Naujai surūšiuoti duomenys yra 128, 132, 135, 136, 138, 139, 141, 141, 143, 144, 149. Apatinė pusė dabar yra 128, 132, 135, 136, 138, 139, o viršutinė – 139, 141, 141, 143, 144, 149. Šiame pavyzdyje mediana (139) priklauso abiems pusėms.

Kvartiliai

Išsiaiškinę skaičių aibės „apatinės pusės" ir „viršutinės pusės" prasmę, galime apibrėžti kvartilius. **Pirmasis kvartilis** (Q_1) yra apatinės pusės mediana; **trečiasis kvartilis** (Q_3) yra viršutinės pusės mediana.

---

18 pavyzdys. Imkime tą pačią 16 pavyzdžio 10 vaikų ūgių aibę. Apatinė šių skaičių pusė yra 128, 135, 136, 138, 139. Šių penkių skaičių mediana yra 136, todėl pirmasis kvartilis lygus 136 ($Q_1 = 136$). Viršutinė duomenų pusė yra 141, 141, 143, 144, 149. Šių penkių skaičių mediana yra 143, todėl trečiasis kvartilis lygus 143 ($Q_3 = 143$).

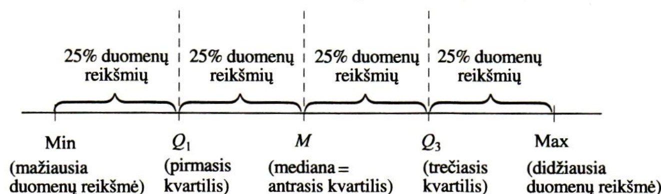
---

19 pavyzdys. 17 pavyzdžio 11 ūgių apatinė pusė yra 128, 132, 135, 136, 138, 139. Pirmasis kvartilis yra šių šešių skaičių mediana ir lygus 135,5. Viršutinė duomenų pusė yra 139, 141, 141, 143, 144, 149. Trečiasis kvartilis yra šių šešių skaičių mediana ir lygus 142.

Mediana padalija duomenis į dvi puses, o kvartilių paskirtis – dalyti duomenis į ketvirčius*. Pavyzdžiui, jei skaičių aibės kvartilis yra 135,5,

* Lotyniškai *mediana* – vidurinė, *quarta* – ketvirta.

tai apie 25% skaičių yra ne didesni už 135,5. Analogiškai, jei skaičių aibės trečiasis kvartilis yra 142, tai apie 75% skaičių yra ne didesni už 142. Pati mediana yra antrasis kvartilis, todėl apie 50% skaičių yra ne didesni už medianą. Nesunku suvokti, kodėl pirmasis kvartilis, mediana ir trečiasis kvartilis yra kartais atitinkamai vadinami 25-uoju, 50-uoju ir 75-uoju procentiliu.



14.14 pav.

Dabar pateiksime bendrą skaičių aibės kvartilių radimo schemą.

***N* skaičių aibės kvartilių radimas**

- **1 žingsnis.** Surikiuojame skaičius pagal dydį.
- **2 žingsnis.** Randame medianą M.
- **3 žingsnis.** Randame apatinę ir viršutinę duomenų aibės puses (žr. 14.13 pav.).
- **4 žingsnis.** Randame apatinės pusės medianą. Tai – pirmasis kvartilis Q_1.
- **5 žingsnis.** Randame viršutinės pusės medianą. Tai – trečiasis kvartilis Q_3.

Penkiaskaitė suvestinė

Didelę duomenų aibę pakankamai gerai galima apibūdinti šiais skaičiais: mažiausia duomenų reikšmė (Min), pirmasis kvartilis (Q_1), mediana (M), trečiasis kvartilis (Q_3) ir didžiausia duomenų reikšmė (Max). Šie penki skaičiai sudaro duomenų aibės **penkiaskaitę suvestinę.**

20 pavyzdys. Grįžkime prie statistikos egzamino duomenų aibės ir pažiūrėkime, kaip jį charakterizuoja penkiaskaitė suvestinė. Jau žinome, kad mažiausias balas yra Min $= 1$, mediana $M = 11$ ir didžiausias balas yra Max $= 24$. Dar reikia rasti pirmąjį ir trečiąjį kvartilį. Kadangi duomenų skaičius 75 yra nelyginis, tai pirmoji duomenų pusė sudaryta iš 38 skaičių. Kadangi 38 yra lyginis skaičius, tai pirmųjų 38 skaičių mediana yra 19-to ir 20-to rezultatų vidurkis. Dažnių lentelėje sumuojame dažnius, pradėdami iš kairės. Siūlome skaitytojui įsitikinti, kad 19-tas ir 20-tas duomuo yra 9, taigi $Q_1 = 9$. Trečiasis kvartilis lygus duomenų nuo 38-to iki 75-to medianai. Norėdami ją rasti, galime sumuoti dažnius iš kairės (nuo 38-to skaičiaus) į

dešinę arba sumuoti dažnius iš dešinės, kol rasime 19-tą ir 20-tą skaičius nuo galo. Taip nustatome, kad 19-tas ir 20-tas skaičiai nuo galo yra lygūs 12, taigi $Q_3 = 12$. Vadinasi, statistikos egzamino rezultatų penkiaskaitė suvestinė yra

$$\text{Min} = 1, \quad Q_1 = 9, \quad M = 11, \quad Q_3 = 12, \quad \text{Max} = 24.$$

Beje, be Q_1 ir Q_3 mes turėtume iškreiptą duomenų aibės vaizdą, kadangi tiek Min $= 1$, tiek Max $= 24$ yra išskirtys. Rezultatai nėra vienodai išsisklaidę intervalu nuo 1 iki 24 (veikiau priešingai). Kvartiliai duoda gerokai tikslesnį rezultatų vaizdą: pusė jų patenka į labai siaurą intervalą nuo 9 iki 12 taškų. Tik ketvirtadalis rezultatų ne didesni už 9, ir tik ketvirtadalis rezultatų ne mažesni už 12.

SKLAIDOS CHARAKTERISTIKOS

Apibūdinant duomenis skaičiais, svarbu nustatyti, kaip duomenų reikšmės yra pasklidusios. Nagrinėkime tokias dvi duomenų aibes:

$$\text{pirma aibė} = \{45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55\},$$
$$\text{antra aibė} = \{1, 11, 21, 31, 41, 59, 69, 79, 89, 99\}.$$

Siūlome skaitytojui patikrinti, kad abiejų duomenų aibių vidurkiai lygūs 50, o medianos taip pat lygios 50. Kita vertus, akivaizdu, kad šios duomenų aibės labai skiriasi, ir antros aibės reikšmės yra daug plačiau pasklidusios už pirmos aibės reikšmes. Kaip apibūdinti sklaidos dydį? Paprasčiausia būtų imti skirtumą tarp didžiausios ir mažiausios duomenų reikšmių (Max $-$ Min). Šis skirtumas vadinamas **duomenų aibės pločiu.** Pirmos aibės plotis yra 10, o antros aibės – 98.

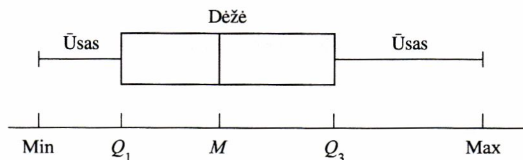
Kaip sklaidos charakteristika, plotis yra naudingas tik tada, kai nėra išskirčių, kadangi jos gali visiškai iškreipti pločio prasmę. Pavyzdžiui, statistikos egzamino duomenų aibės plotis lygus $24 - 1 = 23$ balams, tačiau be dviejų išskirčių jis būtų lygus $16 - 6 = 10$.

Išskirčių sukeltam iškreipimui eliminuoti įprasta naudoti **kvartilinį plotį** (KP). Kvartilinis plotis lygus trečiojo ir pirmojo kvartilių skirtumui (KP $= Q_3 - Q_1$), ir jis apibūdina vidurinių 50% duomenų reikšmių sklaidą. Kvartilinis plotis dažniausiai yra labai patikima sklaidos charakteristika. Kai turime penkiaskaitę suvestinę, tiek plotį, tiek kvartilinį plotį randame „nemokamai“.

21 pavyzdys. Testo 200 rezultatų penkiaskaitė suvestinė tokia: Min $= 4$, $Q_1 = 23$, $M = 27$, $Q_3 = 32$, Max $= 61$. Čia plotis lygus Max $-$ Min $= 57$, o kvartilinis plotis KP $= Q_3 - Q_1 = 9$. Ką penkiaskaitė suvestinė sako apie testo rezultatus? Matome, kad pirmieji 50 rezultatų (25%) yra tarp 4 ir 23; tolesni 50 rezultatų yra tankiai išsidėstę tarp 23 ir 27; panašiai dar 50 rezultatų yra tarp 27 ir 32; paskutiniai 50 rezultatų yra tarp 32 ir 61.

Stačiakampės diagramos

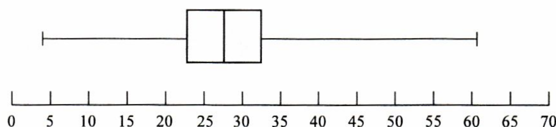
Stačiakampė diagrama pateikia grafinį penkiaskaitės suvestinės visos informacijos vaizdą. 14.15 pav. pavaizduota tipiška duomenų aibės stačiakampė diagrama.



14.15 pav.

Stačiakampėje diagramoje yra „dėžė" – stačiakampis, einantis nuo pirmojo kvartilio Q_1 iki trečiojo kvartilio Q_3, padalytas brūkšniu į dvi dalis ties mediana M. Nuo stačiakampio šonų išeina „ūsai", besitęsiantys iki mažiausios reikšmės Min ir didžiausios reikšmės Max.

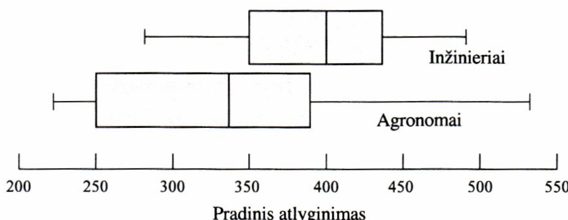
14.16 pav. matome 21 pavyzdžio duomenų stačiakampę diagramą (Min $=$ 4, $Q_1 = 23$, $M = 27$, $Q_3 = 32$, Max $= 61$).



14.16 pav. 21 pavyzdžio duomenų stačiakampė diagrama.

Stačiakampės diagramos yra ypač patogios lyginant dviejų ar daugiau populiacijų duomenis. Tai pailiustruosime kitu pavyzdžiu.

22 pavyzdys. 14.17 pav. matome dviejų skirtingų populiacijų – baigusiųjų žemės ūkio ir inžinerinius mokslus Mokslamiesčio universitete pradinių atlyginimų – stačiakampes diagramas. Ta pati skalė leidžia mums palyginti vieną virš kitos nubraižytas diagramas. Pavyzdžiui, yra aišku, kad baigusieji inžinerinius mokslus apskritai yra geriau mokami už agronomus, nors, lyginant tik geriausius specialistus, agronomų atlyginimai didesni.



14.17 pav. Mokslamiesčio universiteto absolventų pradinių atlyginimų stačiakampės diagramos.

Įdomu tai, kad agronomų atlyginimų mediana yra mažesnė už inžinierių atlyginimų pirmąjį kvartilį. Labai trumpas kairysis ūsas prie agronomų stačiakampio rodo mums, kad 25% agronomų mažiausių atlyginimų yra labai siaurame atlyginimų intervale. Taip pat matome, kad agronomų atlyginimai yra kur kas labiau pasklidę, nors sklaida ryški tik viršutinėje atlyginimų skalės dalyje.

Taigi iš tokio paprasto brėžinio, kaip 14.17 pav., galime gauti daug informacijos (žr. 30 ir 31 pratimus).

Standartinis nuokrypis

Bene dažniausiai vartojama duomenų aibės sklaidos charakteristika yra **standartinis nuokrypis.** Skaitytojas turbūt prisimena, kaip 11 ir 12 pavyzdžiuose mes skaičiavome statistikos egzamino balus. Skaičiavome balų nuokrypius nuo vidutinio balo, po to radome šių nuokrypių kvadratinį vidurkį.

Bet kokios duomenų aibės standartinį nuokrypį galima rasti tokiu algoritmu.

***N* skaičių aibės standartinio nuokrypio radimas**

- **1 žingsnis.** Randame N skaičių vidurkį ir pažymime jį μ.
- **2 žingsnis.** Kiekvienam duomenų aibės skaičiui x randame skirtumą $x - \mu$, vadinamą *x-o nuokrypiu nuo vidurkio.*
- **3 žingsnis.** Laikydami nuokrypius nuo vidurkio nauja duomenų aibe, apskaičiuojame jos kvadratinį vidurkį (primename, kad tam reikia duomenų reikšmes pakelti kvadratu, rasti kvadratų vidurkį* ir ištraukti iš šio vidurkio kvadratinę šaknį). Gautoji reikšmė vadinama standartiniu nuokrypiu ir žymima σ.

2[illegible] pavyzdys. Raskime skaičių aibės 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55 standartinį nuokrypį.

1 žingsnis. $\mu = 50$.

2 žingsnis. Nuokrypiai nuo vidurkio: $-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$.

3 žingsnis.

a) Nuokrypių kvadratai: 25, 16, 9, 4, 1, 1, 4, 9, 16, 25.

b) Nuokrypių kvadratų vidurkis: (nuokrypių kvadratų suma)$/N = 110/10 = 11$.

c) Kvadratinė šaknis iš nuokrypių kvadratų vidurkio: $\sqrt{11}$.

Gauname standartinį nuokrypį $\sigma = \sqrt{11} \approx 3{,}317$.

Svarbu, kad skaitytojas suprastų skirtumą tarp kvadratinio vidurkio ir standartinio nuokrypio. Tai ne tas pats! Kvadratinis vidurkis yra vidurkio pakaitalas, kai nepageidaujamas neigiamųjų ir teigiamųjų duomenų reikšmių pasinaikinimo efektas. Skaičiuodami standartinį nuokrypį, ieškome ne pačių

*Daugelyje statistikos knygų ir kompiuterinių programų šis algoritmo žingsnis yra šiek tiek pakeistas: skaičiuojant nuokrypių kvadratų vidurkį, dalijama iš $N - 1$, o ne iš N. Visa kita nesikeičia. Iš tikrųjų kaip tik taip ir reikėtų daryti, bet to paaiškinimas išeitų už šio skyriaus rėmų. Antra vertus, jei N reikšmės yra didelės, abiem metodais gauti rezultatai yra labai artimi.

reikšmių kvadratų vidurkio, o jų nuokrypių nuo vidurkio kvadratų vidurkio. Duomenų aibei, sudarytai iš nuokrypių nuo vidurkio, pasinaikinimo efektas yra maksimalus – neigiami ir teigiami nuokrypiai visiškai pasinaikina (žr. 44 pratimą).

Standartinis nuokrypis yra sklaidos charakteristika, tinkama bet kokiai skaičių aibei. Mes išsamiau aptarsime tai 16 skyriuje.

IŠVADOS

Pagrindinė šio skyriaus tema yra glaustas surinktų duomenų apibūdinimas. Kitaip sakant, turint palyginti dideles duomenų aibes, norima trumpai ir aiškiai jas nusakyti. Mes aptarėme duomenų aibių charakterizavimo būdus, kai kiekviena duomenų reikšmė apibūdinama vienu skaičiumi (arba viena kategorija kokybinių kintamųjų atveju).

Grafiškai apibūdinti duomenis galima stulpelinėmis diagramomis, dažnių diagramomis, skritulinėmis diagramomis, histogramomis ir t.t. (yra daugybė grafinio vaizdavimo būdų, kurių mes šiame skyriuje nenagrinėjome). Kuris diagramos tipas yra tinkamiausias konkrečioje situacijoje, priklauso nuo daugybės faktorių. Svarbu ir patirtis – aprašomojoje statistikoje nepaprastai daug vietos kūrybai.

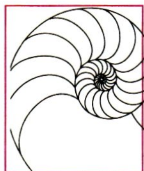
Skaitinės duomenų charakteristikos skirstomos į dvi kategorijas: (1) *padėties charakteristikos* – vidurkis, kvadratinis vidurkis, mediana, kvartiliai; (2) *sklaidos charakteristikos* – plotis, kvartilinis plotis ir standartinis nuokrypis.

Įžymusis rašytojas H. G. Velsas kartą pasakė:

> *Statistinis mąstymas kada nors taps toks pat reikalingas žmonėms, kaip gebėjimas skaityti ir rašyti.*

Sąvokos, su kuriomis supažindinome šiame skyriuje, yra statistikos abėcėlė.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



dažnis
dažnių diagrama
dažnių lentelė
diskretusis kintamasis
duomenų aibė (imtis)
duomenų reikšmės
grupavimo intervalai
histograma
imties plotis
išskirtis
kiekybinis kintamasis
kokybinis kintamasis
kvadratinis vidurkis
kvartilinis plotis
kvartilis
mediana
padėties charakteristikos
pasinaikinimo efektas
penkiaskaitė suvestinė
sklaidos charakteristikos
skritulinė diagrama
stačiakampė diagrama
standartinis nuokrypis
stulpelinė diagrama
tolydusis kintamasis
vidurkis

PRATIMAI

Apšilimas

1–4 *pratimai susiję su baigiamuoju chemijos egzaminu, kurio bilietą sudarė* 10 *klausimų, įvertintų po* 10 *balų (studentas už atsakymą į kiekvieną klausimą gali gauti tik* 10 *balų arba* 0 *balų). Egzamino rezultatai pateikti* 14.12 *lentelėje.*

Studento kodas	Balas	Studento kodas	Balas	Studento kodas	Balas	Studento kodas	Balas
1362	50	2877	80	4315	70	6921	50
1486	70	2964	60	4719	70	8317	70
1721	80	3217	70	4951	60	8854	100
1932	60	3588	80	5321	60	8964	80
2489	70	3780	80	5872	100	9158	60
2766	10	3921	60	6433	50	9347	60

14.12 lentelė. Baigiamojo chemijos egzamino rezultatai.

1. a) Sudarykite baigiamojo chemijos egzamino balų dažnių lentelę.
b) Nubraižykite stulpelinę diagramą, rodančią egzamino balų dažnius.
c) Nubraižykite stulpelinę diagramą, rodančią santykinius (t.y. procentinius) egzamino balų dažnius.

2. Raskite baigiamojo chemijos egzamino balų a) plotį; b) medianą; c) pirmąjį ir trečiąjį kvartilius; d) kvartilinį plotį.

3. a) Sudarykite baigiamojo chemijos egzamino balų penkiaskaitę suvestinę.
b) Nubraižykite stačiakampę diagramą.

4. Raskite baigiamojo chemijos egzamino balų a) vidurkį; b) standartinį nuokrypį.

5–8 *pratimuose kalbama apie istorijos egzaminą. Procentiniai egzamino rezultatai pateikti* 14.13 *lentelėje.*

Studento kodas	Rezultatas	Studento kodas	Rezultatas	Studento kodas	Rezultatas	Studento kodas	Rezultatas	Studento kodas	Rezultatas
1075	74%	1998	75%	3491	57%	4731	83%	6234	77%
1367	83%	2103	59%	3711	70%	4822	55%	6573	55%
1587	70%	2169	92%	3827	52%	5102	78%	7109	51%
1877	55%	2381	56%	4355	74%	5381	13%	7986	70%
1946	76%	2741	50%	4531	77%	5717	74%	8436	57%

14.13 lentelė. Baigiamojo istorijos egzamino rezultatai.

5. Raskite 14.13 lentelės duomenų aibės a) plotį; b) medianą; c) pirmąjį ir trečiąjį kvartilius; d) kvartilinį plotį.

6. a) Sudarykite 14.13 lentelės duomenų aibės penkiaskaitę suvestinę.
b) Nubraižykite stačiakampę diagramą.

7. Raskite 14.13 lentelės duomenų aibės a) vidurkį; b) standartinį nuokrypį.

8. Tarkime, kad nustatytos tokios istorijos egzamino vertinimo ribos:
90% – 100% LG (labai gerai);
80% – 89% G (gerai);
70% – 79% P (patenkinamai);
60% – 69% B (blogai);
mažiau kaip 60% – VB (visai blogai).
a) Sudarykite įvertinimų dažnių lentelę.
b) Nubraižykite skritulinę procentinę įvertinimų diagramą.

9 *ir* 10 *pratimuose duomenis reikia imti iš* 14.14 *lentelės, kurioje pateikti atstumai (suapvalinti iki* 0,5 *km) nuo kiekvieno Švariamiesčio pradinės mokyklos mokinio namų iki mokyklos.*

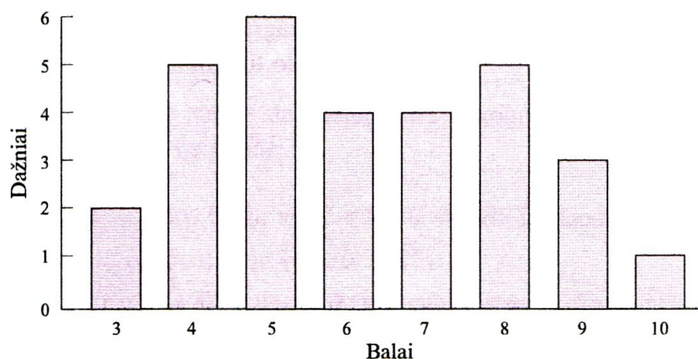
Mokinio kodas	Atstumas iki mokyklos	Mokinio kodas	Atstumas iki mokyklos	Mokinio kodas	Atstumas iki mokyklos	Mokinio kodas	Atstumas iki mokyklos
1362	1,5	2877	1,0	4355	1,0	6573	0,5
1486	2,0	2964	0,5	4454	1,5	8436	3,0
1587	1,0	3491	0,0	4531	1,5	8592	0,0
1877	0,0	3588	0,5	5482	2,5	8854	0,0
1932	1,5	3711	1,5	5533	1,0	8964	2,0
1946	0,0	3780	2,0	5717	8,5		
2103	2,5	3921	5,0	6307	1,5		

14.14 lentelė. Atstumai nuo Švariamiesčio pradinės mokyklos mokinių namų iki mokyklos.

9. a) Sudarykite 14.14 lentelės duomenų aibės dažnių lentelę.
b) Nubraižykite 14.14 lentelės duomenų aibės santykinių dažnių stulpelinę diagramą.

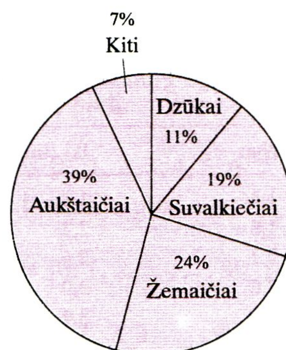
10. Apibrėžkime atstumų nuo namų iki mokyklos grupavimo intervalus taip:
labai arti: mažiau kaip vienas kilometras;
arti: nuo 1 iki 1,5 kilometro imtinai;
netoli: nuo 2 iki 2,5 kilometrų imtinai;
nelabai toli: nuo 3 iki 4,5 kilometrų imtinai;
toli: 5 kilometrai ir daugiau.
a) Sudarykite grupavimo intervalų dažnių lentelę.
b) Nubraižykite procentinę skritulinę diagramą.

11. Stulpelinėje diagramoje pateikti mokinių kontrolinės apklausos rezultatų (iš galimų 10 balų) dažniai.



a) Kiek mokinių buvo apklausta?
b) Sudarykite šios apklausos balų dažnių lentelę.
c) Koks vidutinis balas (balų vidurkis)?
d) Koks vidurinis balas (balų mediana)?

12 *ir* 13 *pratimuose nagrinėjama skritulinė diagrama, rodanti procentinę Mokslamiesčio universiteto studentų etninę sudėtį.*



12. a) Sudarykite kategorijų dažnių lentelę.
b) Pagal punkto a) dažnių lentelę nubraižykite stulpelinę diagramą.

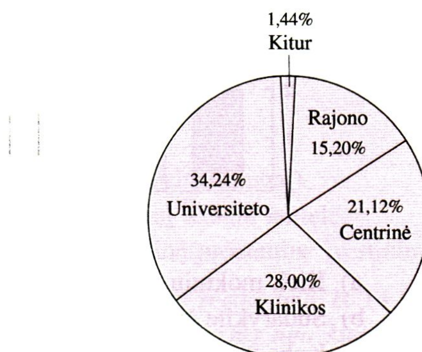
13. Raskite skritulinės diagramos kiekvienos išpjovos dydį (laipsniais).

14. Skritulinėje diagramoje yra keturios išpjovos, atitinkančios 4 kategorijas (A, B, C ir D):
išpjovos A kampas lygus 52°;
išpjovos B kampas lygus 108°;

išpjovos C kampas lygus 125°;
išpjovos D kampas lygus 75°.

Raskite kiekvienos kategorijos dažnį procentais.

15. Skritulinė diagrama rodo kūdikių, gimusių pernai kiekvienoje iš keturių Švariamiesčio ligoninių, skaičių procentais.



a) Kiek kūdikių gimė Centrinėje ligoninėje?
b) Kiek kūdikių gimė ne ligoninėje (namie, pakeliui į ligoninę ir t.t.)?
c) Nubraižykite stulpelinę diagramą, rodančią visų kategorijų dažnius.

16. Raskite skritulinės diagramos kiekvienos išpjovos dydį (laipsniais).

17–20 *pratimų duomenis rasite* 14.15 *lentelėje, kurioje pateikti pernai Švariamiestyje gimusių* 625 *kūdikių svoriai.*

Nuo	Iki (imtinai)	Dažniai
1,4	1,8	15
1,8	2,2	24
2,2	2,6	41
2,6	3,0	67
3,0	3,4	119
3,4	3,8	184
3,8	4,2	142
4,2	4,6	26
4,6	5,0	5
5,0	5,4	2

14.15 lentelė. Svoriai kilogramais.

17. a) Nurodykite kiekvieno grupavimo intervalo ilgį (kilogramais).
b) Sakykime, kūdikis sveria lygiai 2,6 kg. Kuriam grupavimo intervalui jis priklauso? Paaiškinkite, kaip priskiriami galiniai taškai.

18. Sudarykite naują šios duomenų aibės lentelę, imdami 0,8 kg ilgio grupavimo intervalus.

19. Nubraižykite šios duomenų aibės histogramą, atitinkančią 14.5 lentelės grupavimo intervalus.

20. Nubraižykite tos pačios duomenų aibės histogramą, atitinkančią 0,8 kg ilgio grupavimo intervalus.

21. Raskite kiekvienos iš šių skaičių aibių vidurkį ir standartinį nuokrypį:

$\{5, 5, 5, 5\}$, $\{0, 5, 5, 10\}$, $\{-5, 0, 0, 25\}$.

Nurodykite ir paaiškinkite atsakymų panašumus ir skirtumus.

22. Raskite kiekvienos iš šių nurodytų skaičių aibių vidurkį ir standartinį nuokrypį: $\{10, 10, 10, 10\}$, $\{1, 6, 13, 20\}$, $\{1, 1, 18, 20\}$.

Nurodykite ir paaiškinkite atsakymų panašumus ir skirtumus.

23. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a) vidurkį; b) medianą; c) standartinį nuokrypį.

24. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a) vidurkį; b) medianą; c) standartinį nuokrypį.

25. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a) pirmąjį kvartilį; b) trečiąjį kvartilį; c) kvartilinį plotį.

26. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a) pirmąjį kvartilį; b) trečiąjį kvartilį; c) kvartilinį plotį.

27. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ a) vidurkį; b) medianą.

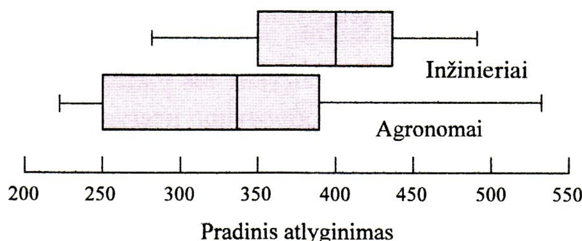
28. Raskite duomenų aibės $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ a) pirmąjį kvartilį; b) trečiąjį kvartilį; c) kvartilinį plotį.

29. a) Raskite dažnių lentelėje pateiktų duomenų penkiaskaitę suvestinę, vidurkį ir standartinį nuokrypį.

Reikšmė	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Dažnis	3	5	7	4	12	10	13	11	15	13	11	4	3	0	0	0	1

b) Nubraižykite šių duomenų stačiakampę diagramą.

30 ir 31 pratimuose nagrinėjamos Mokslamiesčio universitetą baigusių inžinierių ir agronomų pradinių atlyginimų stačiakampės diagramos (tai tos pačios 22 pavyzdžio diagramos).



30. a) Koks apytikriai yra agronomų vidurinis atlyginimas (mediana)?
b) Koks apytikriai yra inžinierių vidurinis atlyginimas (mediana)?
c) Patikrinkite, ar inžinierių vidurinis atlyginimas (atlyginimų mediana) yra didesnis už agronomų atlyginimų trečiąjį kvartilį.

31. a) Jei inžinierių yra 612, tai kiek iš jų gauna atlyginimą, didesnį arba lygų 350 Lt?
b) Jei agronomų yra 960, tai kiek iš jų gauna atlyginimą, mažesnį už 250 Lt?

32. Petro vidurkis pirmuose penkiuose ekonomikos egzaminuose yra 8,8. Kiek jis turi gauti šeštame egzamine, kad padidintų vidurkį iki 9,0?

33. Mildos fizikos egzaminų balų bendras vidurkis yra 93%. Jis išvestas iš keturių 100 balų vertės egzaminų ir galutinio 200 balų vertės egzamino rezultatų. Koks galėjo būti mažiausias jos pirmojo egzamino balas?

Treniruotė

34. Vidutinis 125-ių užsienio kalbas baigusių Mokslamiesčio universiteto absolventų pradinis atlyginimas yra 508 Lt. Tačiau neverta visiems tuoj pat pulti keisti specialybę, kadangi šis vidurkis yra labai iškreiptas vienos išskirties – universiteto krepšinio komandos „centras“ Jonas Ilgakojis yra pasirašęs pelningą kontraktą ir, žaisdamas užsienio klube, gauna 20 000 Lt per mėnesį. Koks yra absolventų pradinių atlyginimų vidurkis, atmetus šią išskirtį?

35. Darius ir Tadas turi vienodą penkių psichologijos egzaminų vidurkį – 80%. Tačiau Tadas visus egzaminus, išskyrus vieną, išlaikė geriau už Darių. Pateikite pavyzdį, iliustruojantį šią situaciją.

36. Eglė ir Ramunė turi vienodą šešių botanikos egzaminų vidurkį – 7,5. Eglės rezultatai turi mažą standartinį nuokrypį, o Ramunės – didelį. Pateikite pavyzdį, iliustruojantį šią situaciją.

37. Sugalvokite 10 skaičių, kurių a) vidurkis yra mažesnis už jų medianą; b) mediana yra mažesnė už jų vidurkį; c) vidurkis yra mažesnis už jų pirmąjį kvartilį; d) vidurkis yra didesnis už jų trečiąjį kvartilį.

38. Tarkime, kad 10 skaičių vidurkis yra 7,5, o mažiausias iš jų Min = 3.

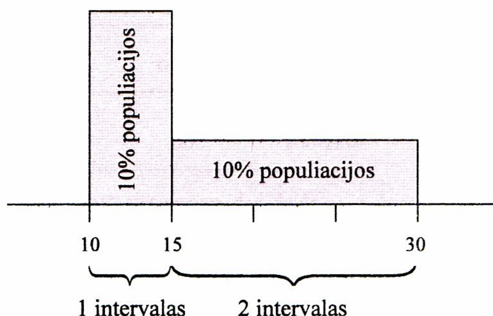
a) Kokia mažiausia galima Max (didžiausio iš jų) reikšmė?

b) Kokia didžiausia galima Max reikšmė?

39. Kaip pasikeis statistikos egzamino rezultatų penkiaskaitė suvestinė (žr. 20 pavyzdį), jei: a) prie kiekvieno rezultato pridėsime po 2 balus? b) prie kiekvieno rezultato pridėsime po 10%?

40. Kokios skaičių aibės standartinis nuokrypis lygus 0?

41 *ir* 42 *pratimuose kalbama apie histogramas su nevienodo ilgio grupavimo intervalais. Braižant tokias histogramas, stulpeliai turi būti brėžiami taip, kad dažniai (absoliutieji arba procentiniai) būtų proporcingi stulpelio plotui.*



Tai iliustruoja paveikslėlis. Jei 1*-ojo grupavimo intervalo stulpelis atitinka* 10% *populiacijos, tai* 2*-ojo grupavimo intervalo stulpelis, taip pat atitinkantis* 10% *populiacijos, turi būti triskart žemesnis, kadangi jo grupavimo intervalas yra triskart ilgesnis.*

41. Tarkime, kad grupavimo intervalo 20–30 stulpelio aukštis lygus vienetui, o pats stulpelis atitinka 25% populiacijos.

a) Kokio aukščio turi būti grupavimo intervalo 30–35, į kurį patenka 50% populiacijos, stulpelis?

b) Kokio aukščio turi būti grupavimo intervalo 35–45, į kurį patenka 10% populiacijos, stulpelis?

c) Kokio aukščio turi būti grupavimo intervalo 45–60, į kurį patenka 15% populiacijos, stulpelis?

42. Du šimtai gyventojų po sveikatingumo testo buvo suskirstyti pagal laiką, per kurį jie nuėjo 1 km. Atitinkamos kategorijos dažniai nurodyti lentelėje.

Laikas	Ėjimo įvertinimas	Dažnis
6^+-10 min.	Greitas	10
10^+-16 min.	Priimtinas	90
16^+-24 min.	Patenkinamas	80
24^+-40 min.	Lėtas	20

Nubraižykite histogramą, atspindinčią šios lentelės duomenis.

43. „Mokslamiesčio žinių" laikraštis apkaltino Mokslamiesčio universitetą moterų diskriminacija, priimant į architektūros ir inžinerijos specialybes. Straipsnyje teigiama: „ ... iš visų pretendentų vaikinų į architektūros ir inžinerijos fakultetus yra priimama 68%, o iš pretendenčių merginų – tik 51%". Tikrieji duomenys pateikiami lentelėje.

	Architektūros fakultetas		Inžinerijos fakultetas	
	Stojo	Priimta	Stojo	Priimta
Vaikinai	200	20	1000	800
Merginos	500	100	400	360

a) Kiek procentų stojančiųjų vaikinų buvo priimta į Architektūros fakultetą? Kiek procentų stojančiųjų merginų buvo priimta į šį fakultetą?
b) Kiek procentų stojančiųjų vaikinų buvo priimta į Inžinerijos fakultetą? Kiek procentų stojančiųjų merginų buvo priimta į šį fakultetą?
c) Kaip „Mokslamiesčio žinios" pasielgė su šiais skaičiais?
d) Remdamiesi punktų a) ir b) atsakymais, paiškinkite, kaip galėjo atsitikti, kad „Mokslamiesčio žinių" teiginiai teisingi.

Varžybos

44. Skaičių $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ vidurkis lygus μ. Įrodykite, kad $(x_1-\mu)+(x_2-\mu)+(x_3-\mu)+\cdots+(x_N-\mu)=0$.

45. a) Raskite du skaičius, kurių vidurkis lygus μ, o standartinis nuokrypis lygus σ.
b) Raskite tris vienodais tarpais išsidėsčiusius skaičius ($x_2-x_1=x_3-x_2$) su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu σ.
c) Apibendrinkite a) ir b) ir raskite N vienodais tarpais išsidėsčiusių skaičių su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu σ. (*Nurodymas.* Atskirai nagrinėkite lyginio ir nelyginio N atvejus.)

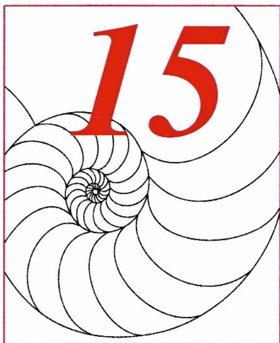
46. Įrodykite, kad skaičių $1, 2, 3, \ldots, N$ vidurkis ir mediana visada sutampa.

47. Tarkime, kad skaičių $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ vidurkis lygus μ, o standartinis nuokrypis lygus σ. Skaičių $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_N^2$ vidurkį pažymėkime m^2. Įrodykite, kad $\sigma^2 = m^2 - \mu^2$, t.y. kad iš bet kokios duomenų aibės reikšmių kvadratų vidurkio atėmę vidurkio kvadratą, gausime standartinio nuokrypio kvadratą.

48. Sakykime, kad skaičių $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ standartinis nuokrypis lygus σ. Paaiškinkite, kodėl skaičių $x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c, \ldots, x_N + c$ standartinis nuokrypis taip pat lygus σ.

49. a) Remdamiesi formule $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = N(N+1)(2N+1)/6$, raskite skaičių aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ standartinį nuokrypį. (*Nurodymas.* Pasinaudokite 47 uždaviniu.)

b) Raskite aibės $\{315, 316, \ldots, 412, 413\}$ standartinį nuokrypį. (*Nurodymas.* Pasinaudokite 48 uždaviniu.)



TIKIMYBĖS

Svarbiausi gyvenimo klausimai dažniausiai yra tik tikimybių uždaviniai.

P. LAPLASAS
(PIERRE SIMON
DE LAPLACE*)

Kokie jūsų šansai?

- „Rytoj lietaus tikimybė – 90%“. (Orų prognozė.)
- „Kiekvienais metais vidutinis vairuotojas turi vieną šansą iš trijų patekti į autoavariją“. (Iš draudimo kompanijos ataskaitos.)
- „Žalgirio“ galimybės laimėti prieš „Atletą“ yra 5 prieš 2“. (Laikraščio prognozė.)
- „Tikimybė, kad tris kartus metant monetą, atvirs vien herbai, lygi 0,125“. (Lošiko knyga.)

„Šansai“, „galimybės“, „tikimybės“ – tai žodžiai iš kasdieninio mūsų žodyno, kaip ir „moneta“, „futbolas“ ar „tortas“. Nors visi intuityviai jaučiame,

* Pjeras Simonas Laplasas (Pierre Simon de Laplace, 1749–1827) – garsus prancūzų matematikas ir astronomas. Laplasas parašė *Analizinę tikimybių teoriją* (*Théorie Analytique des Probabilités*), vieną iš pirmųjų matematinės tikimybių teorijos veikalų.

ką reiškia kiekvienas iš keturių pacituotų teiginių, griežtai apibrėžti terminus „šansai“, „galimybės“ ir „tikimybės“ yra neįtikėtinai (štai ir vėl panašios rūšies žodis) sunku.

Šiame skyriuje mes aptarsime tikimybes, šansus, galimybes (tai tiesiog skirtingi to paties dalyko pavadinimai) tiek praktiniu, tiek ir tikslesniu matematiniu požiūriu. Iš pradžių pasiaiškinsime terminus.

Žodis „tikimybės“ vartojamas dvejopa prasme. Viena vertus, šis žodis reiškia *mokslą* – iš esmės matematikos šaką – ir šia prasme jį pavartojome skyriaus pavadinime. Antra vertus, mes kalbame apie įvykių tikimybes, ir tada „tikimybė“ reiškia skaičių, kaip, pavyzdžiui, teiginyje „Tikimybė, kad tris kartus metant monetą, atvirs vien herbai, lygi 0,125“. Vartojama pastarajame kontekste tikimybė taip pat gali būti išreikšta žodžiu „šansas“, kaip teiginyje „Šansai, kad tris kartus metant monetą, iškris vien herbai, lygūs* 12,5%“. Terminas „galimybės“ vartojamas tai pačiai tikimybės sąvokai išreikšti šiek tiek kitu pavidalu. Vėliau šiame skyriuje mes paaiškinsime, kaip paversti galimybes tikimybėmis ir atvirkščiai.

Šis skyrius padalytas į dvi dalis. Pirmoje dalyje išdėstysime pagrindines sąvokas, kurių reikia aptariant tikimybę, ir tik antroje dalyje apibrėšime ir skaičiuosime tikimybes.

KAS YRA TIKIMYBIŲ TEORIJA?

Tikimybių teorija tiria tam tikras situacijas, kurias matematikai mėgsta vadinti **tikimybiniais bandymais**, arba tiesiog **bandymais**. Sakysime, kad bandymas yra tikimybinis, jei galimų jo baigčių (rezultatų) yra daugiau negu viena, ir negalima iš anksto tvirtai pasakyti, kuri iš galimų baigčių iš tikrųjų įvyks. Tipiški bandymų pavyzdžiai yra monetos mėtymas, lošimo kauliuko ridenimas, šaudymas į lėkšteles, orų prognozės. Žodis „bandymas“ čia vartojamas labai laisvai, ir daugumai šių bandymų atlikti visai nereikia baltų chalatų ar gerai įrengtų laboratorijų.

Su tikimybiniais bandymais susiduriame kasdien. Kai kurie iš jų yra paprastesni (orai, Pasaulio taurės rezultatai ir t.t.), o kai kurie – sudėtingesni (mūsų mokamos draudimo įmokos, perkamų produktų patikimumas ir t.t.). Nors pagrindines idėjas iliustruosime paprastais pavyzdžiais, skaitytoją perspėjame, kad tikimybių teorija nagrinėja sudėtingiausius reiškinius, o ne tik monetų mėtymą, lošimo kauliukų ridenimą ar šaudymą į lėkšteles.

BAIGČIŲ ERDVĖS

Su kiekvienu bandymu susijusi visų galimų jo baigčių (rezultatų) aibė, vadinama **baigčių erdve**, arba **elementariųjų įvykių erdve**. Paaiškinsime šią sąvoką pavyzdžiais. Baigčių erdvę žymėsime raide E, o aibės E elementų skaičių – raide N.

* Įprasta tikimybes reikšti dešimtainėmis ar paprastosiomis trupmenomis, o šansus – procentais; šiame skyriuje mes taip pat laikysimės tos tradicijos.

1 pavyzdys. Bandymas: metama moneta.

Baigčių erdvė: $E = \{H, S\}$ (nuo šiol monetos pusę su herbu trumpai žymėsime H, o su skaičiumi – S). Riestiniai skliaustai tiesiog rodo, kad baigčių erdvė yra aibė.

Baigčių aibės dydis: $N = 2$.

2 pavyzdys. Bandymas: ridenamas lošimo kauliukas.

Baigčių erdvė: $E =$ { ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ }.

Baigčių aibės dydis: $N = 6$.

3 pavyzdys. Bandymas: ridenami du lošimo kauliukai.

Baigčių erdvė: $E =$ {
⚀⚀, ⚀⚁, ⚀⚂, ⚀⚃, ⚀⚄, ⚀⚅,
⚁⚀, ⚁⚁, ⚁⚂, ⚁⚃, ⚁⚄, ⚁⚅,
⚂⚀, ⚂⚁, ⚂⚂, ⚂⚃, ⚂⚄, ⚂⚅,
⚃⚀, ⚃⚁, ⚃⚂, ⚃⚃, ⚃⚄, ⚃⚅,
⚄⚀, ⚄⚁, ⚄⚂, ⚄⚃, ⚄⚄, ⚄⚅,
⚅⚀, ⚅⚁, ⚅⚂, ⚅⚃, ⚅⚄, ⚅⚅ }.

Baigčių aibės dydis: $N = 36$. Atkreipkite dėmesį, kad šiame pavyzdyje lošimo kauliukai laikomi skirtingais objektais (lyg vienas būtų baltas, o kitas – raudonas), taigi ⚁⚄ ir ⚄⚁ yra laikomos skirtingomis baigtimis.

4 pavyzdys. Bandymas: moneta metama du kartus.

Baigčių erdvė: $E = \{HH, HS, SH, SS\}$. (Čia HS reiškia, kad pirmuoju metimu atvirto herbas, o antruoju – skaičius.)

Baigčių aibės dydis: $N = 4$.

5 pavyzdys. Bandymas: šaudoma į lėkštelių porą.

Baigčių erdvė: $E = \{ss, sn, ns, nn\}$; čia s reiškia sėkmę (pataikymą), n – nesėkmę (šūvį pro šalį).

Baigčių aibės dydis: $N = 4$.

Matome, kad 4 ir 5 pavyzdžiai labai panašūs. Jei sutapatintume H su sėkme ir S – su nesėkme, tai baigčių erdvė būtų visiškai ta pati. 4 ir 5 pavyzdžiai parodo tai, kad iš pažiūros skirtingi bandymai (monetos metimas du kartus, šaudymas į dvi lėksteles) gali turėti praktiškai tą pačią baigčių erdvę.

6 pavyzdys. Bandymas: šaudoma į lėkšteles iki pirmo pataikymo.

Baigčių erdvė: $E = \{s, ns, nns, nnns, \ldots\}$. Daugtaškis čia svarbus – juo nurodome, kad baigčių aibė begalinė. Juk neįmanoma pasakyti, kiek šūvių gali prireikti nevykėliui šauliui.

Nors begalinės baigčių erdvės yra svarbios daugelyje tikimybių teorijos taikymų, jos lieka už mūsų knygos ribų. Paskutinis pavyzdys tik parodo, kad begalinės baigčių erdvės taip pat galimos. O dabar grįžkime prie baigtinių baigčių erdvių.

7 pavyzdys. Daugelyje azartinių lošimų, kuriuose ridenami du kauliukai, baigtis susijusi su atvirtusia bendra akučių suma. Pavyzdžiui, atvirtimą ⚂⚄ atitinka suma 8. Čia mums svarbu ne atskirų kauliukų akučių skaičius, o veikiau jų suma. Kokia baigčių erdvė šiuo atveju? Kadangi galimos baigtys yra sumos 2, 3, ..., 12, tai turime tokį bandymą:

Bandymas: ridenami du kauliukai ir imama atvirtusių akučių suma.

Baigčių erdvė: $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Baigčių erdvės dydis: $N = 11$.

Tarp 3 ir 7 pavyzdžių nėra jokio prieštaringumo. Nors bandymai abiem atvejais gali būti laikomi vienodais (dviejų kauliukų ridenimas), to negalima pasakyti apie *stebėjimą.* 3 pavyzdyje mes tik ridename, o 7 pavyzdyje – ridename ir sudedame, taigi šis skirtumas ir atsispindi baigčių erdvėse. Tai mums pamoka: tą patį pagrindinį bandymą gali atitikti skirtingos baigčių erdvės, priklausančios nuo to, ką stebime. Pabrėšime, kad vienintelė nenuspėjama šio bandymo – kauliuko ridenimo ir akučių skaičiaus sudėjimo – dalis yra atvirtusių akučių skaičius (turbūt sutiksime, kad skaičių sudėtis nėra tikimybinis bandymas), tačiau šių dviejų bandymo dalių (ridename, po to – sudedame) bendras rezultatas yra nauja baigčių erdvė.

Kitame mūsų pavyzdyje pasikartoja minėta situacija.

8 pavyzdys. Dvi draugės, Laima ir Nijolė, lošia hipodromo totalizatoriuje. Pirmajame jojime dalyvauja 5 žirgai – pavadinkime juos A, B, C, D ir F. Laima perka „nugalėtojo“ bilietą (jei jos žirgas laimės, jai atiteks piniginis laimėjimas). Laimai baigčių erdvė yra $E_L = \{A, B, C, D, E\}$. Nijolė perka „trijų prizininkų“ bilietą, todėl ji turi tiksliai atspėti pirmosios, antrosios ir trečiosios vietų laimėtojus. Nijolei baigčių erdvė yra

$$E_N = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, ABD, ADB, \ldots\}.$$

(ABC reiškia, kad žirgas A atbėgs pirmas, žirgas B – antras, o žirgas C – trečias.) Aišku, kad E_N yra gana didelė baigčių erdvė, ir kol kas mums nelabai rūpi ją visą surašyti. Čia vėl tą patį bandymą (žirgų lenktynes) atitinka daugiau negu viena baigčių erdvė, priklausanti nuo to, kas stebima.

8 pavyzdys iliustruoja ir kitą svarbų dalyką. Baigčių erdvė (E_N) yra per didelė, kad ją visą surašytume. Beje, daugelis baigtinių baigčių erdvių yra nepaprastai didelės, ir dažnai net neįmanoma sudaryti viso baigčių sąrašo. Laimei, svarbiausias klausimas yra baigčių erdvės *dydis*, o jį galima nustatyti ir nesurašius visų baigčių. Dabar ir aptarsime, kaip tai daroma.

Baigčių erdvės dydžio nustatymas. Daugybos taisyklė

9 pavyzdys. Bandymas: moneta metama tris kartus.
Baigčių erdvė: $E=\{HHH, HHS, HSH, HSS, SHH, SHS, SSH, SSS\}$.
Baigčių erdvės dydis: $N = 8$.

10 pavyzdys. Bandymas: moneta metama aštuonis kartus.
Šiame pavyzdyje E yra per didelė, kad jos elementus galėtume surašyti. Pagalvokime, kokia čia yra tipiška baigtis. Panašiai, kaip ir 9-ame pavyzdyje, baigtis yra aštuonių raidžių eilė, kurioje galimos tik dvi raidės – H ir S. Pavyzdžiui, eilė $SHHSHSHH$ atitinka tokią baigtį: pirmą kartą iškrito S, antrą kartą – H, trečią – H ir t.t. Aišku, kad yra daug kitų galimų eilių, ir visas jas surašius suskaičiuoti kaip avis būtų labai varginantis ir nematematiškas darbas. Tačiau yra kitas kelias:

- Pirmo metimo galimybių skaičius $= 2$ (H arba S).
- Antro metimo galimybių skaičius $= 2$ (taip pat H arba S).

  ⋮

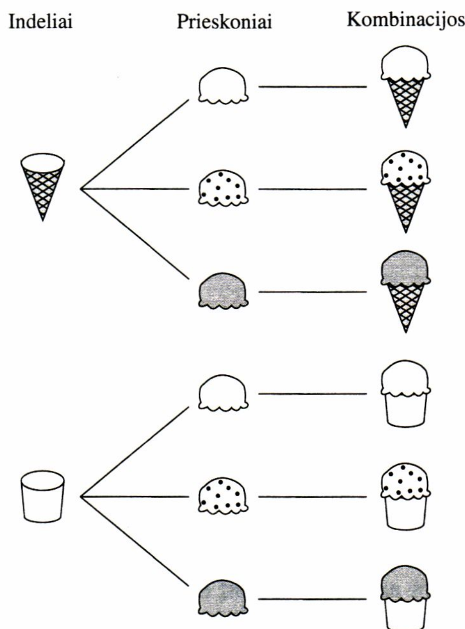
- Aštunto metimo galimybių skaičius $= 2$.

Bendras baigčių skaičius $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$.
Taigi palyginti nesunkiai radome baigčių erdvės dydį: $N = 256$.

10 pavyzdyje taikėme **daugybos taisyklę**. Apytikriai kalbant, ji tvirtina, kad jei kas nors vyksta keliais etapais, tai, norint rasti bendrą skaičių iš būdų, kuriais tai gali įvykti, reikia nustatyti, keliais būdais tai gali įvykti kiekviename etape, ir gautus skaičius sudauginti.
Kodėl veikia daugybos taisyklė, galime paaiškinti paprastu pavyzdžiu.

11 pavyzdys. Jūs norite suvalgyti porciją ledų. Galima pasirinkti vieną iš dviejų rūšių vaflinių indelių (saldžių ir nesaldžių) ir vieną iš trijų rūšių

ledų (vanilinių, šokoladinių ir vaisinių). 15.1 paveikslėlis rodo visas galimas pasirinkimo kombinacijas.



15.1 pav. Taip veikia daugybos taisyklė.

Žinoma, juo sudėtingesnė situacija, juo veiksmingesnis daugybos principas.

---

12 pavyzdys. Inga vyksta į kelionę. Ji pasiima tris skirtingas poras batų, keturis skirtingus sijonus, šešias skirtingas palaidinukes ir du skirtingus švarkus. Kelis skirtingus aprangos komplektus ji galės sudaryti iš tų daiktų, jei laikysime, kad visi išvardyti daiktai yra suderintų spalvų?

Tarkime, kad komplektą sudaro batų pora, sijonas, palaidinukė ir švarkas. Dabar galime pritaikyti daugybos principą ir apskaičiuoti bendrą galimų komplektų skaičių. Jis lygus $3 \times 4 \times 6 \times 2 = 144$. Derinti spalvas tikrai verta: Inga daugiau kaip keturis mėnesius kasdien galės rengtis vis kitaip.

Kai kada dėl tam tikrų priežasčių taikyti daugybos taisyklę sudėtingiau.

---

13 pavyzdys. Inga vėl vyksta į kelionę. Šį kartą ji pasiima trejus batus, keturis sijonus, trejas kelnes, šešias palaidinukes, tris megztinius ir du apsiaustus. Kaip ir anksčiau, daiktai dera vieni prie kitų, ir mes norime

sužinoti, kiek skirtingų komplektų yra dabar. Šį kartą tarkime, kad komplektą sudaro batai, apatinė komplekto dalis (sijonas arba kelnės), viršutinė komplekto dalis (palaidinukė, megztinis arba abu kartu). Be to, tarkime, kad apsiaustą galima vilktis arba vaikščioti be jo (pavasaris). Apskaičiuokime kiekvienos komplekto dalies galimų variantų skaičių atskirai:

- Batų galimų variantų skaičius $= 3$.
- Apatinės komplekto dalies galimų variantų skaičius

$$= \underbrace{4}_{\text{sijonai}} + \underbrace{3}_{\text{kelnės}} = 7.$$

- Viršutinės komplekto dalies galimų variantų skaičius

$$= \underbrace{6}_{\substack{\text{tik}\\ \text{palaidinukė}}} + \underbrace{3}_{\substack{\text{tik}\\ \text{megztinis}}} + \underbrace{18}_{\substack{\text{palaidinukė+megztinis}\\ \text{(taikome daugybos taisyklę)}}} = 27.$$

- Apsiausto galimų variantų skaičius $= \underbrace{2}_{\text{apsiaustas}} + \underbrace{1}_{\text{be apsiausto}} = 3.$

Remiantis daugybos principu, bendras galimų skirtingų komplektų skaičius lygus $3 \times 7 \times 27 \times 3 = 1701$.

---

14 pavyzdys. 8 pavyzdyje mes aptarėme baigčių erdvę E_N, sudarytą iš visų galimų būdų, kuriais žirgų lenktynėse penki žirgai (A, B, C, D ir F) galėtų užimti prizines – pirmą, antrą ir trečią vietas (prisimenate Nijolės „trijų prizininkų“ bilietą?). 8 pavyzdyje mes buvome pradėję rašyti baigčių erdvę,

$$E_N = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, ABD, ADB, \ldots\},$$

tačiau pasidavėme, supratę, kad ji per didelė. Dabar, remdamiesi daugybos taisykle, galėsime nustatyti E_N dydį. Turime:

- Bet kuris iš žirgų gali užimti I vietą, todėl variantų skaičius $= 5$.
- Bet kuris iš žirgų, išskyrus I vietos laimėtoją, gali užimti II vietą, todėl variantų skaičius $= 4$.
- Bet kuris iš likusių žirgų gali užimti III vietą, todėl variantų skaičius $= 3$.

Bendras galimų baigčių skaičius $= 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Daugybos taisyklė padeda kur kas greičiau atlikti tikimybinius skaičiavimus, bet 13 ir 14 pavyzdžiai (ir daugelis pratimų skyriaus gale) rodo, kad, taikant ją, tenka ir pagalvoti.

ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

14 skyriuje mes aptarėme kintamojo, susijusio su tam tikra populiacija, sąvoką. Kintamieji taip pat gali būti natūraliai susiję su tikimybiniu bandymu, nes, šiaip ar taip, bandymo baigtys yra kintamos. Jei *kiekybinio* dydžio skaitinė reikšmė priklauso nuo bandymo rezultato, tai kintamąjį vadiname **atsitiktiniu dydžiu.** Galima sakyti ir kiek kitaip – kadangi tyrinėjama populiacija yra baigčių erdvė (kodėl gi ne?), tai bet koks kiekybinis kintamasis, susijęs su ta populiacija, yra vadinamas atsitiktiniu dydžiu.

Pailiustruosime atsitiktinio dydžio idėją keliais pavyzdžiais. Sekdami tradicine vartosena, atsitiktinius dydžius žymėsime didžiosiomis raidėmis X, Y ir t.t.

15 pavyzdys. Bandymas: ridenami du kauliukai.

Baigčių erdvė: $E =$ {
⚀⚀, ⚀⚁, ⚀⚂, ⚀⚃, ⚀⚄, ⚀⚅,
⚁⚀, ⚁⚁, ⚁⚂, ⚁⚃, ⚁⚄, ⚁⚅,
⚂⚀, ⚂⚁, ⚂⚂, ⚂⚃, ⚂⚄, ⚂⚅,
⚃⚀, ⚃⚁, ⚃⚂, ⚃⚃, ⚃⚄, ⚃⚅,
⚄⚀, ⚄⚁, ⚄⚂, ⚄⚃, ⚄⚄, ⚄⚅,
⚅⚀, ⚅⚁, ⚅⚂, ⚅⚃, ⚅⚄, ⚅⚅ }.

Atsitiktinis dydis: $X =$ atvirtusių akučių suma.
Galimos X reikšmės: $2, 3, \ldots, 12$.

16 pavyzdys. Bandymas: moneta metama aštuonis kartus.
Baigčių erdvė per didelė, kad ją surašytume, $N = 256$ (žr. 10 pavyzdį).
Atsitiktinis dydis: $X =$ atvirtusių herbų skaičius.
Galimos X reikšmės: $0, 1, 2, \ldots, 8$.

17 pavyzdys. Bandymas: moneta metama aštuonis kartus.
Atsitiktinis dydis: $L =$ laimėta pinigų suma, jei kiekvieną kartą, atvirtus herbui, išlošiamas 1 litas, o atvirtus skaičiui – pralošiamas 1 litas.
Galimos L reikšmės: $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$ (žr. 31 pratimą).

Nors iš pirmo žvilgsnio atsitiktiniai dydžiai gali pasirodyti tik formali natūralių dalykų vertinimo priemonė, tačiau ši sąvoka suteikia didžiulių galimybių – ja remiantis, tikimybinius bandymus galima tirti ir apibūdinti aprašomosios

statistikos priemonėmis – grafikais, dažnių diagramomis, skaitinėmis charakteristikomis ir t.t.

TIKIMYBĖS

Kol kas, kalbėdami apie bandymus, baigčių erdves, daugybos taisyklę ir atsitiktinius dydžius, nė žodžio nepasakėme apie tikimybes. Pats laikas tai padaryti.

Sakykime, metame monetą. Kokia tikimybė, kad ji atvirs herbu? Tai nėra sunkus matematinis klausimas, ir beveik kiekvienas duos atsakymą: 50%, 1 iš 2, apie pusę ir t.t. Paprašius pagrįsti šiuos atsakymus, argumentai paprastai suskyla į dvi kategorijas.

Vienas argumentų tipas yra toks: kadangi moneta gali atvirsti dviem būdais, herbo tikimybė yra 1 iš 2. Šį argumentų tipą vadinsime **objektyviuoju požiūriu** į tikimybę.

Kitas argumentų tipas yra maždaug toks: jei mes mėtysime monetą daug daug kartų, tai maždaug pusę kartų atvirs herbas ir maždaug pusę kartų atvirs skaičius, ir todėl herbo tikimybė yra apie pusę. Šį argumentų tipą vadinsime **dažniniu**, arba **statistiniu** požiūriu į tikimybę.

Nors abu požiūriai yra logiškai pagrįsti (laikant, kad mėtoma moneta yra ideali), sunku apibendrinti bet kurį iš jų taip, kad būtų aprėptas ir kitas požiūris.

Sakykime, kad krepšinio niekada nežaidęs žmogus paprašomas mesti į krepšį baudinį. Kokia tikimybė, kad jis pataikys? Aišku, kad objektyvusis požiūris, kuris tiko monetai, šiuo atveju netinka – nors vėl turime tik dvi galimybes (sėkmė ir nesėkmė), visiškai aišku, kad sėkmės tikimybė negali būti laikoma lygia 1 iš 2. Mes negalime padalyti „tikimybės pyrago“ į lygias dalis, kadangi sėkmė ir nesėkmė nėra vienodai tikėtinos baigtys! Šioje situacijoje bet kokia sėkmingam metimui priskirta tikimybė tebūtų subjektyvi stebėtojo nuomonė, išreikšta skaitiniu pavidalu.

Dažninis tikimybės apibrėžimas (kai vartojami tokie pasakymai kaip „jei mes darysime tai daug daug kartų“ arba „ilgą laiką“) turi kitokį trūkumą: daugelio bandymų negalima pakartoti. Sinoptiko teiginio „rytoj lietaus tikimybė yra 90%“ (t.y. 0,9) negalima pagrįsti jokiais dažniniais argumentais – jei būtų daug daug tokių „rytojų“ kaip kalbamas rytojus, ar 90% iš jų būtų lietingi? Taigi teiginys „rytoj lietaus tikimybė – 90%“ yra subjektyvi sinoptiko nuomonės išraiška.

Ginčai apie korektišką tikimybės apibrėžimą tęsiasi daugelį metų. *Objektyvistai* mano, kad tikimybė yra vidinė kiekvieno atsitiktinio įvykio charakteristika. *Subjektyvistai* mano, kad tikimybės tėra skaičiais išreikštos nuomonės ir todėl yra ne paties bandymo, o stebėtojo charakteristikos.

Matematinė išeitis iš šios situacijos bus aptarta vėliau. Aptarsime tik pagrindines mintis ir nekalbėsime apie formalų matematinį tikimybių aparatą,

kadangi ši sritis mums yra per sudėtinga. Matematinis tikimybių pagrindimas buvo užbaigtas apie 1930 metus, o didžiausi nuopelnai čia priskiriami rusų matematikui A. N. Kolmogorovui.

Tikimybių priskirtys

Grįžkime prie metimo į krepšį pavyzdžio.

18 pavyzdys. Žmogus meta baudinį. Mes nieko nežinome apie jo sugebėjimus (tai galėtų būti Šarūnas Marčiulionis ar Jonas Jonaitis). Kokia tikimybė, kad jis įmes?

Mes žinome (jaučiame visa savo esybe), kad atsakymas neturėtų būti $\frac{1}{2}$. Mes nujaučiame, kad ši tikimybė galėtų būti bet koks skaičius. Na, pasakyta šiek tiek per stipriai. Ji negalėtų būti neigiamas skaičius (tai akivaizdu) ir skaičius, didesnis už 1 (100% šansų), todėl galime sušvelninti savo teiginį: tikimybė gali būti lygi bet kokiam skaičiui tarp 0 ir 1. O kaip su 0 ir 1? Tikimybė 0 reikštų nulinius sėkmės šansus; tikimybė 1 reikštų garantuotą sėkmę. Nors abi šios situacijos nelabai tikėtinos, tačiau vis dėlto įmanomos, ir mes jų neatmetame. Taigi galime teigti: taiklaus baudinio metimo į krepšį tikimybė yra skaičius tarp 0 ir 1 imtinai. Tikslios jos reikšmės nežinome, nes nieko nežinome apie asmenį, metantį į krepšį, bet tai jokia problema, nes mes tiesiog laikome tikimybę kintamuoju (sakykime, p). Ir dar vienas šio pavyzdžio komentaras. Netaiklaus metimo tikimybė taip pat yra skaičius tarp 0 ir 1 imtinai. Iš tikrųjų, šios dvi tikimybės (sėkmės ir nesėkmės) yra susijusios – jų suma lygi 1 (metimas į krepšį yra arba taiklus, arba netaiklus).

15.1 lentelėje išdėstyta šių samprotavimų santrauka.

Baigtys	Tikimybės
Sėkmė (s)	Sėkmės tikimybė $= p$
Nesėkmė (n)	Nesėkmės tikimybė $= 1 - p$

15.1 lentelė. Tikimybinis bandymas: baudos metimas į krepšį.

15.2 lentelėje tas pats pateikta formulėmis (žymėjimas P susijęs su angliškuoju žodžiu *probability* ir kitų kalbų žodžiais, reiškiančiais tikimybę).

Baigtys		Tikimybės
Baigčių erdvė	s	$P(s) = p$
	n	$P(n) = 1 - p$

15.2 lentelė.

Beje, naujasis mūsų aprašymas yra neįtikėtinai lankstus. Jis vienodai geras, ir kai metikas yra Šarūnas Marčiulionis (imkime $p = 0{,}9$), ir kai metikas – Jonas Jonaitis (imkime $p = 0{,}15$) arba dar kas nors: Tomas, Petras ar Martynas. Kiekvienas pasirinkimas lemia skirtingas baigčių erdvės **tikimybių priskirtis**.

19 pavyzdys. Penki tenisininkai – Tomas, Marta, Andrius, Gabrielė ir Monika dalyvauja turnyre. Mus domina, kas laimės turnyrą. Baigčių erdvė yra $E =$ {Tomas, Marta, Andrius, Gabrielė, Monika}.

Remiantis vienu treneriu, šios erdvės tikimybių priskirtis yra tokia: P(Tomas) $= 0{,}25$, P(Marta) $= 0{,}22$, P(Andrius) $= 0{,}14$, P(Gabrielė) $= 0{,}18$. P(Monika) reikšmė nepasakyta, tačiau mes galime apskaičiuoti, kad P(Monika) $= 0{,}21$, nes visų tikimybių suma turi būti lygi 1.

Kitas treneris visiškai nesutinka su tokia priskirtimi ir tvirtina, kad Marta, Gabrielė ir Monika turi lygius šansus laimėti, Andriaus šansai lygūs 10%, o Tomo – 27%. Ši nuomonė virsta kita tos pačios baigčių erdvės tikimybių priskirtimi. Kokia ta priskirtis? Kadangi Tomo ir Andriaus bendri šansai laimėti yra lygūs 37%, tai Martai, Gabrielei ir Monikai lieka 63%. Kadangi jos turi lygius šansus laimėti, tai kiekvienos iš jų šansai lygūs 21%. Antrojo trenerio nuomonę išreiškia tokia baigčių erdvės tikimybių priskirtis: P(Andrius) $= 0{,}1$, P(Tomas) $= 0{,}27$, P(Marta) $= 0{,}21$, P(Gabrielė) $= 0{,}21$, P(Monika) $= 0{,}21$.

18 ir 19 pavyzdžiai iliustruoja baigčių erdvės tikimybių priskirties sąvoką, kurią dabar apibrėšime tiksliai. Baigčių erdvės E **tikimybių priskirtis** yra baigtims priskirtų skaičių aibė, tenkinanti tokias dvi sąlygas:

1. Kiekvienas šios aibės skaičius yra tarp 0 ir 1 (imtinai).
2. Visų šių skaičių suma lygi 1.

Kiekviena skaičių aibė, tenkinanti 1 ir 2 sąlygas, yra tikimybių priskirtis.

ĮVYKIAI

Iki šiol mes kalbėjome apie atskirų baigčių tikimybes, kurias nurodo tikimybių priskirtis. Dabar žengsime dar vieną žingsnį ir pakalbėsime apie baigčių kombinacijas ir jų tikimybes.

20 pavyzdys. Sakykim, mes norime nustatyti tikimybę, kad 19 pavyzdžio teniso turnyrą laimės mergaitė. Intuityviai aišku, kad mums užtenka rasti tikimybes, priskirtas kiekvienai žaidėjai, ir jas sudėti. Taigi iš pradžių nustatome atitinkamą aibę

mergaitės = {Marta, Gabrielė, Monika}.

o po to suskaičiuojame tikimybę

P(mergaitės) = P(Marta) + P(Gabrielė) + P(Monika).

Žinoma, atsakymas priklauso nuo tikimybių priskirties. Remiantis pirmuoju treneriu, P(mergaitės) $= 0{,}22 + 0{,}18 + 0{,}21 = 0{,}61$, o remiantis antruoju – P(mergaitės) $= 0{,}21 + 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}63$.

Dauguma tikimybių uždavinių yra susiję su baigčių kombinacijomis, vadinamomis įvykiais. **Įvykiu** vadinsime bet kokį baigčių erdvės poaibį.

21 pavyzdys. 9 pavyzdyje nagrinėjome bandymą, kuriame moneta metama tris kartus, ir matėme, kad baigčių erdvė yra $E = \{HHH, HHS, HSH, HSS, SHH, SHS, SSH, SSS\}$. Ši baigčių erdvė turi daugybę galimų įvykių. 15.3 lentelėje parodyti keli iš jų.

	Ivykis	Baigčių aibė	Įvykio dydis
1	Ne mažiau kaip du herbai	$\{HHH, HSH, SHH, HHH\}$	4
2	Daugiau kaip du herbai	$\{HHH\}$	1
3	Ne daugiau kaip du herbai	$\{SSS, SSH, SHS, HSS, SHH, HSH, HHS\}$	7
4	Nė vieno skaičiaus	$\{HHH\}$	1
5	Lygiai vienas skaičius	$\{HHS, HSH, SHH\}$	3
6	Lygiai vienas herbas	$\{SSH, SHS, HSS\}$	3
7	Pirmas atvirto herbas	$\{HHH, HHS, HSH, HSS\}$	4
8	Vienodai herbų ir skaičių	$\{\}$	0
9	Ne daugiau kaip trys herbai	E	8
10	Pirmasis – herbas, ir ne mažiau kaip du skaičiai	$\{HSS\}$	1

15.3 lentelė. Keletas baigčių erdvės įvykių.

Kaip rodo 21 pavyzdys, yra daug būdų, kuriais baigtys gali sudaryti įvykį, ir tas pats įvykis gali būti (žodžiais) nusakytas ne vienu būdu (pavyzdžiui, 2-asis ir 4-asis įvykiai 15.3 lentelėje). Įvykio baigčių skaičius gali kisti nuo 0 iki N (baigčių erdvės dydžio). Jei įvykio baigčių skaičius lygus 0 (kaip 8-asis įvykis 15.3 lentelėje), tai įvykis vadinamas **negalimuoju įvykiu**; jei baigčių įvykio skaičius yra lygus N (kaip 9-asis įvykis 15.3 lentelėje), tai įvykis vadinamas **būtinuoju įvykiu**.

Kiekviena baigčių erdvės tikimybių priskirtis kiekvienam įvykiui savaime priskiria tikimybę. Ji gaunama sudėjus tą įvykį sudarančių baigčių tikimybes.

Kad ir kokia būtų tikimybių priskirtis, negalimojo įvykio tikimybė visada lygi 0 (P({ }) = 0), o būtinojo įvykio tikimybė visada lygi 1 ($\mathrm{P}(E) = 1$).

Dabar jau esame pasirengę apibrėžti vadinamąjį **tikimybinį modelį** – jame susieina visos aptartos sąvokos.

TIKIMYBINIAI MODELIAI

Tikimybinį modelį sudaro, pirma, baigčių erdvė, sudaryta iš visų galimų atsitiktinio bandymo baigčių ir, antra, tos baigčių erdvės tikimybių priskirtis. Pastaroji kiekvienai atskirai baigčiai priskiria skaičių tarp 0 ir 1 imtinai, vadinamą tos baigties tikimybe. Matematiniu požiūriu nesvarbu, iš kur tos tikimybės imamos. Jos gali remtis stebėtojo subjektyvia nuomone, gali būti dažnių skaičiavimo ar kokios nors sudėtingos formulės taikymo rezultatas. Tereikalaujama, kad būtų laikomasi „žaidimo taisyklių" – visos tikimybių reikšmės turi būti tarp 0 ir 1, o jų suma lygi 1. Jei tikimybės jau priskirtos atskiroms baigtims, tai ir jų kombinacijoms, vadinamoms *įvykiais*, yra priskirtos tikimybės. Bet kurio įvykio tikimybė gaunama sudedant įvykį sudarančių baigčių tikimybes. Skyrium imant, negalimojo įvykio { } tikimybė lygi 0, o būtinojo įvykio E tikimybė lygi 1. Visus šiuos teiginius galima apibendrinti taip.

Tikimybinis modelis

- **Baigčių erdvė.** Visų galimų atsitiktinio bandymo baigčių erdvė $E = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$.
- **Erdvės *E* tikimybių priskirtis.** Kiekvienai baigčiai b_i priskiriamas skaičius $\mathrm{P}(b_i)$, laikantis taisyklių:
  1. $0 \leqslant \mathrm{P}(b_i) \leqslant 1$ ir
  2. $\mathrm{P}(b_1) + \mathrm{P}(b_2) + \cdots + \mathrm{P}(b_N) = 1$.
- **Įvykiai.** Įvykis yra bet kuris E poaibis. Skyrium imant, { } (negalimasis įvykis) ir pati E (būtinasis įvykis) yra įvykiai.
- **Įvykių tikimybės.** Kiekvieno įvykio tikimybė yra tą įvykį sudarančių baigčių tikimybių suma. Skyrium imant, P({ }) = 0 ir $\mathrm{P}(E) = 1$.

Jei visos baigtys yra vienodai tikėtinos

Geriausias būdas mesti lošimo kauliuką yra išmesti jį visiškai.

ANGLŲ PATARLĖ

Vienas iš seniausių ir paprasčiausių tikimybių teorijos taikymų susijęs su azartiniais lošimais. Mes nesame jų šalininkai, bet azartiniai lošimai yra gausus pavyzdžių šaltinis ir kelia daugybę įdomių matematinių uždavinių. Daugeliui lošimų reikia kokios nors priemonės ar prietaiso, kaip moneta ar monetos, lošimo kauliukas ar kauliukai, kortų kaladė, ruletė ir t.t. Tokiu atveju laikoma, kad lošimo įrankis yra idealus, t.y. moneta ar kauliukas yra

simetriški, kortos gerai išmaišytos ir nėra žymėtos, o ruletės ratas – subalansuotas. Matematiškai tai reiškia, kad visų baigčių tikimybės vienodos. Kadangi tikimybių suma lygi 1 (vienas iš tikimybinio modelio reikalavimų), tai, pirma, kiekvienos baigties tikimybė turi būti $1/N$ (čia N – baigčių erdvės dydis), ir, antra, bet kurio įvykio tikimybė gaunama padalijus jį sudarančių baigčių skaičių iš N. Tad šį tikimybinį modelį galime surašyti taip.

Tikimybinis modelis, jei visos baigtys vienodai tikėtinos

- Baigčių erdvės dydis $= N$.
- P(bet kuri baigtis) $= 1/N$.
- Jei A yra įvykis, tai $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\text{įvykio } A \text{ baigčių skaičius}}{N}$.

Pagal šį modelį tikimybės gali būti apskaičiuotos (neretai tenka taikyti daugybos principą).

22 pavyzdys. Iš idealiosios kortų kaladės traukiama korta. Kokia tikimybė ištraukti tūzą?

Čia $N = 52$. Įvykis

tūzas = {A♥, A♦, A♣, A♠}

sudarytas iš keturių baigčių, kurių kiekvienos tikimybė lygi $\frac{1}{52}$. Todėl

$$\mathrm{P}(\text{tūzas}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077.$$

23 pavyzdys. Iš idealiosios kortų kaladės traukiamos dvi kortos. Kokia tikimybė ištraukti du tūzus?

Iš pradžių apskaičiuokime baigčių erdvės dydį. Laikydami, kad kortos traukiamos paeiliui (iš pradžių viena, po to – kita), skaičiuokime taip:

- Pirmoji korta gali būti ištraukta 52 būdais.
- Antroji korta gali būti ištraukta 51 būdu.
- $N =$ bendras skaičius būdų, kuriais gali būti ištrauktos dvi kortos $= 52 \times 51$.

Dabar apskaičiuojame įvykio $A =$ „ištraukti du tūzai“ dydį.

- Pirmojo tūzo galimybių skaičius $= 4$.
- Antrojo tūzo galimybių skaičius $= 3$.
- Įvykio A dydis $= 4 \times 3$.

Taigi,

$$P(A) = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} = \frac{1}{221} \approx 0{,}0045.$$

24 pavyzdys. Ridenami du idealūs lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirsiančių akučių suma bus lygi 11? Kokia tikimybė, kad suma bus lygi 7? Kokia tikimybė, kad suma bus lygi 7 arba 11?

Du lošimo kauliukai gali atvirsti 36 būdais (žr. 3 pavyzdį). Kadangi lošimo kauliukai idealūs, tai kiekvienos baigties tikimybė yra $\frac{1}{36}$. Suma 11 gali atvirsti dviem būdais (⚄⚅, ⚅⚄), todėl

$$P(S11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$$

($S11$ pažymėjome įvykį „atvirtusių akučių suma lygi 11"; įvykį „atvirtusių akučių suma lygi 7" žymėsime $S7$ ir pan.).

Įvykį $S7$ sudaro šešios galimos baigtys:

$S7 =$ {⚀⚅, ⚁⚄, ⚂⚃, ⚃⚂, ⚄⚁, ⚅⚀}.

Todėl

$$P(S7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Įvykį $S7$ arba $S11$ sudaro aštuonios galimos baigtys (šešios iš $S7$ ir 2 iš $S11$), ir todėl

$$P(S7 \text{ arba } S11) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0{,}22.$$

25 pavyzdys. Ridenami du idealūs lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent vienas kauliukas atvirs viena akute ⚀?

Jau matėme (24 pavyzdys), kad kiekvienos baigties tikimybė yra $\frac{1}{36}$. Paaiškinsime tris būdus šiam uždaviniui spręsti.

- **1 būdas (jėgos būdas).** Aprašysime įvykį A, reiškiantį „bent vienas kauliukas atvirto viena akute ⚀“:

  $A = \{$⚀⚀, ⚀⚁, ⚀⚂, ⚀⚃, ⚀⚄, ⚀⚅, ⚁⚀, ⚂⚀, ⚃⚀, ⚄⚀, ⚅⚀$\}$.

  Gauname, kad $P(A) = \frac{11}{36}$.

- **2 būdas (priešingojo įvykio būdas).** Vaizdumo dėlei susitarkime sakyti, kad mes išlošiame tuo atveju, jei bent vienas kauliukas atvirsta ⚀, ir pralošiame priešingu atveju. Tai reiškia, kad mes pralošime, jei abu kauliukai atvirs ne ⚀. Raskime pralošimo tikimybę (tai ir yra priešingas išlošimui įvykis). Taikydami daugybos taisyklę, suskaičiuosime baigčių, sudarančių pralošimo įvykį, skaičių:

  - Pirmas kauliukas gali atvirsti (netinka ⚀) 5 būdais.
  - Antras kauliukas gali atvirsti (netinka ⚀) 5 būdais.
  - Abu kauliukai gali atvirsti (abu – ne ⚀) $5 \times 5 = 25$ būdais.

    Tikimybė, kad mes pralošime: $\mathrm{P(pralošimas)} = \frac{25}{36}$.
    Tikimybė, kad mes laimėsime: $\mathrm{P(laimėjimas)} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

- **3 būdas (nepriklausomųjų įvykių būdas).** Šiuo būdu spręsdami, nagrinėjame kiekvieną kauliuką atskirai. Šiuo atveju patogiau įsivaizduoti, kad mes du kartus ridename tą patį kauliuką (matematiškai tai lygiai tas pats, kaip vieną kartą ridenti du kauliukus).

  Ridenant pirmą kartą, tikimybė, kad neatvirs ⚀, yra $\frac{5}{6}$ (iš šešių galimų baigčių penkios nėra ⚀). Dėl tos pačios priežasties tikimybė, kad antruoju ridenimu neatvirs ⚀, taip pat lygi $\frac{5}{6}$.

  Na, o dabar – lemiamas momentas: tikimybė, kad nė vienu ridenimu neatvirs ⚀, lygi $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Mes galime sudauginti dviejų įvykių („pirmuoju ridenimu atvirto ne ⚀“ ir „antruoju ridenimu atvirto ne ⚀“) tikimybes todėl, kad šie įvykiai yra **nepriklausomi**: pirmojo įvykio baigtis neturi jokios įtakos antrojo įvykio baigčiai.

  Sprendimą baigiame taip pat, kaip ir spręsdami antruoju būdu: $\mathrm{P(pralošimas)} = \frac{25}{36}$, ir todėl $\mathrm{P(laimėjimas)} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Iš trijų 25 pavyzdžio sprendimo būdų trečiasis atrodo painiausias, tačiau būtent jis yra pats veiksmingiausias: jis remiasi vadinamąja tikimybių daugybos taisykle.

Tikimybių daugybos taisyklė. Jei sudėtinį įvykį galima suskaidyti į paprastesnius nepriklausomus įvykius (t.y. tokius, kurių baigtis neturi įtakos kitų įvykių baigčiai), tai viso įvykio tikimybė lygi jo sudėtinių įvykių tikimybių sandaugai.

Tikimybių daugybos taisyklė yra svarbi ir veiksminga, tačiau ji tinka tik tada, kai įvykio dalys nepriklausomos. Pateiksime dar du pavyzdžius, iliustruojančius tikimybių daugybos taisyklės galią.

---

26 pavyzdys. Keturis kartus ridenamas idealus lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad nors kartą atvirs ⊡?

Pabandykime spręsti tuo pačiu trečiuoju 25 pavyzdžio būdu (jei pabandytume pirmąjį, jėgos būdą, greitai suvoktume, kodėl turime būti dėkingi daugybos taisyklei). Vėl sakykime, kad išlošiame, jei bent kartą atvirsta ⊡, ir pralošiame priešingu atveju. Žinome, kad

- P(pirmuoju ridenimu atvirs ne ⊡) $= \frac{5}{6}$.
- P(antruoju ridenimu atvirs ne ⊡) $= \frac{5}{6}$.
- P(trečiuoju ridenimu atvirs ne ⊡) $= \frac{5}{6}$.
- P(ketvirtuoju ridenimu atvirs ne ⊡) $= \frac{5}{6}$.

Kadangi bet kurio ridenimo baigtys nepriklauso nuo likusiųjų, galime taikyti tikimybių daugybos taisyklę:

$$\text{P(pralošimas)} = \text{P(nė karto neatvirto } \boxdot) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482.$$

Todėl

$$\text{P(išlošimas)} = \text{P(bent kartą atvirto } \boxdot) \approx 0{,}518.$$

Praktiškai šis rezultatas reiškia štai ką: jei mes žaistume šį žaidimą nuolat ir kiekvieną kartą lažintumės, kad bent kartą iš keturių ridenimų atvirs ⊡, tai išloštume maždaug 51,8% visų lažybų. Statant šiose lažybose 1 Lt prieš 1 Lt, lošti sektųsi visai neblogai.

---

27 pavyzdys. Tarkime, kad mes lošiame panašiai, kaip ankstesniame pavyzdyje, tik vietoj vieno kauliuko ridename porą kauliukų 24 kartus. Jei nors kartą pasitaiko akučių derinys, vadinamas „gyvatės akimis“ (⊡⊡), tai

mes išlošiame, priešingu atveju – pralošiame. Ar verta žaisti tokį žaidimą? Kokia išlošimo tikimybė?

Šį kartą vėl būtų sunku išspręsti šį uždavinį nesinaudojant tikimybių daugybos principu. Pirma pastebėkime, kad pralošime, jei „gyvatės akys“ neatvirs nė vieną kartą iš 24 ridenimų. Tikimybė, kad pirmuoju ridenimu neatvirs „gyvatės akys“, lygi $\frac{35}{36}$ (žr. 16 pavyzdį). Tas pats tinka 2-ajam, 3-ajam, ..., 24-ajam ridenimams. Remiantis tikimybių daugybos taisykle,

$$\begin{aligned} \text{P(pralošimas)} &= \text{P(24 kartus ridenant – nė vienų „gyvačių akių“)} \\ &= \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}509. \end{aligned}$$

Todėl

$$\text{P(išlošimas)} = 1 - \text{P(pralošimas)} \approx 1 - 0{,}509 = 0{,}491.$$

Nuolat lošdami šį lošimą, mes laimėtume maždaug 49,1% atvejų. Taigi, jei lošiant statoma vienodai, vargu ar bus iš to naudos*.

GALIMYBĖS IR TIKIMYBĖS

Matematikas, siekdamas aiškumo, reikalauja, kad tikimybės būtų skaičiai tarp 0 ir 1. Kasdieninei vartosenai tai nėra taip svarbu – mes žinome, kad žmonės kalba apie *šansus* kaip tikimybes, išreikštas procentais, ir apie *galimybes*, kurios dažniausiai naudojamos išreikšti tikimybėms, susijusioms su lošimo situacijomis. Panagrinėkime teiginį „Žalgirio“ galimybės laimėti taurę yra 2 prieš 5“ (arba jam ekvivalentų „galimybės, kad „Žalgiris“ nelaimės taurės, yra 5 prieš 2“). Tai reiškia, kad jei lažybose mes pastatysime 2 Lt už „Žalgirį“ ir „Žalgiris“ laimės, tai išlošime 5 Lt. Mes taip pat susigrąžinsime savo 2 Lt, todėl iš viso mums sugrįš 7 Lt. Laimėjimo tikimybė yra lygi statomos sumos (2 Lt) ir viso laimėjimo (7 Lt) santykiui, taigi šiame pavyzdyje P(„Žalgiris“ laimi) $= \frac{2}{7}$.

Bendra (lošimo) galimybių vertimo tikimybėmis taisyklė yra tokia.

* 26 ir 27 pavyzdžiai turi įdomią istoriją – galima sakyti, kad nuo jų prasidėjo matematinis tikimybių tyrimas. Čia aprašyti žaidimai septynioliktajame amžiuje buvo populiarūs prancūzų diduomenėje. Vienas iš azartiškiausių lošėjų buvo A. Merė (Antoine Gombauld, Chevalier de Méré), kuris atsitiktinai susipažino su filosofu ir matematiku Blezu Paskaliu (Blaise Pascal). A. Merė paprašė jį atlikti matematinę tų žaidimų analizę. Sprendžiant šiuos uždavinius, buvo padėti azartinių lošimų teoriniai pagrindai. Paskalis kartu su kitais dviem to meto matematikais – Pjeru Ferma (Pierre Fermat) ir Abramu Muavru (Abraham de Moivre) – pradėjo azartinių lošimų uždavinius nagrinėti kaip matematines problemas, ir taip gimė matematinė tikimybių teorija.

Jei *galimybės įvykio A naudai* yra m prieš n, tai $\mathrm{P}(A) = \frac{m}{m+n}$.

Bendra tikimybių vertimo galimybėmis taisyklė yra tokia:

Jei $\mathrm{P}(A) = \frac{a}{b}$, tai *galimybės įvykio A naudai* yra a prieš $b - a$, o *galimybės įvykio A nenaudai* yra $b - a$ prieš a.

28 pavyzdys. Grįžkime prie 19 pavyzdžio teniso turnyro. Prisiminkime, kad, remiantis pirmuoju treneriu, tikimybių priskirtis, atitinkanti pergalę turnyre, yra tokia: P(Tomas) = 0,25, P(Marta) = 0,22, P(Andrius) = 0,14, P(Gabrielė) = 0,18, P(Monika) = 0,21. Paverskime šias tikimybes galimybėmis.

Kadangi P(Tomas) = 0,25 = $\frac{1}{4}$, tai Tomo pergalės galimybės yra 1 (skaitiklis) prieš 3 (vardiklis minus skaitiklis). Tomo pralošimo galimybės yra 3 prieš 1.

Panašiai, P(Marta) = 0,22 = $\frac{22}{100}$ = $\frac{11}{50}$, tad Martos pergalės galimybės yra 11 prieš 39. Atkreipkite dėmesį, kad nustatydami galimybes, mes pavertėme dešimtainę trupmeną 0,22 paprastąja.

P(Andrius) = 0,14 = $\frac{14}{100}$ = $\frac{7}{50}$. Andriaus pergalės galimybės yra 7 prieš 43.

P(Gabrielė) = 0,18 = $\frac{18}{100}$ = $\frac{9}{50}$. Gabrielės pergalės galimybės yra 9 prieš 41.

P(Monika) = 0,21 = $\frac{21}{100}$. Monikos pergalės galimybės yra 21 prieš 79.

Skaitytojui kaip pratimą rekomenduojame apskaičiuoti galimybes, atitinkančias antrojo trenerio tikimybių priskirtį (žr. 19 pavyzdį).

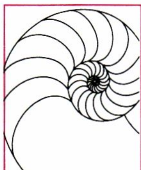
IŠVADOS

Žmogui tikimybės, šansai ir galimybės yra miglotos sąvokos, vartojamos visų pirma lošiant loterijoje ar aptariant rytojaus orus. Tačiau matematikai ir statistikai žiūri į tikimybių teoriją kaip į tikslią schemą, kuri dažnai leidžia išsiaiškinti atsitiktinių įvykių dėsnius. Pagrindiniai šios schemos elementai yra *baigčių erdvė* (arba *elementariųjų įvykių erdvė*), matematiškai tiksliai nusakanti visas galimas *atsitiktinio bandymo* baigtis (rezultatus), ir *tikimybių priskirtis*, suteikiančias kiekvienai baigčiai skaitinę reikšmę. Šios skaitinės reikšmės rodo atitinkamos baigties tikėtinumą. Jos gali turėti matematines ar nematematines ištakas, tačiau vos tik tikimybės priskirtos, žaidimo taisyklės tampa visiškai matematinės.

Vienas iš paprasčiausių tikimybių priskyrimo būdų yra vienodų tikimybių suteikimas visoms baigtims. Šiuo atveju tikimybės skaičiuojamos, atsakius į du pagrindinius (ne visada paprastus) klausimus: 1) koks yra nagrinėjamos baigčių erdvės dydis? 2) koks yra nagrinėjamą įvykį atitinkančio baigčių erdvės poaibio dydis?

Negalima tvirtinti, kad šiame skyriuje mes tik slystelėjome matematinės tikimybių teorijos paviršiumi. Nors tikimybių teorija yra palyginti jauna matematikos šaka, pažintis su atsitiktinumo dėsniais yra svarbi visuotinės kultūros dalis ir labai praverčia kasdieniniame gyvenime. Minutėlę pamąsčius apie tai, kiek mūsų gyvenimas yra valdomas likimo ir kiek – atsitiktinumo, didelis tikimybių vaidmuo nebestebintų. Kaip kartą pasakė Julijus Cezaris, „atsitiktinumas yra didysis gyvenimo mokytojas“.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



atsitiktinis dydis
baigčių erdvė
būtinasis įvykis
daugybos taisyklė
elementariųjų įvykių erdvė
galimybės
įvykis
negalimasis įvykis
nepriklausomi įvykiai
šansai
tikimybė
tikimybinis bandymas
tikimybinis modelis
tikimybių daugybos taisyklė
tikimybių priskirtis

PRATIMAI

Apšilimas

1. Nagrinėkime bandymą: moneta metama keturis kartus.
a) Surašykite šio bandymo baigčių erdvę.
b) Koks baigčių erdvės dydis?
c) Surašykite baigtis, sudarančias įvykį, kai atvirsta lygiai du herbai.
d) Laikydami monetą idealia, raskite punkto c) įvykio tikimybę.

2. Nagrinėkime bandymą: korta traukiama iš įprastinės 52 kortų kaladės.
a) Surašykite šio bandymo baigčių erdvę.
b) Koks baigčių erdvės dydis?
c) Surašykite baigtis, sudarančias įvykį, kad bus ištraukta pikų korta.
d) Laikydami kortų kaladę idealia, raskite punkto c) įvykio tikimybę.

3. Septyni žaidėjai (pažymėkime juos $D_1, D_2, \dots, D_7$) surengė teniso turnyrą. Remiantis vienu specialistu, D_1 turi dvigubai daugiau galimybių laimėti turnyrą už bet kurį kitą sportininką, o $D_2, D_3, \dots, D_7$ turi vienodas galimybes laimėti.
a) Surašykite baigčių erdvę ir raskite šios erdvės tikimybių priskirtį, atspindinčią specialisto nuomonę.
b) Kokios D_1 (ir D_2) galimybės laimėti turnyrą?

4. Aštuoni žaidėjai (pažymėkime juos $D_1, D_2, \ldots, D_8$) surengė šachmatų turnyrą. Remiantis vienu specialistu, D_1 turi 25% šansų laimėti turnyrą, D_2 – 15%, D_3 – 5%, o visų likusiųjų žaidėjų šansai vienodi.

a) Išrašykite baigčių erdvę ir raskite šios erdvės tikimybių priskirtį, besiremiančią specialisto nuomone.

b) Kokios D_1 (ir D_2) galimybės laimėti turnyrą?

5. a) Kiek skirtingų automobilio numerių gali būti sudaryta iš trijų raidžių (vartojamos 26 raidės) ir po jų einančių trijų skaitmenų (nuo 0 iki 9)?

b) Kiek skirtingų automobilių numerių gali būti sudaryta iš trijų raidžių ir po jų einančių trijų skaitmenų, jei pirmasis skaitmuo negali būti 0?

c) Kiek skirtingų automobilių numerių gali būti sudaryta iš trijų raidžių ir po jų einančių trijų skaitmenų, jei jokia raidė ir joks skaitmuo nesikartoja?

6. a) Kiek iš viso yra keturraidžių žodžių (čia žodžiu laikysime bet kokią, kad ir beprasmę, raidžių eilutę)?

b) Kiek iš viso yra keturraidžių žodžių, prasidedančių raide A?

c) Kiek iš viso yra keturraidžių žodžių, neturinčių pasikartojančių raidžių?

7. Yra aštuoni sunumeruoti enciklopedijos tomai.

a) Keliais būdais visi aštuoni enciklopedijos tomai gali būti sudėti į lentyną?

b) Keliais būdais aštuoni enciklopedijos tomai gali stovėti lentynoje, jei vienas tomas stovi ne savo vietoje?

8. Keturi vyrai ir keturios moterys turi sustoti į eilę prie kasos parduotuvėje.

a) Keliais būdais jie gali tai padaryti?

b) Keliais būdais jie gali tai padaryti, jei pirma eilėje turi stovėti moteris?

c) Keliais būdais jie gali tai padaryti, jei vyrai ir moterys turi stovėti pakaitomis (moteris, vyras, moteris ir t.t.)?

9. Vaikiško sukučio padas nudažytas penkiomis spalvomis: raudona, mėlyna, geltona, violetine ir oranžine. Patirtis rodo, kad sukučio rodyklė ties kiekviena iš pagrindinių spalvų (raudona, mėlyna, geltona) sustoja apie 100 kartų iš 1000, o ties kitomis vienodai kartų. Nagrinėkime tokį tikimybinį bandymą: sukutis pasukamas vieną kartą.

a) Kokia šio bandymo baigčių erdvė?

b) Surašykite įvykį, kad bandymo baigtis bus pagrindinė spalva.

c) Surašykite įvykį, kad baigtis nebus pirminė spalva.

d) Nurodykite tinkamą punkto a) baigčių erdvės tikimybių priskirtį.

10. Vaikiškame sukutyje galimos penkios baigtys: 1, 2, 3, 4 ir 5. Sukutis pasukamas vieną kartą.
a) Kokia šio bandymo baigčių erdvė?
b) Aprašykite įvykį, kad bandymo baigtis bus nelyginis skaičius.
c) Aprašykite įvykį, kad bandymo baigtis bus lyginis skaičius.
d) Sakykime, punkto b) įvykio tikimybė lygi 0,3. Raskite punkto c) įvykio tikimybę.
e) Sakykime, punkto b) įvykio tikimybė lygi 0,3, $P(1) = P(3) = P(5)$ ir $P(2) = P(4)$. Raskite tikimybių priskirtį.

11. Nagrinėkime baigčių erdvę $E = \{A, B, C\}$. Aprašykite visus galimus įvykius (primename, kad įvykis yra bet kuris E poaibis, įskaitant $\{\ \}$ ir visą E).

12. Nagrinėkime baigčių erdvę $E = \{A, B, C, D\}$. Aprašykite visus galimus įvykius.

13. Dvi draugės, Laima ir Nijolė, lošia hipodromo totalizatoriuje. Pirmajame jojime dalyvauja 5 žirgai – pavadinkime juos A, B, C, D ir F. Laima perka „bronzos“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinktas žirgas užims pirmą, antrą arba trečią vietą, jai atiteks piniginis laimėjimas). Nijolė perka „dviejų prizininkų“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinkti du žirgai užims 1 ir 2 vietas jos nurodyta tvarka, jai atiteks piniginis laimėjimas).
a) Išrašykite baigčių erdvę Laimai.
b) Išrašykite baigčių erdvę Nijolei.

14. Dvi draugės (Laima ir Nijolė) lošia hipodromo totalizatoriuje. Antrajame jojime dalyvauja aštuoni žirgai – pavadinkime juos A, B, C, D, F, G, H ir K. Laima perka „sidabro“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinktas žirgas užims pirmą arba antrą vietą, ji gaus piniginį laimėjimą). Nijolė perka „trijų prizininkų“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinkti trys žirgai užims pirmą, antrą ir trečią vietas jos nurodyta tvarka, ji gaus piniginį laimėjimą).
a) Išrašykite baigčių erdvę Laimai.
b) Neišrašydami baigčių erdvės Nijolei, raskite jos dydį.

15–20 *pratimuose kalbama apie bandymą, kuriame ridenami du lošimo kauliukai. Atsitiktinis dydis X yra atvirtusių akučių suma. Laikome, kad kauliukai idealūs.*

15. a) Kokia tikimybė, kad $X = 10$?
b) Kokios yra sumos 10 galimybės?
c) Kokios yra nelygios dešimčiai sumos galimybės?
d) Kokia tikimybė, kad suma 10 neatvirs?

16. a) Kokia tikimybė, kad atvirs „gyvatės akys“ (t.y. kad abu kauliukai atvirs akute)?
b) Kokios yra „gyvatės akių“ galimybės?
c) Kokia tikimybė, kad „gyvatės akys“ neatvirs?
d) Kokios yra galimybės, kad neatvirs „gyvatės akys“?

17. a) Aprašykite įvykį $X \leqslant 5$.
b) Kokia punkto a) įvykio tikimybė?
c) Kokios yra punkto a) įvykio galimybės?

18. a) Kokia tikimybė, kad bent vienas kauliukas atvirs akute?
b) Kokios įvykio, kad bent vienas kauliukas atvirs akute, galimybės?

19. Tarkime, kad pora kauliukų ridenama du kartus. Ridenimas laikomas sėkmingu, jei atvirtusių akučių suma lygi 7, ir nesėkmingu – priešingu atveju.
a) Raskite tikimybę, kad abu ridenimai sėkmingi.
b) Nurodykite baigčių erdvės $E = \{ss, sn, ns, nn\}$ tikimybių priskirtį.

Treniruotė

21. Nagrinėkime tokį lošimą: du lošimo kauliukai ridenami 25 kartus. Laimime, jei nors kartą atvirsta ⚅⚅, priešingu atveju – pralaimime. Kokia išlošimo tikimybė?

22. Nagrinėkime tokį lošimą: du lošimo kauliukai ridenami penkis kartus. Laimime, jei nors kartą atvirs suma 7, priešingu atveju – pralaimime. Kokia išlošimo tikimybė?

23. Gamykloje surenkami automobilių radijo imtuvai. Remiantis atsitiktinai pasirinktų imtuvų testavimo rezultatais, žinoma, kad vidutiniškai 1 iš 50 imtuvų turi defektų (tai reiškia, kad atsitiktinai pasirinktas imtuvas turi defektų su tikimybe 0,02). Pagaminti imtuvai pristatomi į parduotuves supakuoti į dėžes po 12.
a) Kokia tikimybė, kad dėžėje nėra defektinių imtuvų? Kokias prielaidas darote skaičiuodami šią tikimybę?
b) Kokia tikimybė, kad dėžėje yra ne daugiau kaip vienas defektinis imtuvas?

24. Metami du lošimo kauliukai. Lošėjas lažinasi, kad atvirtusių akučių suma bus lygi 2, 3, 4, 9, 10, 11 arba 12. Kokia tikimybė jam laimėti tokias lažybas?

25. Kai kurie keistuoliai mėgsta lošimą, vadinamą „atimtis vietoj sudėties". Metami du lošimo kauliukai ir lažinamasi dėl atvirtusių akučių skirtumo (iš didesnio skaičiaus atimamas mažesnis). Atsitiktinį dydį, lygų šiam skirtumui, pažymėkime X.
a) Kokios yra galimos X reikšmės?
b) Raskite tikimybę, kad $X = 1$.
c) Raskite tikimybę, kad $X = 0$.

26. Nagrinėkime bandymą, kuriame iš 52 kortų kaladės traukiamos dvi kortos.
a) Koks baigčių erdvės dydis?
b) Raskite tikimybę, kad abi kortos bus tūzai.
c) Kokia tikimybė, kad abi bus širdžių kortos?
d) Kokia tikimybė, kad pirma bus širdžių korta, o antra – tūzas?

27. „Ritos virtuvė" siūlo picas su šešių rūšių priedais – dešrelėmis, kumpiu, vištiena, grybais, žuvimi ir alyvuogėmis. Kiek skirtingų picų gali būti pagaminta, jei viena pica gali turėti bet kokį skaičių priedų – nuo nulio iki šešių?

28. a) Keliais skirtingais būdais 10 žmonių gali sustoti eilute?
b) Keliais skirtingais būdais 10 žmonių gali sustoti ratu?
(*Nurodymas.* Punkto b) atsakymas gerokai mažesnis už punkto a) atsakymą. Yra daug skirtingų būdų, kuriais tas pats 10-ties žmonių ratas gali būti „ištiestas" į vieną eilutę. Kiek tų būdų?)

29. 30 narių klubas turi išsirinkti 3 narių komitetą.
a) Keliais būdais tai gali būti padaryta, jei komitetą sudaro pirmininkas, jo pavaduotojas ir sekretorius?
b) Keliais būdais tai gali būti padaryta, jei visas komitetas sudaromas iš 3 lygiateisių narių?
(*Nurodymas.* Skirtumas tarp punktų a) ir b) užduočių yra tas, kad punkte b) komiteto narių išrinkimo tvarka neturi reikšmės – Aleksandras, Vytautas ir Kostas sudaro tą patį komitetą, kaip Kostas, Aleksandras ir Vytautas – priešingai nei a) atveju. Todėl punkto b) atsakymas yra mažesnis už punkto a) atsakymą. Keliais būdais iš punkto b) komiteto galima sudaryti skirtingus punkto a) komitetus?)

30. Dvi komandos X ir Y dalyvauja Pasaulio taurės varžybų finale. Judviejų mačo nugalėtojas nustatomas pagal septynerių rungtynių serijos rezultatus – nugalėtoja yra komanda, pirmoji laimėjusi ketverias rungtynes (lygiųjų nebūna). Pasaulio taurės mačo baigtį galima parašyti kaip raidžių, nurodančių kiekvieną rungtynių nugalėtoją, eilę. Pavyzdžiui, raidžių eilė $XYXXYX$ reiškia tokią baigtį: X laimi pirmąsias rungtynes, Y – antrąsias, X – trečiąsias ir t.t.

a) Aprašykite Pasaulio taurės mačo baigčių erdvę E.
b) Apibūdinkite įvykį „X laimi daugiau kaip penkerias rungtynes“.
c) Apibūdinkite įvykį „mačas baigiasi po septynerių ryngtynių“.

31. a) Tarkime, kad moneta metama aštuonis kartus. Kiekvieną kartą, atvirtus H, jūs laimite 1 Lt, o atvirtus S – pralošiate 1 Lt (žr. 17 pavyzdį). Pažymėkite raide L atsitiktinį dydį, reiškiantį jūsų galutinį išlošimą. Paaiškinkite, kodėl galimos dydžio L reikšmės yra $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$ (paaiškinkite, kodėl jūsų išlošimas negali būti $L = 3$).
b) Tarkime, kad jūs išlošiate 1,50 Lt su kiekvienu atvirtusiu H ir pralošiate 1,75 Lt su kiekvienu atvirtusiu S. Kokios yra galimos L reikšmės?

■ **Varžybos**

32. Lošiama ridenant du kauliukus. Lošiant pirmasis ridenimas yra ypatingas: jei atvirsta 7 arba 11, lošikas laimi; jei atvirsta 2, 3 arba 12, lošikas pralaimi. Jei pirmuoju ridenimu atvirsta bet koks kitas skaičius $\{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, šis skaičius pavadinamas lošiko „laime“. Lošikas ridena kauliukus tol, kol atvirsta „laimė“ arba 7. Pirmuoju atveju lošikas laimi, antruoju – pralaimi. Kokia tikimybė laimėti?

33. Gimtadienio uždavinys. Kambaryje 30 žmonių. Kokia tikimybė, kad du iš jų yra gimę tą pačią metų dieną?

34. Trijų baigčių erdvėje yra $2^3 = 8$ įvykiai, o keturių baigčių erdvėje yra $2^4 = 16$ įvykių (žr. 12 pavyzdį). Įrodykite, kad N baigčių erdvėje yra 2^N įvykių.

35. Trejų vartų uždavinys. Jūs dalyvaujate trejų vartų loterijoje. Scenoje yra treji vartai. Už vienerių vartų yra sportinis automobilis, o už kitų dvejų – nieko. Jūs išsirenkate kuriuos nors vienerius vartus, tačiau, prieš juos atidarydamas, loterijos vedėjas atveria kuriuos nors vienerius iš kitų dvejų vartų, ir jūs matote, kad už jų automobilio nėra. Jums leidžiama nekeisti savo nuomonės arba nurodyti kitus vartus. Kaip jūs pasielgtumėte ir kodėl?

36. Optimaliojo rinkimosi uždavinys. Didelėje dėžėje yra 100 bilietų. Ant kiekvieno bilieto užrašyti skirtingi skaičiai, ir jūs nieko daugiau apie tuos skaičius nežinote. Skaičiai gali būti teigiami ir neigiami, sveiki ir trupmeniniai, dideli ir maži – tinka visi. Žinoma, dėžėje yra vienas bilietas su didžiausiu skaičiumi. Tai – išlošiamasis bilietas. Išsirinkę jį, jūs gausite 1000 Lt prizą, priešingu atveju – nieko. Lošimo taisyklės tokios: ištraukę iš dėžės bilietą ir pasižiūrėję į jį, jūs arba išsirenkate jį, arba

suplėšote ir traukiate kitą bilietą. Šitaip traukiate bilietus, kol randate jums patinkamą bilietą arba bilietai pasibaigia.

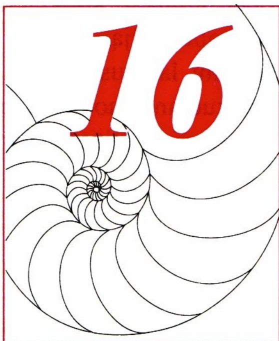
a) Kokia tikimybė, kad pirmas ištrauktas bilietas bus išlošiamasis?
b) Kokia tikimybė, kad, ištraukus 50 bilietų, išlošiamasis bilietas dar bus dėžėje?
c) Sunku net patikėti, bet egzistuoja šio lošimo strategija, kurios laikantis garantuojama daugiau nei 25% šansų laimėti. Sugalvokite tokią strategiją.

37. Loterijos bilietuose surašyti skaičiai nuo 1 iki 50, kaip parodyta paveiksle. Žaidėjai moka už bilietą 1,00 Lt ir pažymi jame 6 iš 50 skaičių. Savaitės gale iš dėžės, kurioje sudėta 50 rutulių, sunumeruotų nuo 1 iki 50, atsitiktinai ištraukiami 6 rutuliai. Jei žaidėjo biliete buvo pažymėti tie patys 6 skaičiai, tai jis laimi milijoną litų (priešingu atveju – nieko).

a) Kokia tikimybė laimėti loterijoje?
b) Kokios yra pralaimėjimo galimybės šioje loterijoje?

Numeris AQJ47391
MILIJONO LITŲ LOTERIJA
Pažymėti 6 skaičius

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50



16 Normalieji skirstiniai

Įvairovė – gyvenimo druska.

NEŽINOMAS AUTORIUS

Beveik viskas normalu

Kitimas yra statistikos pagrindas. Jei duomenys nekistų, statistikai neturėtų ką veikti. Bet kuris kintamasis – egzamino pažymys, ūgis, svoris ir t.t. – visoje populiacijoje įgyja daugybę skirtingų reikšmių (todėl jis ir vadinamas kintamuoju!). Tą pačią kintamojo reikšmę gali įgyti ne vienas populiacijos narys. Kai žinome, kiek populiacijos narių įgijo konkrečią kintamojo reikšmę, sakome, kad turime kintamojo skirstinį.

Skirstinys gali būti tiek netvarkingas, tiek gana taisyklingas. Pastarasis atvejis stebėtinai dažnas, ir tada skirstinį galima daugiau ar mažiau tiksliai priderinti prie tam tikro bendro šablono. Šiuo atveju stulpelinės diagramos ir histogramos, nusakančios skirstinį, esti kartais tiesės, kartais varpo formos, kartais dar kitokio *pavidalo*. Statistikas laiko šį dailų, taisyklingą šabloną, prie kurio daugiau ar mažiau dera jo duomenys, tų duomenų elgsenos matematine idealizacija. Ši matematinė idealizacija paprastai vadinama duomenų *matematiniu modeliu*.

Nors duomenų matematinis modelis gali pasirodyti viso labo tik geidžiama matematinė konstrukcija, tačiau jos nauda didžiulė. Matematinio mode-

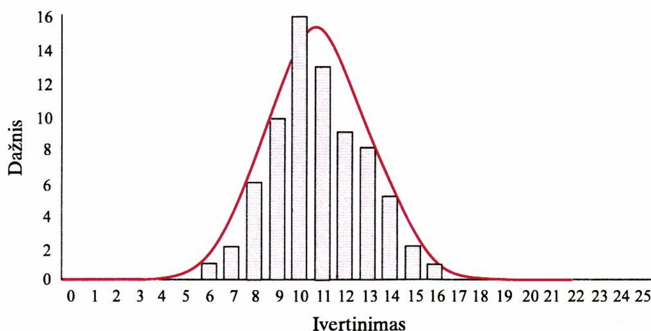
lio charakteristikos yra abstraktūs, teoriniai faktai, bet pritaikyti konkrečiam skirstiniui, jie suteikia papildomos informacijos apie populiaciją.

Iš daugybės skirtingų matematinių duomenų modelių labiausiai paplitęs yra **normalusis** modelis. Šis modelis, taikomas analizuojant duomenis, kurių stulpelinės diagramos ir histogramos daugiau ar mažiau atitinka varpo formos šabloną, ir bus mūsų dėmesio centre šiame skyriuje.

APYTIKRIAI NORMALŪS SKIRSTINIAI

Pradėsime nuo pavyzdžių.

1 pavyzdys. Grįžkime prie profesoriaus Kirvaičio statistikos egzamino, kurį aptarėme 14 skyriaus pradžioje (žr. 14.1 lentelę). Žvilgtelėkime į egzamino balų skirstinį ir išmeskime dvi išskirtis (16.1 pav.). Tai iškreiptos duomenų reikšmės, ir, pasirodo, tokią operaciją atlikti pravartu.



16.1 pav. Statistikos egzamino balų skirstinys (be išskirčių).

Matome, kad 16.1 pav. stulpelinė diagrama primena varpą. Varpo formos kreivė, pritaikyta prie stulpelinės diagramos, yra egzamino rezultatų matematinė idealizacija. Nereikėtų labai nerimauti, kad ji ne visai tobulai dera prie diagramos. Kaip pamatysime kitame skyrelyje, net ir tokia idealizacija yra galinga duomenų aprašymo ir analizavimo priemonė.

Skaitytojų, kuriems yra tekę sudarinėti testų arba egzamino rezultatų diagramas, varpo forma neturėtų stebinti – testų ar egzaminų rezultatai dažnai yra tokios formos (beje, turėtume būti atsargūs su apibendrinimais: klaidinga būtų manyti, kad testų rezultatų histogramos *visada* esti apytikriai varpo formos).

2 pavyzdys. Šiame pavyzdyje panagrinėsime 270 pajėgiausių 1990–1991 metų NBA* krepšininkų ūgių skirstinį. Šių duomenų reikšmės gautos taip:

* National Basketball Association – Nacionalinė krepšinio asociacija, Amerikos krepšinio profesionalų komandų lyga.

ATLANTO GRUPĖ

Komanda	10-ties pajėgiausių krepšininkų ūgis coliais									
Bostonas	72	81	77	84	79	82	84	81	78	78
Majamis	78	79	81	72	75	80	80	79	83	74
Niu Džersis	73	85	81	83	77	80	78	78	79	79
Niujorkas	73	84	75	82	81	77	80	80	82	78
Filadelfija	79	91	78	74	83	75	82	76	80	78
Vašingtonas	75	77	82	75	83	81	81	81	79	76

CENTRINĖ GRUPĖ

Komanda	10-ties pajėgiausių krepšininkų ūgis coliais									
Atlanta	74	84	80	82	76	74	75	67	80	78
Šarlota	80	76	77	80	77	81	78	79	81	78
Čikaga	74	85	82	74	77	78	83	74	84	79
Klivlendas	79	79	84	79	82	75	75	82	72	83
Detroitas	78	83	75	85	74	74	83	80	83	73
Indiana	77	79	78	80	78	82	88	82	78	79
Milvokis	82	82	75	82	79	76	82	76	83	84

VIDURIO VAKARŲ GRUPĖ

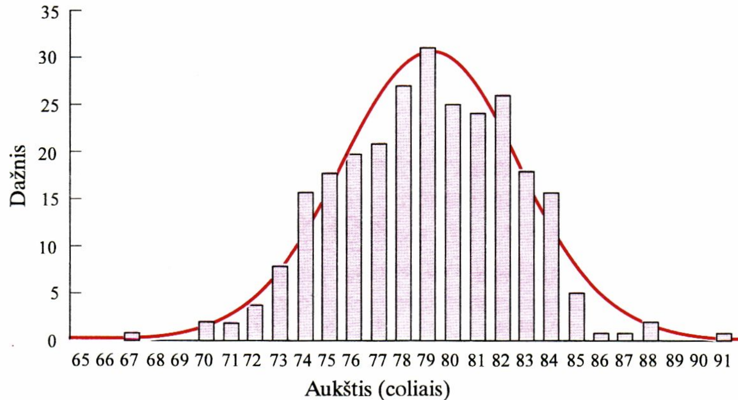
Komanda	10-ties pajėgiausių krepšininkų ūgis coliais									
Dalasas	74	78	75	86	79	76	75	75	80	80
Denveris	70	78	76	79	73	78	80	76	84	81
Hiustonas	75	78	79	74	76	84	80	82	76	77
Minesota	87	71	79	78	78	79	82	73	84	78
Orlandas	83	80	83	83	80	80	73	77	74	76
San Antonija	80	81	80	79	77	85	85	75	79	77
Juta	83	81	80	88	77	76	76	81	74	73

RAMIOJO VANDENYNO GRUPĖ

Komanda	10-ties pajėgiausių krepšininkų ūgis coliais									
Golden State	72	79	84	77	79	82	75	77	77	79
LA Clippers	84	76	74	75	78	76	82	80	82	82
LA Lakers	83	83	74	81	81	81	76	82	81	77
Feniksas	78	82	76	79	73	83	78	81	80	82
Portlandas	77	81	82	79	84	79	77	75	80	76
Sakramentas	80	81	84	78	77	83	79	74	81	84
Sietlas	71	81	79	70	82	79	81	77	76	84

16.1 lentelė. 270 pajėgiausių NBA (1990–1991 metų sezonas) krepšininkų ūgis.

kiekvienoje iš 27 NBA komandų buvo išrinkta 10 geriausių krepšininkų (startinis penketukas bei penki pirmieji, atsarginiai). 16.1 lentelėje nurodytas dešimties pajėgiausių visų komandų žaidėjų ūgis (coliais*).



16.2 pav. 270 pajėgiausių NBA (1990–1991 metų sezonas) krepšininkų ūgis.

16.2 pav. matome 270-ties ūgių iš 16.1 lentelės stulpelinę diagramą. Ir vėl turime apytikriai varpo formos vaizdą. Matematinė idealizacija pasiekiama priderinus prie diagramos varpo formos kreivę. Nors priderinimas ir šį kartą nėra tobulas, jo visiškai pakanka.

1 ir 2 pavyzdžiai iliustruoja dvi skirtingas situacijas (skirtingos populiacijos ir skirtingi kintamieji), kuriose skirstinius galima apytiksliai aprašyti varpo formos šablonu. Tokiais atvejais sakoma, kad duomenų skirstinys yra **apytikriai normalus**. **Normalusis skirstinys** pats yra idealizuotas matematinis modelis, taikomas analizuojant duomenis, kurie pasiskirstę apytikriai normaliai. Normalusis skirstinys aprašomas varpo formos kreive, vadinama **normaliąja kreive.**

Kadangi mes taip dažnai vartojame žodį „normalus“, pakartokime trumpus ką tik priimtų sąvokų apibrėžimus.

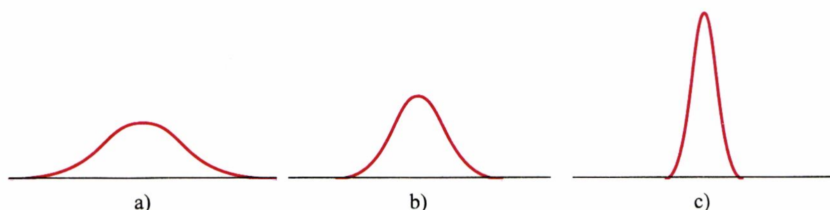
- **Apytikriai normalus skirstinys.** Duomenų skirstinys, kurio stulpelinės diagramos arba histogramos primena varpą.
- **Normalusis skirstinys.** Matematinis modelis, idealizacija, atspindinti įsivaizduojamo tobulo pasaulio duomenis.
- **Normalioji kreivė.** Normaliojo skirstinio grafinė išraiška, varpo formos kreivė.

* 1 colis = 2,54 cm.

NORMALIOSIOS KREIVĖS IR JŲ SAVYBĖS

Šiame skyrelyje aptarsime pagrindines normaliųjų kreivių matematines savybes ir pamatysime, kaip jos taikomos gauti svarbiai informacijai apie apytikriai normaliai pasiskirsčiusį kintamąjį. Visi mūsų aptariami kintamieji nuo šiol bus tik kiekybiniai.

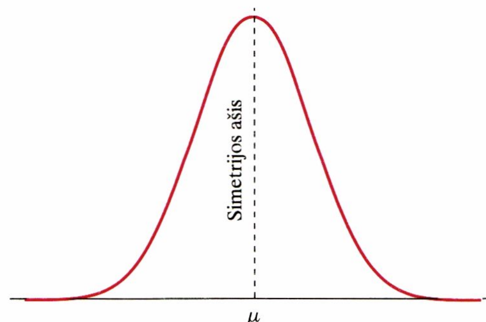
Normaliosios kreivės (16.3 pav.) būna gana skirtingos (vienos – siauros ir aukštos, kitos – plokščios ir žemos), tačiau jos visos matematiškai apibūdinamos vienodai. Ar normalioji kreivė siaura ir aukšta, ar plokščia ir žema, ar vidutinio aukščio ir pločio priklauso tik nuo to, kokius pasirenkame koordinačių ašių mastelius. Todėl pakeitus mastelius ašyse, bet kurias dvi normaliąsias kreives galima suvienodinti.



16.3 pav. Trys normaliosios kreivės. a) Plokščia ir žema. b) Vidutinė. c) Siaura ir aukšta.

Pateiksime svarbiausius faktus apie normaliuosius skirstinius ir normaliąsias kreives.

- **Simetriškumas.** Kiekviena normalioji kreivė turi vertikalią simetrijos ašį (16.4 pav.). Ši simetrijos ašis dalija kreivės ribojamą varpo formos sritį į dvi vienodas dalis.



16.4 pav. Normalioji kreivė turi vertikalią simetrijos ašį.

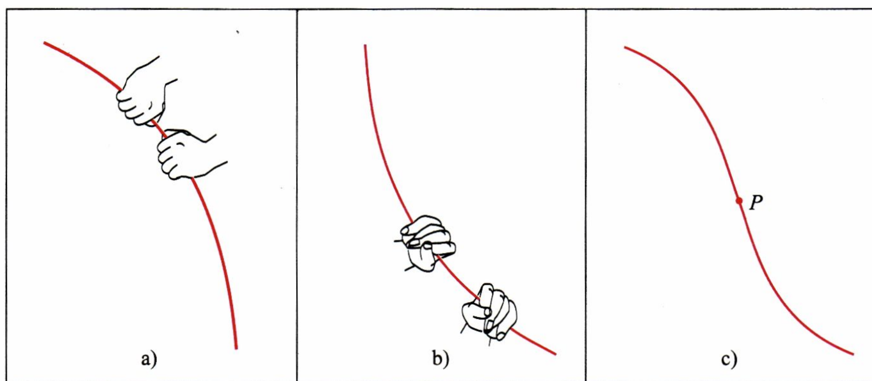
- **Centras.** Taškas, kuriame vertikalioji simetrijos ašis kerta horizontaliąją koordinačių ašį, vadinamas normaliosios kreivės centru. Duomenų reikšmė, atitinkanti šį tašką, yra ir skirstinio *mediana*, ir jo *vidurkis*. Nenorėdami skriausti nė vienos iš šių charakteristikų, tą reikšmę vadinsime **centru** ir žymėsime graikiška raide μ (16.4 pav.). Tai, kad mediana ir vidurkis sutampa, yra normaliosios kreivės simetriškumo

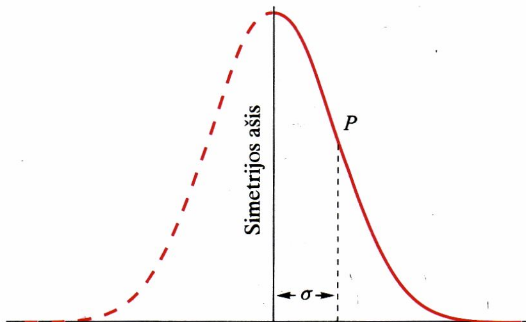
pasekmė. Tai yra būdinga bet kuriam simetriškam skirstiniui (ne tik normaliajam).

- **Standartinis nuokrypis.** Normaliojo skirstinio standartinis nuokrypis yra duomenų sklaidos matas. Mes aptarėme standartinį nuokrypį 14 skyriuje. Be kita ko matėme, kad didelės duomenų aibės standartinio nuokrypio skaičiavimas yra varginantis darbas, kurį geriausia palikti skaičiuokliui arba statistinei kompiuterinei programai.

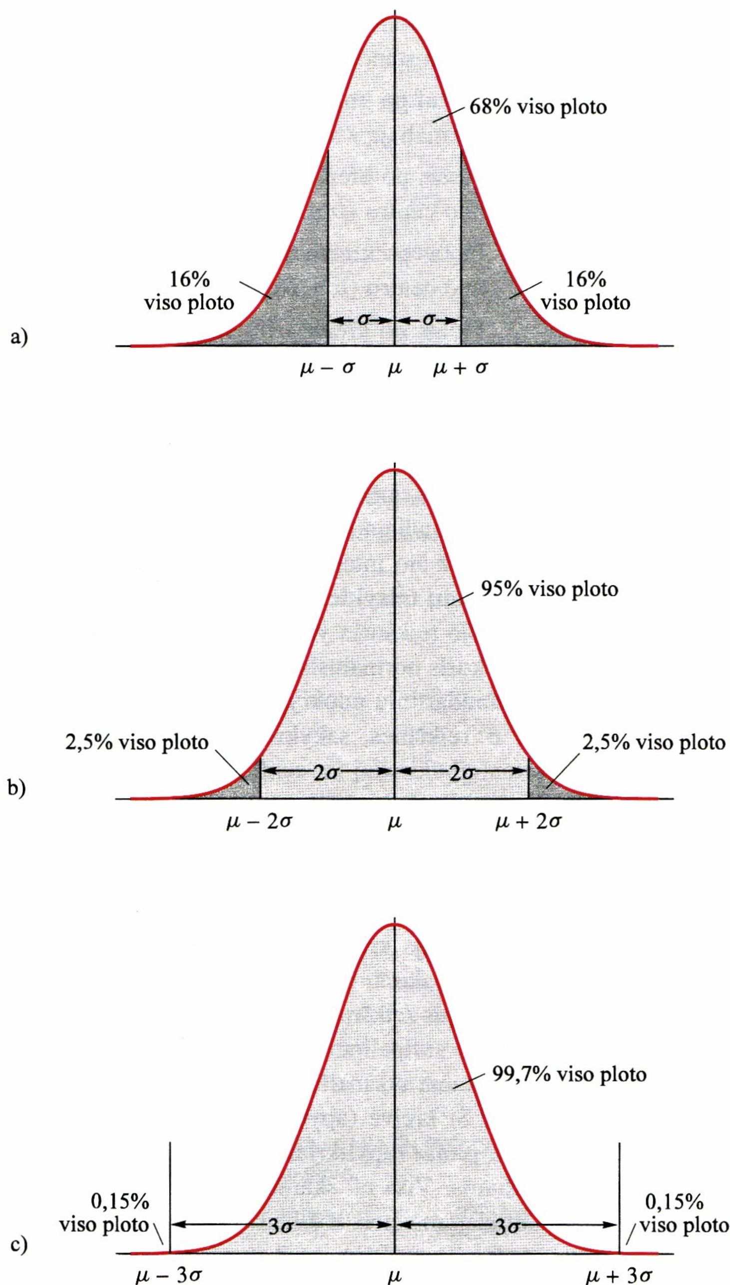
Paprasčiausias būdas interpretuoti normaliojo skirstinio standartinį nuokrypį yra geometrinis. Įsivaizduokime, kad turime vielos gabalą, kurį norime išlankstyti taip, kad jo forma tiksliai atkartotų dešiniąją normaliosios kreivės pusę (jei pavyks išlankstyti dešiniąją pusę, tai sugebėsime padaryti ir jai simetrišką kairiąją). Pačioje viršūnėje mes turime lenkti vielą žemyn (kaip parodyta 16.5 a) pav.), o apačioje – aukštyn (16.5 b) pav.). Lygiai viename vielos taške P jos išlinkimas žemyn keičiasi į išlinkimą aukštyn (16.5 c) pav.). Nustatę perlinkio tašką P, rasime ir normaliojo skirstinio standartinį nuokrypį – tai taško P atstumas nuo skirstinio simetrijos ašies, kaip parodyta 16.6 pav. Standartinį nuokrypį žymėsime graikiška raide σ.

16.5 pav.





16.6 pav. Standartinis nuokrypis lygus perlinkio taško *P* atstumui nuo varpo simetrijos ašies.


68% viso ploto
16%
viso ploto
16%
viso ploto
a)
σ
σ
μ − σ
μ
μ + σ
95% viso ploto
2,5% viso ploto
2,5% viso ploto
b)
2σ
2σ
μ − 2σ
μ
μ + 2σ
99,7% viso ploto
0,15%
viso ploto
0,15%
viso ploto
c)
3σ
3σ
μ − 3σ
μ
μ + 3σ

16.7 pav.

Apskritai normaliojo skirstinio standartinio nuokrypio skaičiavimas reikalauja matematinių priemonių, nenagrinėjamų šioje knygoje. Mes visada laikysime, kad standartinis nuokrypis yra žinomas.

- **Plotai po normaliąja kreive. Sigmų taisyklė.** Kalbant apie bet kurią normaliąją kreivę, teisingi tokie trys teiginiai.

1. Plotas po kreive vieno standartinio nuokrypio ribose į dešinę ir į kairę nuo centro ($\mu \pm \sigma$) yra lygus 68% viso ploto po kreive (16.7 a) pav.).
2. Plotas po kreive dviejų standartinių nuokrypių ribose į dešinę ir į kairę nuo centro ($\mu \pm 2\sigma$) yra lygus 95% viso ploto po kreive (16.7 b) pav.).
3. Plotas po kreive trijų standartinių nuokrypių ribose į dešinę ir į kairę nuo centro ($\mu \pm 3\sigma$) yra lygus 99,7% viso ploto po kreive (16.7 c) pav.).

16.7 pav. iliustruoja sigmų taisyklę ir jos išvadas. Patariame skaitytojui atidžiai išstudijuoti šį paveikslėlį.

Viena iš svarbių sigmų taisyklės išvadų yra ta, kad praktiškai visas plotas po normaliąja kreive (99,7%) yra trijų standartinių nuokrypių nuo centro ribose. Už šio intervalo ribų ploto tėra labai mažai. Kitaip tariant, teisinga **trijų sigmų taisyklė**: jei kintamojo skirstinys normalus, tai praktiškai visos kintamojo reikšmės yra ne daugiau kaip 3σ atstumu nutolusios nuo centro.

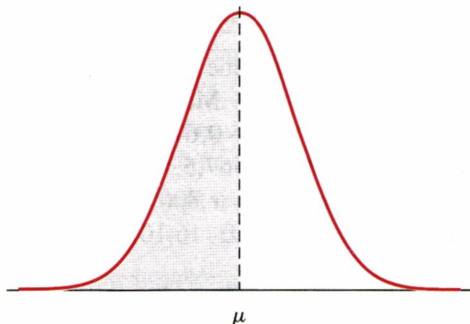
Bet kuris normalusis skirstinys visiškai nusakomas dviem skaičiais: centru μ ir standartiniu nuokrypiu σ. Jei kas nors pasakytų mums du skaičius kaip μ ir σ reikšmes, sakykime, $\mu = 16{,}5$ ir $\sigma = 2{,}3$, galėtume kalbėti apie normalųjį skirstinį su centru 16,5 ir standartiniu nuokrypiu 2,3, nes tėra tik vienas toks daiktas.

PLOTAI IR PROCENTILIAI

Dabar aptarsime vieną labai svarbų klausimą: kodėl mums taip rūpi plotai po normaliąja kreive? Arba, kitaip sakant, ką tie plotai mums pasako apie atitinkamą skirstinį? Prisiminkime pradinį tyrimo objektą – kintamąjį, kurio populiacijos reikšmės rodo, kad jis yra apytikriai normaliai pasiskirstęs. Šio skirstinio stulpelinė diagrama arba histograma yra apytikriai varpo formos, o atitinkama normalioji kreivė yra stulpelinės diagramos matematinė idealizacija. Ši kreivė (apytikriai) atkartoja stulpelių aukščius, o įvairių dalių po kreive plotai (apytikriai) lygūs atitinkamų populiacijos dalių procentiniams dydžiams. Visa tai skamba baisiai sudėtingai, nors iš tikrųjų taip nėra.

Pradėkime nuo to, kad visas plotas po normaliąja kreive išreiškia visą populiaciją (100%) (16.8 pav.). Dabar žvilgtelėkime į centrą μ.

Žinome, kad normalioji kreivė yra simetriška per μ einančios vertikaliosios ašies atžvilgiu. Tai reiškia, kad tamsusis plotas 16.8 pav. yra lygus pusei ploto po kreive. Vadinasi, 50% kintamojo reikšmių yra mažesnės arba lygios μ, o kitos – 50% didesnės arba lygios μ. Todėl μ yra skirstinio mediana.

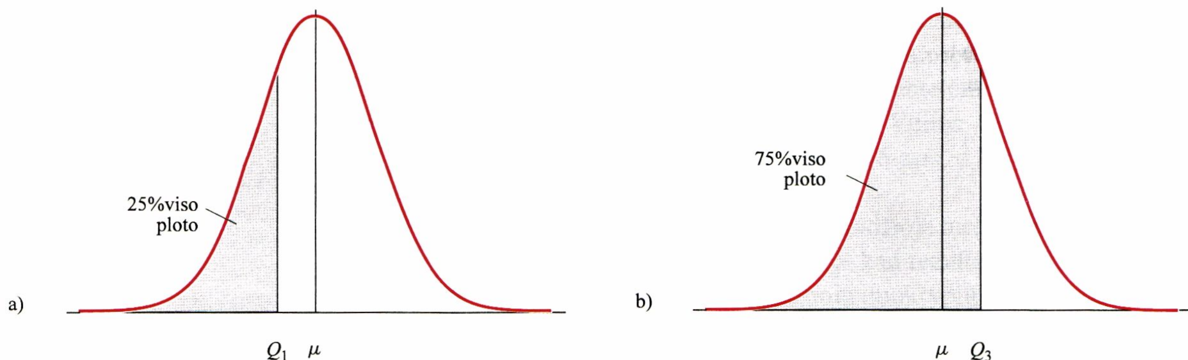


16.8 pav. Vertikalioji ašis, einanti per μ, dalija plotą po kreive į dvi lygias dalis.

O ką galime pasakyti apie kvartilius? Samprotaudami panašiai kaip medianos atveju, galime nuspėti, kad pirmasis kvartilis Q_1 turi būti toje vietoje, nuo kurios į kairę esantis po kreive plotas lygus 25% viso ploto. Tai iliustruoja 16.9 a) pav. Panašiai trečiasis kvartilis Q_3 yra toje vietoje, nuo kurios į kairę esantis po kreive plotas lygus 75% viso ploto.

Kai μ ir σ reikšmės yra žinomos, kvartilius nustatyti galime pagal šias formules:

$$Q_3 \approx \mu + 0{,}675\sigma,$$
$$Q_1 \approx \mu - 0{,}675\sigma.$$



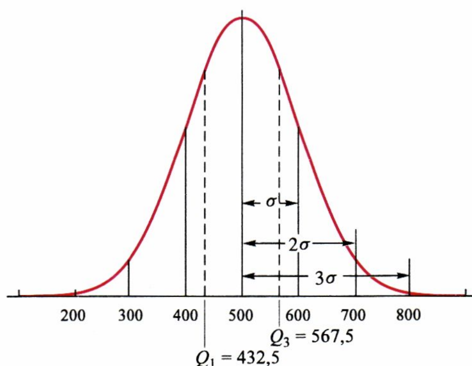
16.9 pav. a) Plotas po kreive į kairę nuo Q_1 sudaro 25% viso ploto. b) Plotas po kreive į kairę nuo Q_3 sudaro 75% viso ploto.

Mes neaiškinsime, iš kur atsirado magiškasis skaičius 0,675, tik pasakysime, kad yra lentelių, kuriose pateiktos ne tik kvartilių, bet ir kitų procentilių reikšmės (x-tasis procentilis yra tokia reikšmė, kad x procentų kintamojo reikšmių yra ne didesnės už ją). Labai supaprastintas tokios lentelės variantas pateiktas prieš 26 ir 27 uždavinius.

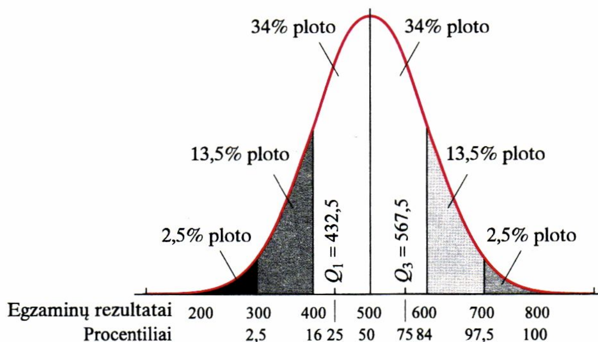
Šio skyrelio pagrindines mintis pailiustruosime dviem pavyzdžiais.

3 pavyzdys. Panagrinėkime normaliąją kreivę su centru taške 500 ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 100$. Mediana yra $\mu = 500$, todėl pirmasis kvartilis randamas imant $Q_1 \approx 500 - 0{,}675 \cdot 100 = 432{,}5$, o trečiasis kvartilis lygus $Q_3 \approx 500 + 0{,}675 \cdot 100 = 567{,}5$. Sigmų taisyklė sako, kad 99,7% ploto po kreive yra tarp reikšmių 200 ir 800, 95% – tarp reikšmių 300 ir 700, o 68% – tarp reikšmių 400 ir 600 (žr. 16.10 pav.).

4 pavyzdys. Tarkime, kad stojamųjų matematikos egzaminų rezultatai į Mokslamiesčio universitetą turi apytikriai normalų skirstinį su centru, lygiu $\mu = 500$ taškų, ir standartiniu nuokrypiu, lygiu $\sigma = 100$ taškų. Į normaliąją kreivę, pavaizduotą 16.11 paveikslėlyje, galime žiūrėti kaip į egzamino rezultatų skirstinio matematinį modelį ir jam tinkamai pritaikyti 3 pavyzdyje išsiaiškintus dalykus.



16.10 pav. Normalioji kreivė su centru $\mu = 500$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 100$.



16.11 pav. Mokslamiesčio universiteto matematikos stojamųjų egzaminų rezultatai ir procentiliai.

Štai keletas dalykų, kuriuos galime pasakyti apie stojamąjį egzaminą:

- Apie 50% laikiusių matematikos stojamąjį egzaminą gavo ne daugiau kaip 500 taškų, o likusieji 50% gavo ne mažiau kaip 500 taškų.

- Apie 25% laikiusių egzaminą gavo mažiau kaip $Q_1 = 432{,}5$ ir apie 25% gavo daugiau kaip $Q_3 = 567{,}5$ taškų.
- Apie 99,7% stojančiųjų gavo nuo 200 iki 800 taškų. Kadangi 200 taškų yra mažiausias rezultatas (200 taškų skiriama vien už dalyvavimą), o 800 taškų yra didžiausias rezultatas, tai galime sakyti, kad visų stojančiųjų rezultatai yra tarp 200 ir 800.
- Apie 95% stojančiųjų rezultatai yra nuo 300 iki 700 taškų. Iš likusių 5% stojančiųjų lygiai pusė (2,5%) gavo ne daugiau kaip 300 taškų, o kita pusė (2,5%) – ne mažiau kaip 700 taškų.
- Apie 68% stojančiųjų rezultatai yra tarp 400 ir 600 taškų. Iš simetrijos išplaukia, kad iš likusiųjų 32% stojančiųjų pusė (16%) gavo ne daugiau kaip 400 taškų, o kita pusė (16%) – ne mažiau kaip 600 taškų.

Pritaikykime mūsų formalias žinias praktiškai ir panagrinėkime trijų universiteto naujokių (Vilijos, Reginos ir Kristinos) matematikos egzamino rezultatus – jos atitinkamai gavo 490, 570 ir 710 taškų. Kokie procentiliai apytikriai atitinka jų rezultatus?

Rezultatas 490 yra artimas 500, todėl Vilijos vieta yra truputį žemiau kaip 50-asis procentilis – spėjama, kad tai galėtų būti tarp 47-ojo ir 48-ojo procentilių. Reginos rezultatas yra šiek tiek daugiau kaip trečiasis kvartilis ($Q_3 = 567{,}5$). Spėjame, kad Reginos rezultato vieta yra tarp 75-ojo ir 76-ojo procentilių. O štai Kristinos rezultatas 710 yra daugiau kaip 97,5 procentilis. Todėl galime įsivaizduoti, kad jos rezultato vieta yra tarp 98-ojo ir 99-ojo procentilių. Tikslius kiekvieno rezultato procentilius galėtume apskaičiuoti, naudodamiesi normaliojo skirstinio lentelėmis (arba atitinkama kompiuterine programa). Tada sužinotume, kad Vilijos 490 taškų rezultato vieta yra 46-asis, Reginos 570 taškų rezultato – 76-asis, o Kristinos 710 taškų – 98-asis procentilis (šaunuolė Kristina!).

Baigiant dar viena pastaba: šio pavyzdžio pradžioje turėjome ne ypač daug informacijos, kuria galėjome remtis (žinojome, kad rezultatai pasiskirstę apytikriai normaliai su vidurkiu 500 ir standartiniu nuokrypiu 100). Tačiau iš šių faktų ir trupučio teorijos sugebėjome padaryti daugybę išvadų. Įdomiausia, kad jas galėjome padaryti, nežinodami jokių konkrečių duomenų.

ATSITIKTINIŲ ĮVYKIŲ NORMALIEJI SKIRSTINIAI

Dabar esame pasirengę nagrinėti normaliuosius skirstinius kitu aspektu – jų ryšį su atsitiktiniais įvykiais. Pradėkime tokiu svarbiu pavyzdžiu.

5 pavyzdys (monetos mėtymas). Mes rengiamės mesti idealią monetą 100 kartų. Kiek kartų iš tų 100 metimų iškris herbas? Penkiasdešimt? Gal taip, o gal ir ne. Keturiasdešimt penkis? Kodėl gi ne? Septyniasdešimt penkis? Gali atsitikti, tačiau nebūtų išmintinga lažintis dėl to.

Pažymėkime X skaičių herbų, atvirtusių metant monetą 100 kartų. Ką sveika nuovoka sako apie galimas atsitiktinio dydžio X reikšmes? Visų pirma, mes negalime nuspėti tikslios X reikšmės – tai gali būti bet kuris sveikasis skaičius nuo $X = 0$ (nė karto neatvirto herbas) iki $X = 100$ (visus 100 kartų atvirto herbas). Žinoma, kai kurios X reikšmės yra mažiau tikėtinos už kitas. Galima numanyti, kad 100 herbų atvirtimas yra labai neįtikėtinas; 55 herbų atvirtimas yra jau tikėtinesnis; o štai 50 herbų atvirtimas yra dar tikėtinesnis.

Vienas iš būdų, kuriuo galėtume patikrinti mūsų intuiciją, kiek tikėtinos yra įvairios X reikšmės, būtų pakartoti 100 monetos metimų bandymą daug kartų ir pasižymėti visas baigtis. Tik reikia monetos, pieštuko, popieriaus ir daug daug laiko. Pietų Afrikos Respublikos matematikas Džonas Kerichas (John Kerrich), vokiečių įkalintas Antrojo pasaulinio karo metais, kalėjime atliko tokį bandymą. Jis mėtė monetą 10 000 kartų ir užrašė atvirtusių herbų skaičių kiekvienoje 100 metimų serijoje.

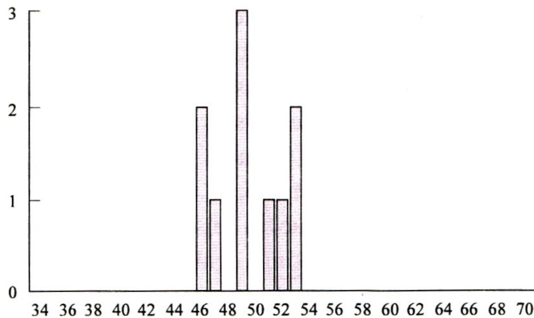
Mes nutarėme nekartoti Kericho, o atlikti šiuolaikiniškesnį bandymą, įpareigodami kompiuterį „mėtyti“ monetą ir užrašinėti rezultatus (kompiuteriui labai lengva „liepti“ mėtyti įsivaizduojamą monetą, o rezultatai bus tiek pat tikroviški, kaip mėtant tikrą monetą; be to, nepavargsta rankos!).

16.12 pav. parodyti X dažniai, gauti bandymą pakartojus a) 10 kartų, b) 100 kartų, c) 500 kartų, d) 1000 kartų, e) 5000 kartų ir f) 10 000 kartų*.

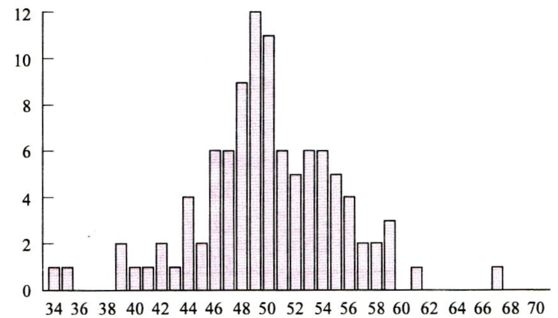
16.12 pav. matome, kas čia darosi. Kai bandymą pakartojome 10 kartų, dukart gavome $X = 46$, vienąkart – $X = 47$, triskart – $X = 49$, vienąkart – $X = 52$ ir dukart – $X = 53$. Šių duomenų stulpelinė diagrama parodyta 16.12 a) pav. Ji gali mus šiek tiek nustebinti, tačiau, esant tokiam mažam bandymų skaičiui, iš tikrųjų gali atsitikti bet kas. Didinant bandymų skaičių N, skirstinio diagrama įgyja vis ryškesnę varpo formą, ir kai $N = 5000$, nebekyla jokių abejonių. Kai $N = 10\,000$ (16.12 f) pav.), gauname beveik idealų normalųjį skirstinį!

Skaitytojas turbūt suvokė, kad tai, kas atsitiko šiame pavyzdyje, nebuvo netikėta. Mažoms N reikšmėms situacija beveik nenuspėjama, tačiau didinant N, skirstinio normalioji prigimtis būtinai pasireiškia. Tą patį galima pasakyti ir kiek kitaip. Įsivaizduokime, kad kažkas nutarė dar kartą pakartoti bandymą, vėl mesdamas idealią monetą (ranka ar imituodamas kompiuteriu) 100 kartų, žymėdamasis atsitiktinio dydžio X (atvirtusių herbų skaičiaus) reikšmes ir kartodamas viską N kartų. Kai $N = 10$, rezultatai greičiausiai labai skirsis nuo tų, kuriuos matome 16.12 a) pav., bet didinant N, jie vis panašės. Kai $N = 10\,000$, duomenys bus beveik tokie pat, kaip 16.12 f) pav.

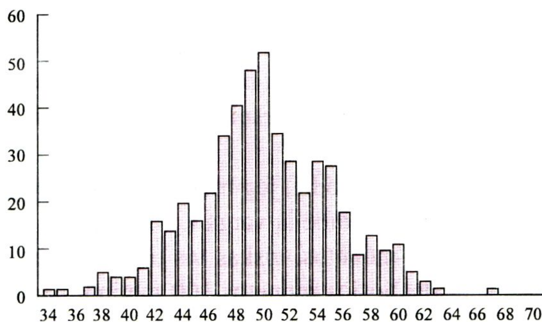
* Tai reiškia $10\,000 \times 100$ monetos metimų. Šimtui tikros monetos metimų (dirbant greitai) ir rezultatų užrašymui reikia apie 5 minučių laiko. Mėtant ranka monetą po 8 valandas per dieną 7 dienas per savaitę, reikėtų 3 mėnesių gauti tokiems duomenims.



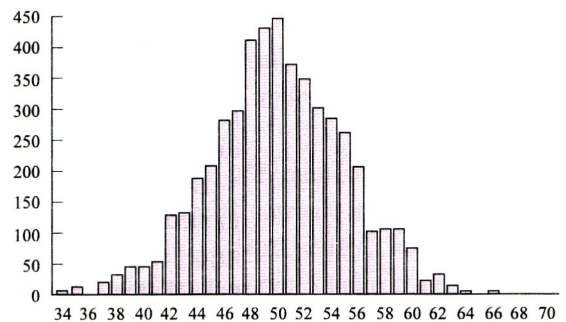
a) $N=10$



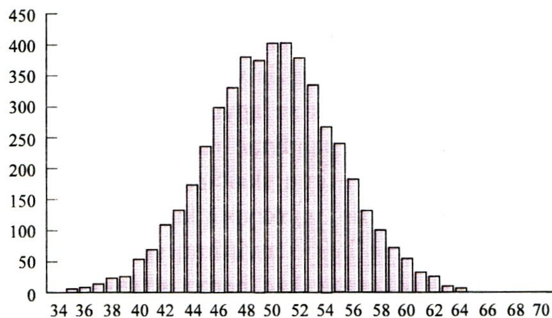
b) $N=100$



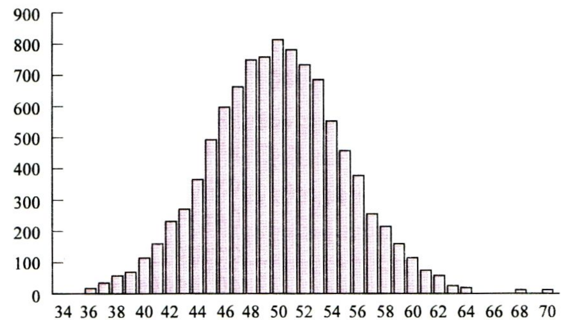
c) $N=500$



d) $N=1\,000$



e) $N=5\,000$



f) $N=10\,000$

16.12 pav. 100 monetos metimų bandymas: 100 kartų metama ideali moneta, ir suskaičiuojamas atvirtusių herbų skaičius *X*. Bandymas kartojamas *N* kartų. Sudaroma *X* dažnių diagrama.

Galima sakyti, kad tam tikra prasme šis bandymas yra tuščias laiko eikvojimas: kai N reikšmės didelės, mes galime, ir nemėtydami monetos, labai tiksliai numatyti X pasiskirstymą!

Svarbiausia išvada, kurią galime padaryti iš 5 pavyzdžio, yra ta, kad, esant

pakankamai didelėms N reikšmėms, atsitiktinio dydžio skirstinys yra normalusis. Kad visiškai suvoktume situaciją, mums reikia dar dviejų smulkmenų: centro μ ir standartinio nuokrypio σ reikšmių. Pasižiūrėję į 16.12 pav., aiškiai matome, kad šio normaliojo skirstinio centras yra lygiai ties 50, todėl tai, kad $\mu = 50$, neturėtų stebinti. Kadangi moneta yra ideali, tai tikėtis, kad herbas atvirs mažiau kaip 50 kartų, yra tas pats, kaip tikėtis, jog skaičius atvirs mažiau kaip 50 kartų, o tai savo ruožtu reiškia, kad herbas atvirs daugiau kaip 50 kartų. Todėl aišku, kad skirstinio centras yra 50.

Šio skirstinio standartinio nuokrypio reikšmė yra ne tokia akivaizdi. Kol kas patikėkime, kad ji lygi $\sigma = 5$. Vėliau trumpai paaiškinsime, kaip mes ją radome.

Apibendrinkime, ką dabar žinome. Ideali moneta metama 100 kartų. Atvirtusių herbų skaičius yra atsitiktinis dydis; jį žymime X. Bandymą pakartojus daug kartų, atsitiktinis dydis X turės apytikriai normalų skirstinį su centru $\mu = 50$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 5$; kuo didesnis bandymų skaičius, tuo didesnis tikslumas.

Bet svarbiausia, kad visa tai teisinga ne todėl, jog mes vargome, mėtydami monetą šimtus tūkstančių kartų (ar perleidome tą vargą kompiuteriui). Iš tikrųjų, jei net mes iš viso nemėtytume monetos, viskas vis tiek būtų teisinga: pakankamai daug kartų kartojant idealiosios monetos 100 metimų bandymą, herbų skaičius X yra atsitiktinis dydis, turintis apytikriai normalų skirstinį su centru $\mu = 50$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 5$. Tai – matematinis faktas.

O dabar tarkime, kad mes turime idealiąją monetą ir rengiamės ją mesti 100 kartų. Ir rengiamės tai padaryti tik vieną kartą. Ar galime ką nors pasakyti apie atvirsiančių herbų skaičių? Galime, ir visai nemažai. Kadangi herbo atvirtimų skaičius yra atsitiktinis dydis su apytikriai normaliu skirstiniu, galime puikiausiai įsivaizduoti tokio bandymo rezultatą. Pavyzdžiui, mes žinome, jog tikimybė, kad herbo atvirtimų skaičius bus tarp 45 ir 55 (tai yra ne daugiau kaip per vieną standartinį nuokrypį į kairę ir į dešinę nuo centro) yra lygi 0,68; jog tikimybė, kad herbo atvirtimų skaičius bus tarp 40 ir 60, lygi 0,95; pagaliau – jog tikimybė, kad herbo atvirtimų skaičius bus tarp 35 ir 65, lygi 0,997. Tam užteko žinoti, kad mūsų atsitiktinis dydis turi apytikriai normalų skirstinį su centru $\mu = 50$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 5$, taip pat keletą faktų apie normaliuosius skirstinius (pavyzdžiui, sigmų taisyklę).

IDEALIOSIOS IR REALIOSIOS MONETOS PRINCIPAI

5 pavyzdyje ideali moneta buvo metama 100 kartų. O jei monetą mestume 500 kartų? Arba 1000 kartų? Arba n kartų? Viskas, ką išsiaiškinome 5 pavyzdyje, liktų teisinga, tik pasikeistų μ ir σ reikšmės. Tiksliau kalbant, galime suformuluoti tokį bendrą teiginį, kurį vadinsime *idealiosios monetos principu*.

Idealiosios monetos principas

Atliekamas idealiosios monetos n metimų bandymas ir suskaičiuojamas herbo atvirtimų skaičius X. Jei šis bandymas kartojamas N kartų, tai

- atsitiktinio dydžio skirstinys yra apytikriai normalus, ir, kuo didesnis N, tuo artimesnis šis skirstinys normaliajam;
- skirstinio centras yra $\mu = n/2$;
- skirstinio standartinis nuokrypis lygus $\sigma = \sqrt{n}/2$.

Štai kodėl su $n = 100$ mes gavome, kad centras $\mu = 100/2 = 50$ ir standartinis nuokrypis $\sigma = \sqrt{100}/2 = 10/2 = 5$.

6 pavyzdys. Ketiname mesti monetą 256 kartus. Prieš tai yra proga susilažinti. Tarkime, kad mes laimėsime, jei herbo atvirtimų skaičius bus tarp 120 ir 136. Ar verta kirsti tokių lažybų?

Remiantis idealiosios monetos principu, po 256 metimų atvirtusių herbų skaičius yra atsitiktinis dydis, turintis apytikriai normalų skirstinį su centru $\mu = 256/2 = 128$ ir standartiniu nuokrypiu $\sqrt{256}/2 = 16/2 = 8$. Reikšmės 120 ir 136 yra kaip tik per vieną standartinį nuokrypį į kairę ir į dešinę nuo centro. Todėl, remiantis sigmų taisykle, šansai, kad iškritusių herbų skaičius bus tarp 120 ir 136, yra apie 68%. Mums tikrai verta lažintis!

Panašiai galime įsitikinti, kad šansai, jog atvirtusių herbų skaičius bus tarp 112 ir 144, lygūs 95%, o šansai, jog jis bus tarp 104 ir 152, lygūs 99,7%.

Dabar pabandysime nustatyti **realiosios monetos principą** (negalime gi visada pasikliauti vienodomis galimybėmis!). Ar galima mūsų įgytas žinias pritaikyti ir realiai monetai? Pasirodo, galima! Iš tikrųjų monetos prigimtis turi įtakos tik skaičiuojant skirstinio centrą ir standartinį nuokrypį.

Realiosios monetos principas

Atliekamas realiosios monetos n metimų bandymas ir skaičiuojamas atvirtusių herbų skaičius X. Šios monetos herbo atvirtimo tikimybė lygi p (todėl skaičiaus atvirtimo tikimybė lygi $1-p$). Jei šis bandymas kartojamas N kartų, tai

- atsitiktinio dydžio X skirstinys yra apytikriai normalus, ir, juo didesnis N, tuo šis skirstinys artimesnis normaliajam;
- skirstinio centras yra $\mu = np$;
- skirstinio standartinis nuokrypis lygus $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

61. – 76

7 pavyzdys. Sulankstyta moneta herbu į viršų atvirsta tik 20% atvejų (t.y. $p = 0{,}20$). Moneta metama 100 kartų ($n = 100$).

Remiantis realiosios monetos principu, herbų skaičiaus skirstinys yra apytikriai normalus su centru $\mu = 100 \cdot 0{,}20 = 20$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}20} = 4$.

Todėl galime tvirtinti, jog:

a) Šansų, kad atvirtusių herbų skaičius bus tarp 16 ir 24, yra apie 68%.

b) Šansų, kad atvirtusių herbų skaičius bus tarp 12 ir 28, yra apie 95%.

c) Beveik garantuotai (99,7% šansų) atvirtusių herbų skaičius bus tarp 8 ir 32.

Realiosios monetos principą galima taikyti bet kokiai monetai, net jei ji ideali ($p = 1/2$). Kai $p = 1/2$, idealiosios ir realiosios monetos principai sutampa (žr. 25 pratimą).

Realiosios monetos principas yra praktinis variantas vieno iš svarbiausių statistikos faktų, žinomo gal kiek iškilmingu *centrinės ribinės teoremos* vardu. Dabar trumpai pailiustruosime, kodėl realiosios monetos principas toks svarbus.

IMTYS IR REALIOSIOS MONETOS PRINCIPAS

8 pavyzdys. Didelėje dėžėje (matematikai dažniausiai sako – urnoje) yra 100 000 rutulių, iš kurių 20 000 yra raudoni, o likusieji 80 000 – balti. Rutulius urnoje gerai sumaišome. Dabar sudarome imtį tokiu būdu: 1) įkišame ranką į urną ir atsitiktinai ištraukiame vieną rutulį, 2) pasižymime ištraukto rutulio spalvą, 3) dedame rutulį atgal į urną. Tai pakartojame $n = 100$ kartų. Raide X pažymėkime ištrauktų raudonųjų rutulių skaičių. Ką galime pasakyti apie X?

Truputį pagalvoję, suvoksime, kad statistikos požiūriu šis atvejis sutampa su 7 pavyzdžio atveju – kiekvienas ištrauktas raudonasis rutulys gali būti sutapatintas su atvirtusiu herbu (abiejų įvykių tikimybė 0,20). Taigi iš realiosios monetos principo galima gauti šiuos teiginius.

a) Tikimybė, kad ištrauktų raudonųjų rutulių skaičius bus tarp 16 ir 24, apytikriai lygi 68%.

b) Tikimybė, kad ištrauktų raudonųjų rutulių skaičius bus tarp 12 ir 28, apytikriai lygi 95%.

c) Beveik garantuotai (tikimybė apytikriai lygi 0,997) ištrauktų raudonųjų rutulių skaičius bus tarp 8 ir 32.

Kiekvieną iš minėtų teiginių galima persakyti imčių *paklaidų* terminais. Tarkime, kad traukiame 100 rutulių, o ištrauktų raudonųjų rutulių skaičiumi

vertinsime raudonųjų rutulių urnoje procentinę dalį. Sakykime, pavyzdžiui, kad tarp 100 ištrauktų rutulių 24 yra raudoni. Jei šia reikšme (24%) pasinaudotume raudonųjų rutulių dalies urnoje įverčiui, imties paklaida būtų lygi 4% (įvertis lygus 24%, o tiksli parametro reikšmė lygi, kaip žinome, 20%). Lygiai taip pat, jei ištrauktume 16 raudonųjų rutulių, imties paklaida būtų lygi 4%. Beje, standartinis nuokrypis (apskaičiuotas 7 pavyzdyje) lygus $\sigma = 4$ rutuliams, t.y. lygiai 4% imties dydžio ($n = 100$). Todėl ankstesnius teiginius galime perfrazuoti taip:

a) Jeigu raudonųjų rutulių procentą urnoje vertinsime ištrauktų raudonųjų rutulių skaičiumi 100 rutulių imtyje, tikimybė, kad paklaida bus ne didesnė kaip 4%, yra lygi 0,68.

b) Jeigu raudonųjų rutulių procentą urnoje vertinsime ištrauktų raudonųjų rutulių skaičiumi 100 rutulių imtyje, tikimybė, kad paklaida bus 8%, yra lygi 0,95.

c) Jeigu raudonųjų rutulių dalį urnoje vertinsime ištrauktų raudonųjų rutulių skaičiumi 100 rutulių imtyje, paklaida beveik garantuotai (su tikimybe 0,997) bus ne didesnė kaip 12%.

---

9 pavyzdys. Sakykime, kad turime tą pačią 8 pavyzdžio urną, tik šį kartą rengiamės sudaryti $n = 1600$ dydžio imtį. Nepradėję skaičiuoti raudonųjų rutulių imtyje, pažiūrėkime, ką galime išpešti iš realiosios monetos principo. Teoriškai mes vėl metame tą pačią realiąją monetą (su $p = 0{,}2$), tik šį kartą – 1600 kartų. Standartinis nuokrypis dabar lygus $\sqrt{1600 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 16$, t.y. lygiai 1% visos imties. Tai reiškia, kad jei raudonųjų rutulių dalį urnoje įvertinsime remdamiesi šia imtimi, tai vėl pagal realiosios monetos principą galime pateikti patikimas įverčio paklaidos garantijas, būtent:

a) Su tam tikru patikimumu (68%) galime sakyti, kad įverčio paklaida bus ne didesnė kaip 1%.

b) Su dideliu patikimumu (95%) galime sakyti, kad įverčio paklaida bus ne didesnė kaip 2%.

c) Su didžiuliu patikimumu (99,7%) galime sakyti, kad įverčio paklaida bus ne didesnė kaip 3%.

Išdėstyti pavyzdžiai padeda suprasti, kaip būtų galima įvertinti bet kokios imties patikimumą. Deja, remtis realiosios monetos principu ir naudotis imtimi realios populiacijos proporcijoms įvertinti neįmanoma, nes standartinio nuokrypio σ negalima tiesiogiai apskaičiuoti (kaip tai padarėme 8 ir 9 pavyzdžiuose), kadangi nežinome p. O jei p žinotume, tai mums iš viso nereikėtų imties! Vis dėlto, pasirodo, galima gauti labai gerą σ įvertį ir remtis juo imties paklaidos garantijoms (žr. 30 pratimą).

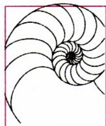
IŠVADOS

Ankstesniuosiuose skyriuose mes sužinojome, ką galima daryti su duomenimis. Šis skyrius tam tikra prasme buvo apie tai, ką galima daryti, neturint duomenų. Statistikoje ypač svarbu mokėti daryti išvadas, turint ribotą informaciją. Tokie metodai remiasi duomenų matematine idealizacija. Daugelyje realaus gyvenimo situacijų galima patikimai iš anksto prognozuoti, kaip atrodys duomenys. Šis bendras vaizdas vadinamas duomenų *matematiniu modeliu.* Geras modelio savybių žinojimas yra neįkainojamas analizuojant realius duomenis.

Dažniausiai realių situacijų matematinis modelis yra normalusis skirstinys, bet tai nėra vienintelis modelis. Vis dėlto labai dažnai populiacijos charakteristikų (ūgio, intelektualumo koeficientas, kraujospūdžio ir t.t.) skirstiniai yra apytikriai normalūs. Tada galime taikyti normaliųjų skirstinių matematinę teoriją.

Kita sritis, kur susiduriame su normaliaisiais skirstiniais – tai tikimybiniai bandymai. Tikimybinių bandymų ilgalaikė elgsena yra lygiai tokia pati kaip mėtant monetą. Šiais atvejais *realiosios monetos principas* (kuris kaip atskirą atvejį apima ir *idealiosios monetos principą*) nurodo, kaip ši ilgalaikė elgsena gali būti aprašyta normaliuoju skirstiniu. Realiosios monetos principas nepaprastai svarbus. Tai matematinis principas, leidžiantis iš atsitiktinės imties gauti patikimas išvadas apie populiaciją. Be kita ko, būtent jis garantuoja, kad, ilgai lošdami, kazino lošėjai visada praloš, o patys kazino savininkai visada išloš.

PAGRINDINĖS SĄVOKOS



apytikriai normalus skirstinys
centras
idealiosios monetos principas
normalioji kreivė
normalusis skirstinys
procentilis
realiosios monetos principas
sigmų taisyklė
standartinis nuokrypis
trijų sigmų taisyklė

PRATIMAI

Apšilimas

1–4 *pratimuose kalbama apie* 250 *laikančiųjų stojamąjį matematikos egzaminą. Egzamino rezultatų skirstinys apytikriai yra normalusis su centru* $\mu = 52$ *balai ir standartiniu nuokrypiu* $\sigma = 11$ *balų.*

1. a) Nustatykite vidutinį egzamino rezultatą.
b) Nustatykite, kiek procentų studentų gavo ne mažiau kaip 52 balus.
c) Nustatykite, kiek procentų studentų gavo nuo 41 iki 63 balų.
d) Nustatykite, kiek procentų studentų gavo ne mažiau kaip 63 balus.

2. a) Nustatykite, kiek studentų gavo nuo 30 iki 74 balų.
b) Nustatykite, kiek studentų gavo ne mažiau kaip 74 balus.
c) Nustatykite, kiek studentų gavo ne mažiau kaip 85 balus.

3. a) Nustatykite pirmąjį egzamino rezultatų kvartilį.
b) Nustatykite trečiąjį egzamino rezultatų kvartilį.
c) Nustatykite egzamino rezultatų kvartilinį plotį.

4. Kiekvienam iš nurodytų rezultatų nustatykite, koks yra jo procentilis visų laikiusiųjų egzaminą atžvilgiu: a) 51; b) 64; c) 60; d) 85.

5–8 *pratimuose kalbama apie* 2000 *pacientų kraujospūdžio tyrimą. Sistolinio kraujospūdžio* (*milimetrais*) *skirstinys apytikriai yra normalusis su centru* $\mu = 125$ *ir* $\sigma = 13$.

5. a) Nustatykite, kelių pacientų kraujospūdis yra tarp 99 ir 151 milimetrų.
b) Nustatykite, kelių pacientų kraujospūdis yra ne daugiau kaip 99 milimetrai.

6. a) Nustatykite kraujospūdžių skirstinio trečiąjį kvartilį Q_3.
b) Nustatykite kraujospūdžių skirstinio kvartilinį plotį.

7. Nustatykite, koks yra kiekvieno iš nurodytų kraujospūdžių procentilis tarp visų ligoninės pacientų kraujospūdžių: a) 100 milimetrų, b) 112 milimetrų, c) 115 milimetrų, d) 138 milimetrai, e) 164 milimetrai.

8. a) Nustatykite didžiausią (Max) ir mažiausią (Min) kraujospūdžio reikšmes. (*Nurodymas.* Laikykite, kad išskirčių nėra, ir pritaikykite sigmų taisyklę.)
b) Laikydami, kad išskirčių nėra, sudarykite kraujospūdžių skirstinio penkiaskaitę suvestinę (Min, Q_1, μ, Q_3, Max).

9–12 *pratimuose kalbama apie parduotuvėje parduodamas maisto prekes, kurių svoris ne visada atitinka nurodytus svorius. Nukrypimai visada atsiranda gaminant ir pakuojant prekes. Tarkime, kad maltų juodųjų pipirų dvylikagramio pakelio tikslus svoris yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinys yra apytikriai normalusis su centru* $\mu = 12$ *gramų ir standartiniu nuokrypiu* $\sigma = 0{,}5$ *gramo.*

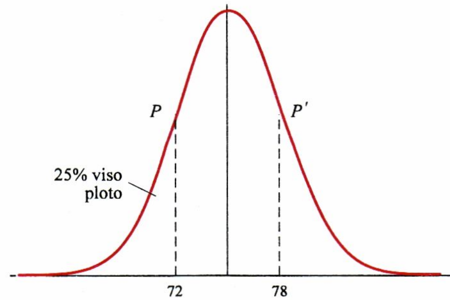
9. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas pipirų pakelis: a) sveria nuo 11 iki 13 gramų? b) sveria nuo 12 iki 13 gramų? c) sveria daugiau kaip 11 gramų?

10. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtas pipirų pakelis: a) sveria nuo 11,5 iki 12,5 gramo? b) sveria nuo 12 iki 12,5 gramo? c) sveria daugiau kaip 12,5 gramo?

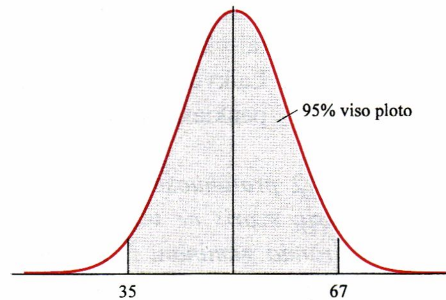
11. Tarkime, kad atsitiktinai paimta 500 pipirų pakelių. Įvertinkite pakelių skaičių, kurių svoris yra a) ne daugiau kaip 11 gramų; b) ne daugiau kaip 11,5 gramo; c) ne daugiau kaip 12 gramų; d) ne daugiau kaip 12,5 gramo; e) ne daugiau kaip 13 gramų; f) ne daugiau kaip 13,5 gramo.

12. Tarkime, kad atsitiktinai paimta 1500 pipirų pakelių. Įvertinkite skaičių pakelių, kurių svoris yra a) tarp 11 ir 11,5 gramų; b) tarp 11,5 ir 12 gramų; c) tarp 12 ir 12,5 gramų; d) tarp 12,5 ir 13 gramų; e) tarp 13 ir 13,5 gramų.

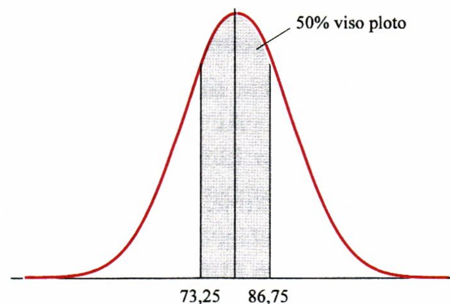
13. Raskite paveikslėlyje pavaizduotos normaliosios kreivės centrą μ ir kvadratinį nuokrypį σ.



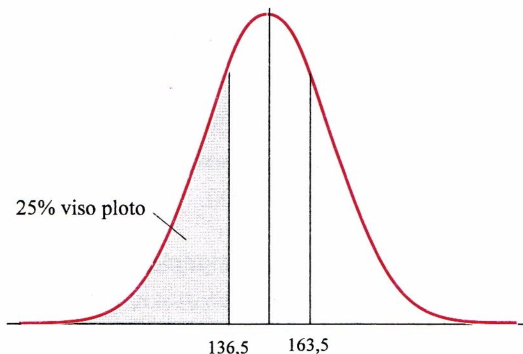
14. Raskite paveikslėlyje pavaizduotos normaliosios kreivės centrą μ ir kvadratinį nuokrypį σ.



15. Raskite paveikslėlyje pavaizduotos normaliosios kreivės centrą μ ir kvadratinį nuokrypį σ.



16. Raskite paveikslėlyje pavaizduotos normaliosios kreivės centrą μ ir kvadratinį nuokrypį σ.



17–20 *pratimuose kalbama apie tam tikro amžiaus ir lyties vaikų svorių skirstinius. Žinoma, kad šie skirstiniai apytikriai yra normalieji. Tai leidžia gydytojui arba seselei pagal vaiko svorį rasti jo procentilį* (*visoje to amžiaus ir lyties vaikų populiacijoje*). *Praktiškai tai daroma naudojantis specialiomis lentelėmis, kurias turi gydytojai. Tačiau procentilius galima taip pat apskaičiuoti, remiantis žiniomis apie apytikriai normalius skirstinius, kurias mes įgijome šiame skyriuje.*

17. 6 mėnesių amžiaus berniukų svorių skirstinys apytikriai yra normalusis su centru $\mu = 8{,}625$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 1$ kg.
Koks apytikriai yra 6 mėnesių berniuko svorio procentilis, jei berniukas sveria a) 7,625 kg; b) 10,625 kg?
c) Nustatykite berniuko svorį, jei jis atitinka 75-tąjį procentilį.

18. 12 mėnesių amžiaus mergaičių svorių skirstinys yra apytikriai normalus su centru $\mu = 10{,}5$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 1{,}1$ kg.
Koks apytikriai yra 12 mėnesių mergaitės svorio procentilis, jei mergaitė sveria a) 8,3 kg; b) 9,4 kg?
c) Nustatykite mergaitės svorį, jei jis atitinka 75-tąjį procentilį.

19. 1 mėnesio amžiaus mergaičių svorių skirstinys yra apytikriai normalus su centru $\mu = 4{,}375$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 0{,}55$ kg.
Koks apytikriai yra 1 mėnesio mergaitės svorio procentilis, jei mergaitė sveria a) 5,5 kg; b) 6 kg?
c) Nustatykite mergaitės svorį, jei jis atitinka 25-ąjį procentilį.

20. 12 mėnesių amžiaus berniukų svorių skirstinys yra apytikriai normalus su centru $\mu = 11{,}125$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 1{,}1$ kg.
Koks apytikriai yra 12 mėnesių berniuko svorio procentilis, jei berniukas sveria a) 12 kg; b) 10,5 kg?
c) Nustatykite berniuko svorį, jei jis atitinka 84-tąjį procentilį.

Treniruotė

21. Daugelį metų vaisių prekybos kompanijos gaunamų ananasų svoriai buvo apytikriai normaliai pasiskirstę su centru $\mu = 1{,}5$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 0{,}35$ kg. Ananasai pagal dydį klasifikuojami taip:

labai dideli: didesni kaip 2,2 kg;

dideli: nuo 1,5 iki 2,2 kg;

maži (prekybai urmu): mažesni kaip 1,5 kg.

Apskaičiuokite, kiek apytikriai bus kiekvienos kategorijos ananasų iš gautų 5000.

22. Idealioji moneta metama $n = 3600$ kartų. Tarkime, kad atsitiktinis dydis Y lygus atvirtusių herbų skaičiui.

a) Raskite atsitiktinio dydžio Y centrą μ ir standartinį nuokrypį σ.

Kokia tikimybė, kad Y reikšmė pateks tarp: b) 1770 ir 1830? c) 1800 ir 1830? d) 1830 ir 1860?

23. Metamas idealusis kauliukas. Jūs išlošiate 1 Lt, jei atvirsta lyginis akučių skaičius (2, 4 arba 6), ir pralošiate 1 Lt, jei atvirsta nelyginis akučių skaičius (1, 3 arba 5). Įsivaizduokite, kad vieną vakarą jūs lošiate šį lošimą iš eilės $n = 2500$ kartų. Kokia tikimybė, kad a) vakaro pabaigoje jūs nebūsite pralošęs pinigų? b) atvirtusių lyginių akučių skaičius bus tarp 1250 ir 1300? c) jūs išlošite ne mažiau kaip 100 Lt? d) jūs išlošite lygiai 101 Lt?

24. Realioji moneta, kurios herbo atvirtimo tikimybė $p = 0{,}4$, metama $n = 600$ kartų. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X lygus herbų atvirtimų skaičiui. Raskite atsitiktinio dydžio X a) skirstinio centrą ir standartinį nuokrypį; b) pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

c) Sakykime, kad jums reikia pasirinkti vienerias iš dvejų lažybų (statoma 1 Lt prieš 1 Lt): i) X bus tarp 230 ir 250; ii) X bus ne didesnis už 230 arba ne mažesnis už 250. Kurias iš šių lažybų jūs pasirinksite? Pagrįskite atsakymą.

25. Paaiškinkite, kodėl, taikydami realiosios monetos principą idealiajai monetai, gausime idealiosios monetos principą.

26 *ir* 27 *pratimuose remiamasi žemiau pateikiama lentele. Ji yra supaprastintas variantas tobulesnės statistinės lentelės, kurioje kiekvienai x reikšmei būtų pateikiamas normaliojo skirstinio su centru μ ir standartiniu nuokrypiu σ x-asis procentilis.*

Procentilis	Apytikrė reikšmė	Procentilis	Apytikrė reikšmė
99-asis	$\mu + 2{,}33\sigma$	1-asis	$\mu - 2{,}33\sigma$
95-asis	$\mu + 1{,}65\sigma$	5-asis	$\mu - 1{,}65\sigma$
90-asis	$\mu + 1{,}28\sigma$	10-asis	$\mu - 1{,}28\sigma$
80-asis	$\mu + 0{,}84\sigma$	20-asis	$\mu - 0{,}84\sigma$
75-asis	$\mu + 0{,}675\sigma$	25-asis	$\mu - 0{,}75\sigma$
70-asis	$\mu + 0{,}52\sigma$	30-asis	$\mu - 0{,}52\sigma$
60-asis	$\mu + 0{,}25\sigma$	40-asis	$\mu - 0{,}25\sigma$
50-asis	μ		

26. 6 mėnesių amžiaus berniukų svorių skirstinys yra apytikriai normalus su centru $\mu = 8{,}625$ kg ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 1$ kg.

a) Sakykime, kad 6 mėnesių berniuko svoris atitinka 95-tąjį procentilį jo amžiaus berniukų grupėje. Nustatykite berniuko svorį dviejų ženklų po kablelio tikslumu.

b) Sakykime, kad 6 mėnesių berniukas sveria 8,875 kg. Koks apytikriai yra jo svorio procentilis to amžiaus berniukų grupėje?

c) Sakykime, kad 6 mėnesių berniukas sveria 7,6 kg. Koks apytikriai yra jo svorio procentilis to amžiaus berniukų grupėje?

27. Penki tūkstančiai jaunuolių laikė stojamąjį koledžo egzaminą. Jo rezultatai pasiskirstę apytikriai normaliai su centru $\mu = 55$ balai ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 12$ balų.

a) Sakykime, kad stojančiojo rezultatas atitinka 60-tąjį procentilį. Nustatykite stojančiojo rezultatą.

b) Sakykime, kad stojantysis gavo 45 balus. Koks yra jo rezultato procentilis?

c) Sakykime, kad stojantysis gavo 83 balus. Koks yra jo rezultato procentilis?

d) Kiek apytikriai studentų gavo ne mažiau kaip 83 balus?

e) Kiek apytikriai studentų gavo ne mažiau kaip 52 balus?

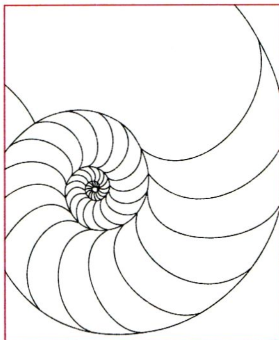
Varžybos

28. Ruletėje yra 18 raudonųjų skaičių ir 18 juodųjų skaičių, ir dar du pilkieji skaičiai (0 ir 00). Taigi raudonojo skaičiaus tikimybė lygi $p = \frac{18}{38} \approx 0{,}47$. Tarkime, kad mes nutarėme smagiai praleisti laiką ir statome 1 Lt už raudonąjį skaičių 10 000 kartų iš eilės (laimime 1 Lt, kai iškrinta raudonasis skaičius, ir pralošiame 1 Lt priešingu atveju).

a) Pažymėkime Y mūsų pralošimų skaičių (t.y. iškrinta ne raudonasis skaičius). Remdamiesi realiosios monetos principu, apibūdinkite atsitiktinio dydžio Y skirstinį.
b) Kokie apytikriai šansai pralošti ne mažiau kaip 5300 kartų?
c) Kokie apytikriai šansai pralošti nuo 5150 iki 5450 kartų?
d) Paaiškinkite, kodėl šioje situacijoje šansai nepralošti, yra praktiškai nuliniai.

29. Urnoje 10 000 rutulių, iš kurių 20% yra raudonos spalvos, o likusieji – balti. Tarkime, kad ištraukiame $n = 400$ rutulių imtį (kiekvieną ištrauktą rutulį grąžiname atgal į urną).
a) Raskite ištrauktų baltųjų rutulių skaičiaus Y skirstinio centrą ir standartinį nuokrypį.
b) Kokia tikimybė, kad baltųjų rutulių skaičius imtyje bus tarp 304 ir 332?
c) Baltųjų rutulių procentą urnoje vertinsime remdamiesi 400 rutulių imties rezultatu. Kokia tikimybė, kad įverčio paklaida bus ne didesnė kaip 4%?

30. Urnoje yra daugybė raudonos arba baltos spalvos rutulių. Tarkime, kad ištraukiame 1200 rutulių, iš kurių 300 (25%) pasirodo esą raudoni. Remdamiesi šio bandymo rezultatu, norime įvertinti raudonųjų rutulių procentą. Remdamiesi realiosios monetos principu, mes galime imti $\hat{p} = 0{,}25$ kaip tikslios p reikšmės apytikrę reikšmę.
Paaiškinkite, kodėl su dideliu patikimumu (95%) galime teigti, kad mūsų įvertis 0,25 nuo tikslios p reikšmės skiriasi ne daugiau kaip 0,07.



Atsakymai*

1 SKYRIUS

Apšilimas

1. a)

Balsavusiųjų skaičius	6	2	1	3
1 vieta	*A*	*C*	*B*	*C*
2 vieta	*B*	*D*	*D*	*B*
3 vieta	*C*	*B*	*C*	*D*
4 vieta	*D*	*A*	*A*	*A*

b) Ne. c) Astorija (A). d) Bokšto restoranas (B).

3. a) 51. b) A. **5.** B. **7.** C.

9. Nugalėtojas: A. Antroji vieta: C ir D (lygiosios). Ketvirtoji vieta: B. Paskutinė vieta: E.

11. Nugalėtojas: A. Antroji vieta: B, C ir D (lygiosios). Paskutinė vieta: E.

13. a)

Balsavusiųjų skaičius	8	5	3	2	4
1 vieta	*A*	*C*	*C*	*C*	*B*
2 vieta	*B*	*E*	*B*	*B*	*E*
3 vieta	*C*	*A*	*E*	*A*	*A*
4 vieta	*E*	*B*	*A*	*E*	*C*

b) A ir B lygiosios.

* Pateikiami tik kai kurių pratimų atsakymai.

15. P.

17. Nugalėtojas: B. Antroji vieta: P. Trečioji vieta: T. Paskutinė vieta: R ir V.

19. Nugalėtojas: P. Antroji vieta: B. Trečioji vieta: T. Ketvirtoji vieta: V. Paskutinė vieta: R.

21. A.

23. Nugalėtojas: D. Antroji vieta: B. Trečioji vieta: C. Ketvirtoji vieta: E. Paskutinė vieta: A.

25. Nugalėtojas: A. Antroji vieta: B. Trečioji vieta: E. Ketvirtoji vieta: D. Paskutinė vieta: C.

27. Nugalėtojas: A. Antroji vieta: B. Trečioji vieta: D. Ketvirtoji vieta: E. Paskutinė vieta: C.

29. Nugalėtojas: C. Antroji vieta: B. Trečioji vieta: D. Paskutinė vieta: A.

Treniruotė

31. a) 1225. b) 2450.

33. a) Kadangi vertinimų lentelėje yra tik du stulpeliai, tai viename iš jų išreikšta ne mažiau kaip 11 balsavusiųjų nuomonė. Todėl jame pirmoje vietoje įrašytas kandidatas gauna daugiau kaip pusę visų pirmų vietų.
b) Vėl tinka tas pats įrodymas, kadangi viename iš dviejų stulpelių bus išreikšta daugiau kaip pusės balsavusiųjų nuomonė (taigi lygiųjų būti negali).

35. Tarkime, kad rinkimų taškų metodu (1 vieta – 5 taškai, 2 vieta – 4 taškai, 3 vieta – 3 taškai, 4 vieta – 2 taškai, 5 vieta – 1 taškas) rezultatai buvo tokie:

Kandidatas	A	B	C	D	E
Taškai	a	b	c	d	e

Pagal peržiūrėtą schemą (1 vieta – 4 taškai, 2 vieta – 3 taškai, 3 vieta – 2 taškai, 4 vieta – 1 taškas, 5 vieta – 0 taškų) kiekvienas kandidatas praranda po 1 kiekvieno balsavusiojo tašką. Todėl rinkimų rezultatai bus tokie:

Kandidatas	A	B	C	D	E
Taškai	$a-21$	$b-21$	$c-21$	$d-21$	$e-21$

Kadangi naujųjų rezultatų tarpusavio išsidėstymas lieka tas pats, rinkimų rezultatai nepasikeis.

37. Jeigu kuris nors kandidatas yra pirmas didžiumos rinkėjų biuleteniuose, tai, taikant eliminavimo metodą, tas kandidatas bus paskelbtas nugalėtoju jau pirmame rate.

39. Kandidatas, esantis pirmas didžiumos rinkėjų biuleteniuose, laimi prieš kiekvieną kitą kandidatą lyginant vieną prieš vieną, taigi jis yra Kondorsė nugalėtojas. Jei balsavimo metodas pažeidžia didžiumos kriterijų, tai galima surasti pavyzdį tokių rinkimų, kuriuose kandidatas yra pirmas didžiumos rinkėjų biuleteniuose (taigi jis yra Kondorsė nugalėtojas), bet nėra rinkimų nugalėtojas. Vadinasi, balsavimo metodas pažeidžia ir Kondorsė kriterijų.

2 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) 3. b) 10. c) 10. d) $\{D_1, D_2\}$, $\{D_1, D_3\}$, $\{D_1, D_2, D_3\}$.
e) Tik D_1. f) D_1: $\frac{3}{5}$; D_2: $\frac{1}{5}$; D_3: $\frac{1}{5}$.

3. a) D_1: $\frac{3}{5}$; D_2: $\frac{1}{5}$; D_3: $\frac{1}{5}$. b) D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{2}$; D_3: 0.

5. D_1: $\frac{1}{3}$; D_2: $\frac{1}{3}$; D_3: $\frac{1}{3}$; D_4: 0; D_5: 0.

7. a) $\langle D_1, D_2, D_3\rangle$, $\langle D_1, D_3, D_2\rangle$, $\langle D_2, D_1, D_3\rangle$,
$\langle D_2, D_3, D_1\rangle$, $\langle D_3, D_1, D_2\rangle$, $\langle D_3, D_2, D_1\rangle$.
b) $\langle D_1, \bar{D}_2, D_3\rangle$, $\langle D_1, \bar{D}_3, D_2\rangle$, $\langle D_2, \bar{D}_1, D_3\rangle$,
$\langle D_2, D_3, \bar{D}_1\rangle$, $\langle D_3, \bar{D}_1, D_2\rangle$, $\langle D_3, D_2, \bar{D}_1\rangle$.
c) D_1: $\frac{2}{3}$; D_2: $\frac{1}{6}$; D_3: $\frac{1}{6}$.

9. a) D_1: $\frac{2}{3}$; D_2: $\frac{1}{6}$; D_3: $\frac{1}{6}$. b) D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{2}$; D_3: 0.

13. a) 16. b) 31. c) 31. d) 120.

15. a) D_1: 1; D_2: 0; D_3: 0. b) D_1: $\frac{2}{3}$; D_2: $\frac{1}{6}$; D_3: $\frac{1}{6}$. c) D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{2}$; D_3: 0.
d) D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{2}$; D_3: 0. e) D_1: $\frac{1}{3}$; D_2: $\frac{1}{3}$; D_3: $\frac{1}{3}$.

17. a) 40 320. b) 479 001 600. c) 6 227 020 800. d) $26A$. e) 13!.

19. A: $\frac{1}{3}$; B: $\frac{1}{3}$; C: $\frac{1}{3}$; D: 0.

Treniruotė

21. a) 63.
b) Vienintelę laiminčiąją koaliciją sudaro visi dalyviai (didžioji koalicija), ir kiekvienas dalyvis joje yra kritinis.
c) Kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklis yra $\frac{1}{6}$.
d) Kai kvota yra lygi visų dalyvių svorių sumai ($k = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$), tai vienintelė laiminčioji koalicija yra didžioji koalicija, ir joje kiekvienas dalyvis yra kritinis. Vadinasi, kiekvienas iš N dalyvių yra kritinis vienintelį kartą, todėl kiekvieno dalyvio Banžafo galios rodiklis yra $\frac{1}{N}$.

23. a) [8: 6, 3, 3, 3]. Banžafo galios skirstinys: D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{6}$; D_3: $\frac{1}{6}$; D_4: $\frac{1}{6}$.
b) [9: 6, 3, 2, 2]. Banžafo galios skirstinys: D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{3}{10}$; D_3: $\frac{1}{10}$; D_4: $\frac{1}{10}$.
c) [12: 6, 3, 3, 3]. Banžafo galios skirstinys: D_1: $\frac{2}{5}$; D_2: $\frac{1}{5}$; D_3: $\frac{1}{5}$; D_4: $\frac{1}{5}$.
d) [12: 6, 3, 3, 2]. Banžafo galios skirstinys: D_1: $\frac{1}{3}$; D_2: $\frac{1}{3}$; D_3: $\frac{1}{3}$; D_4: 0.

25. a) D_5 yra bevertis. Reikia (mažiausiai) trijų dalyvių iš keturių, kad pasiūlymas būtų priimtas.
b) Abu skirstiniai sutampa: D_1: $\frac{1}{4}$; D_2: $\frac{1}{4}$; D_3: $\frac{1}{4}$; D_4: $\frac{1}{4}$; D_5: 0.
c) $k = 21$, $k = 31$, $k = 41$.

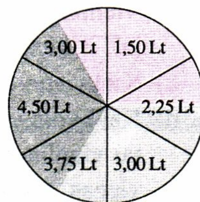
27. a) Abiejų svorinių balsavimo sistemų skirstinys yra D_1: $\frac{1}{2}$; D_2: $\frac{1}{6}$; D_3: $\frac{1}{6}$; D_4: $\frac{1}{6}$.
b) Svorinėje balsavimo sistemoje $[k : s_1, s_2, \ldots, s_N]$ D_j yra lemiamasis nuosekliojoje koalicijoje $\langle D_1, D_2, \ldots, D_j, \ldots, D_N \rangle$, kai $s_1 + s_2 + \cdots + s_j \geqslant k$, bet $s_1 + s_2 + \cdots + s_{j-1} < k$. Antroje balsavimo sistemoje $[ck : cs_1, cs_2, \ldots, cs_N]$ D_j yra lemiamasis koalicijoje $\langle D_1, D_2, \ldots, D_j, \ldots, D_N \rangle$, kai $cs_1 + cs_2 + \cdots + cs_j \geqslant ck$, bet $cs_1 + cs_2 + \cdots + cs_{j-1} < ck$. Aišku, kad pirmosios nelygybės ekvivalenčios antrosioms. Kadangi tai teisinga kiekvienai nuosekliajai koalicijai, tai lemiamieji dalyviai visada yra tie patys. Vadinasi, sutampa ir Šaplio–Šubiko galios skirstinys.

29. a) D_5 yra bevertis, kai $k = 14$. b) $k = 15$.

3 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) 9,00 Lt. b) 3,00 Lt. c) 3,00 Lt.
3. a) 9,00 Lt. b) 6,00 Lt. c) 3,00 Lt.
d)



5. a) Tik iii). b) i): I; ii): I; iii): I; iv) bet kurį.

7. a) Trys variantai, parodyti lentelėje.

D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (dalija)
g_2	g_1	g_3
g_3	g_1	g_2
g_3	g_2	g_1

b) Du variantai, parodyti lentelėje.

D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (dalija)
g_1	g_3	g_2
g_2	g_3	g_1

c) Vienintelis teisingų dalybų variantas, parodytas lentelėje.

D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (dalija)
g_1	g_3	g_2

d) D_3 gali rinktis g_1 arba g_3 – sakykime, kad jis pasirenka g_1. Tada g_2 ir g_3 galima sujungti į vieną gabalą, kurį D_1 ir D_2 gali pasidalyti dalijančiojo ir besirenkančiojo metodu.

9. a) Vienas iš galimų torto pasidalijimų yra toks:

D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (renkasi)	D_4 (dalija)
g_2	g_4	g_1	g_3

b) Kitas galimas torto pasidalijimas yra toks:

D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (renkasi)	D_4 (dalija)
g_4	g_1	g_2	g_3

c) Kadangi nė vienas iš besirenkančiųjų nepasirinko gabalo g_3, jį tenka atiduoti dalijančiajam.

11. a) Tortą galima pasidalyti taip:

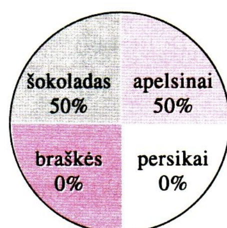
D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (renkasi)	D_4 (renkasi)	D_5 (dalija)
g_3	g_4	g_2	g_5	g_1

b) Kitas torto pasidalijimo variantas yra toks:

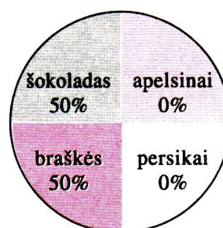
D_1 (renkasi)	D_2 (renkasi)	D_3 (renkasi)	D_4 (renkasi)	D_5 (dalija)
g_4	g_3	g_2	g_5	g_1

c) Kadangi nė vienas iš besirenkančiųjų nepasirinko gabalo g_1, jį tenka atiduoti dalijančiajam.

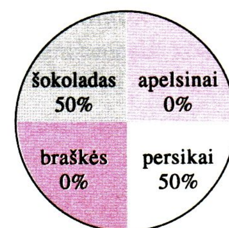
14. Torto dalių vertė procentais kiekvieno dalybininko požiūriu pavaizduota paveikslėlyje.



X požiūris

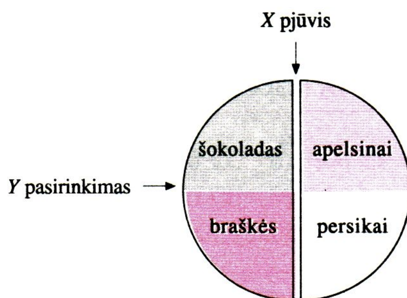


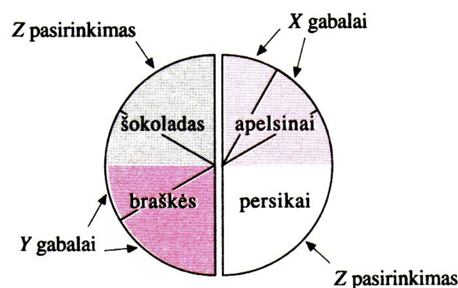
Y požiūris



Z požiūris

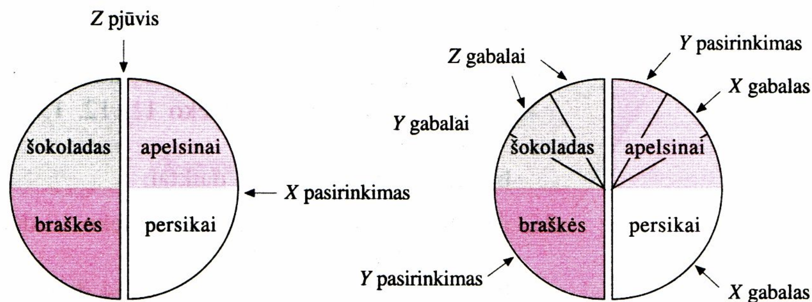
a) Tortą galima pasidalyti taip:





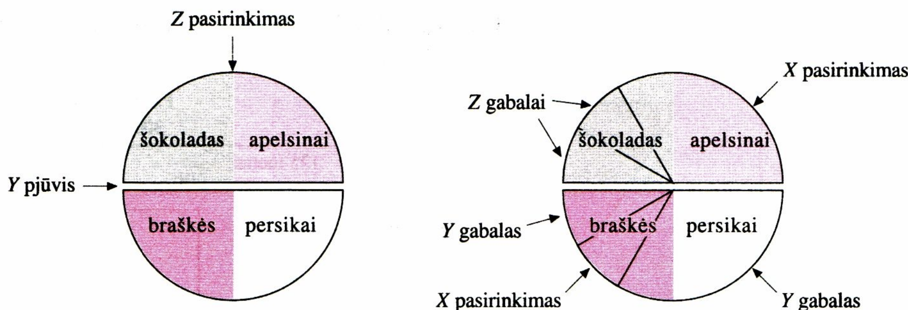
Taip pasidalijus, *X* gauta dalis, jo paties nuomone, sudaro $\frac{2}{3} \cdot 50\% = 33\frac{1}{3}\%$ viso torto vertės, *Y* gauta dalis, jo paties nuomone, sudaro $\frac{2}{3} \cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\%$, o *Z* gauta dalis, jo paties nuomone, sudaro $\frac{2}{3} \cdot 50\% + 50\% = 83\frac{1}{3}\%$ viso torto vertės.

b) Tortą galima pasidalyti taip:



X: $33\frac{1}{3}\%$, Y: $66\frac{2}{3}\%$, Z: $33\frac{1}{3}\%$.

c) Tortą galima pasidalyti taip:



X: $66\frac{2}{3}\%$, Y: $33\frac{1}{3}\%$, Z: $33\frac{1}{3}\%$.

15. a) Ne. b) D_4. c) D_1. d) D_3. e) 3.

17. *A* gauna stalą ir kilimą ir turi sumokėti 295,55 Lt; *B* gauna spintą ir 111,11 Lt; *C* gauna krėslą ir 184,44 Lt.

18. a) Jonas gauna įmonę ir turi sumokėti 170 000 Lt.
b) Benas gauna 90 000 Lt, o Ona gauna 80 000 Lt.

19. *A* gauna visus keturis daiktus ir turi sumokėti 173 777,78 Lt; *B* gauna 89 888,89 Lt; *C* gauna 83 888,89 Lt.

20. *A* gauna ketvirtą daiktą ir turi sumokėti 226 Lt; *B* gauna 609 Lt; *C* gauna pirmą ir trečią daiktus ir turi sumokėti 264 Lt; *D* gauna penktą daiktą ir 120 Lt; *E* gauna antrą ir šeštą daiktą ir turi sumokėti 239 Lt.

21. a) D_1 atiteko 10, 11, 12, 13 daiktai; D_2 atiteko 1, 2, 3 daiktai; D_3 atiteko 5, 6, 7 daiktai.
b) Liko 4, 8, 9 daiktai.

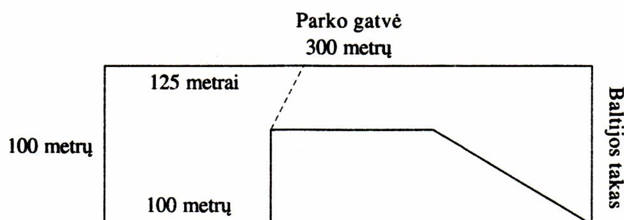
23. a) D_1 atiteko 1, 2 daiktai; D_2 atiteko 10, 11, 12 daiktai; D_3 atiteko 4, 5, 6, 7 daiktai.
b) Liko 3, 8, 9 daiktai.

25. a) D_1 atiteko 19, 20 daiktai; D_2 atiteko 15, 16, 17 daiktai; D_3 atiteko 1, 2, 3 daiktai; D_4 atiteko 11, 12, 13 daikati; D_5 atiteko 5, 6, 7, 8 daiktai.
b) Liko 4, 9, 10, 14, 18 daiktai.

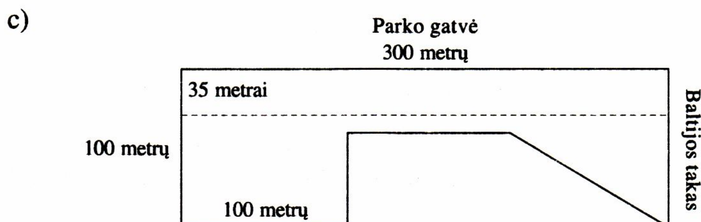
26. a) D_1 atiteko 4, 5 daiktai; D_2 atiteko 10 daiktas; D_3 atiteko 15 daiktas; D_4 atiteko 1, 2 daiktai.
b) Liko 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 daiktai.

Treniruotė

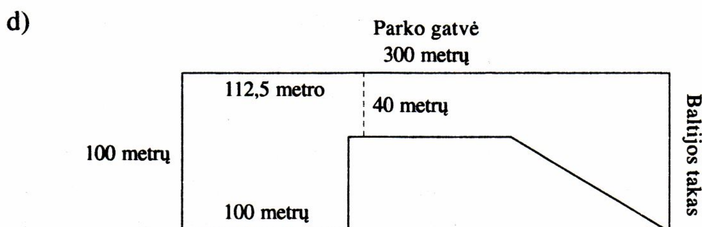
27. a) Visas plotas yra 30 000 m^2, o P plotas yra tik 9 000 m^2. Kadangi D_2 ir D_3 visą žemę vertina vienodai, tai, kiekvieno jų nuomone, teisinga dalis turi būti mažiausiai 10 000 m^2.
b) Kadangi liko 21 000 m^2, tinka bet kuris pjūvis, kuris dalija tą plotą į dvi dalis po 10 500 m^2. Pavyzdžiui:



c)

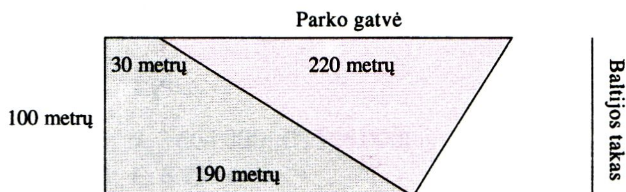


d)

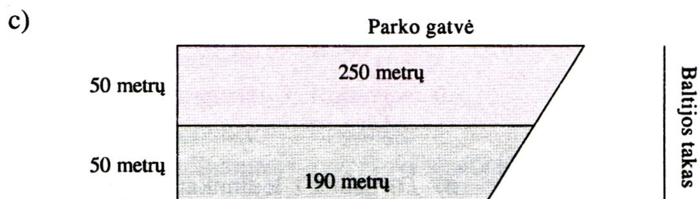


28. a) Visas plotas yra 30 000 m^2, o P plotas yra tik 8 000 m^2. Kadangi D_2 ir D_3 visą žemę vertina vienodai, tai, kiekvieno jų nuomone, teisinga dalis turi būti mažiausiai 10 000 m^2.

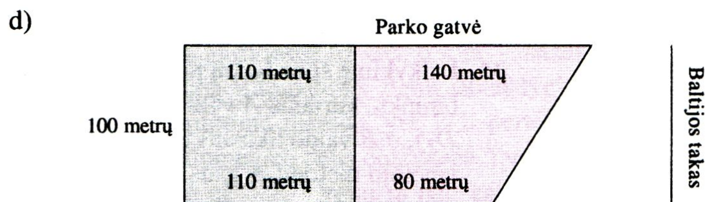
b) Kadangi liko 22 000 m^2, tinka bet kuris pjūvis, kuris dalija tą plotą į dvi dalis po 11 000 m^2. Pavyzdžiui:



c)

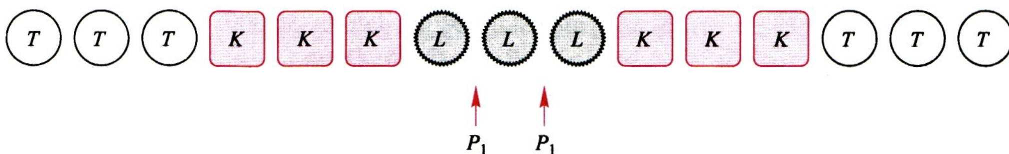


d)

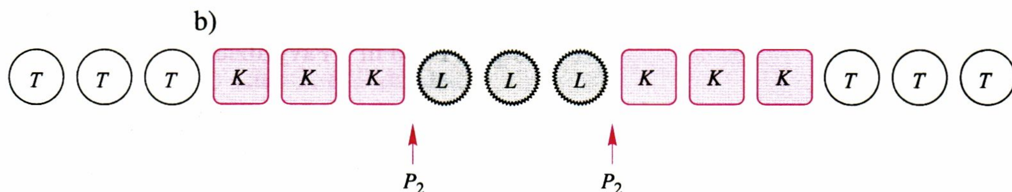


30. **1 ėjimas (įkainojimas).** Kiekvienas paveldėtojas sąžiningai pinigais įvertina kiekvieną palikimo daiktą. **2 ėjimas (skirstymas).** Kiekvienas daiktas atitenka didžiausia suma jį įkainojusiam dalybininkui. (Lygiosios išsprendžiamos kokia nors iš anksto numatyta procedūra.) Kiekvieno paveldėtojo teisinga dalis yra apskaičiuojama jo įkainių sumą dauginant iš jam testamentu numatyto turto procento (D_1 įkainių suma dauginama iš $r_1/100$ ir t.t.). Kiekvienas paveldėtojas pinigais įmoka į bendrą katilą arba gauna jam atitekusių daiktų jo įkainių sumos ir jo teisingos dalies skirtumą. **3 ėjimas (pertekliaus dalijimas).** Paskirsčius daiktus ir pinigus, gali likti grynųjų pinigų perteklius. Jis padalijamas atsižvelgiant į kiekvienam paveldėtojui numatytą turto procentą (D_1 gauna $r_1/100$ pertekliaus dalį ir t.t.).

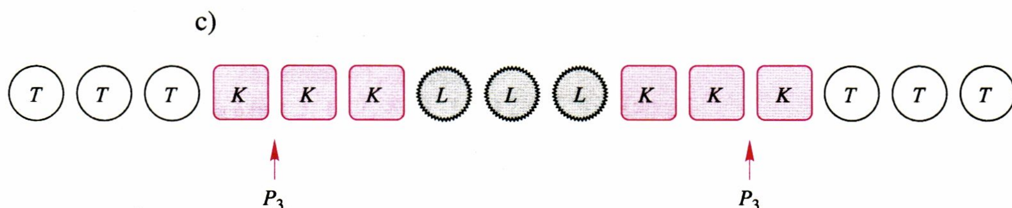
32. a)



b)



c)



d) D_1 gauna 1 ledinuką; D_2 gauna 3 karameles ir 3 triufelius; D_3 gauna 1 karamelę ir 3 triufelius.
e) 2 karamelės ir 2 ledinukai.

34. Laikykime šį uždavinį paprastu teisingų dalybų uždaviniu su dešimt dalybininkų, kuriame A valdo septynis dalybininkus (D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7), o B valdo likusius tris dalybininkus (D_8, D_9, D_{10}). Vienintelio dalijančiojo metodu A gaus septynis gabalus, kiekvienas iš kurių (A nuomone) yra vertas ne mažiau kaip 1/10 torto, o B gaus tris gabalus, kiekvienas iš kurių (B nuomone) yra vertas ne mažiau kaip 1/10 torto.

36. a) Ne. Besirenkančiajam negarantuojama teisinga dalis jo paties vertinimu.
b) Dalyti. Dalijantysis garantuoja sau teisingą torto dalį, padalijęs tortą į dvi dalis, kiekviena iš kurių yra teisinga dalis.

4 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) 50 000.
b) A: 26,6; B: 53,4; C: 14,2; D: 65,8.
c) A: 27; B: 53; C: 14; D: 66.

2. a) A: 26,233; B: 52,663; C: 14,00; D: 64,892.
b) A: 27; B: 53; C: 15; D: 65.

5. a) Tinka standartinis daliklis 50 000.
b) A: 27; B: 53; C: 14; D: 66.

7. A: 13; B: 38; C: 20; D: 31; E: 33; F: 15.

9. A: 13; B: 38; C: 20; D: 31; E: 33; F: 15.

10. a) 9,5156. Standartinis daliklis reiškia vidutinį pacientų skaičių, tenkantį vienam gydytojui.
b) A: 86,49; B: 69,26; C: 40,14; D: 29,11.
c) A: 87; B: 69; C: 40; D: 29.

13. a) 124.
b) 200 000.
c) A: 5 052 000; B: 3 664 000; C: 516 000; D: 7 432 000; E: 8 136 000.

15. A: 25; B: 18; C: 2; D: 38; E: 41.

17. A: 25; B: 18; C: 3; D: 37; E: 41.

20. a) Benas: 8; Augustė: 3; Rolandas: 0.
b) Benas: 8; Augustė: 2; Rolandas: 1.
c) Taip. Tai vadinamasis gyventojų skaičiaus paradoksas.

Treniruotė

25. a) Abiejų trupmeninių dalių suma lygi 1. Todėl arba abi jos lygios 0,5, arba viena iš jų didesnė už 0,5, o kita – mažesnė.
b) Kadangi abiejų trupmeninių dalių suma lygi 1, tai vietų perteklius, skirstant Hamiltono metodu, yra 1, ir perteklinė vieta atitenka partijai, kurios trupmeninė dalis didžiausia, t.y. partijai, kurios trupmeninė dalis didesnė už 0,5. Lygiai tą patį gauname apvalindami įprastiniu būdu, ir tai sutampa su rezultatu, gaunamu taikant Vebsterio metodą. (Visada, kai, suapvalinę kvotas, gauname sveikuosius skaičius, kurių suma lygi M, Vebsterio metodas ir reiškia įprastinį kvotų apvalinimą.)
c) Kai yra tik 2 valstijos, Hamiltono ir Vebsterio metodai sutampa, ir, taikant Vebsterio metodą, niekada neiškils nei Alabamos paradoksas, nei gyventojų skaičiaus paradoksas.
d) Kai yra tik 2 valstijos, Vebsterio ir Hamiltono metodai sutampa, ir, taikant Hamiltono metodą, niekada nebus pažeista kvotų taisyklė.

26. a) A: 5; B: 10; C: 15; D: 21.
b) Su $D = 100$ modifikuotosios kvotos yra A: 5; B: 10; C: 15; D: 20, taigi visos jos yra sveikieji skaičiai, suapvalintos didyn nesikeis, ir suma liks lygi 50. Jei $D < 100$, tai kiekviena iš modifikuotųjų kvotų padidės, ir suapvalintos didyn kvotos mažų mažiausiai bus A: 6; B: 11; C: 16; D: 21, o jų suma bus mažiausiai 54. Jei $D > 100$, tai kiekviena iš modifikuotųjų kvotų sumažės, ir suapvalintos mažyn kvotos daugų daugiausiai bus A: 5; B: 10; C: 15; D: 20, o jų suma bus daugiausiai 50.
c) Iš punkto b) matome, kad nėra tokio daliklio, kad, suapvalinę kvotas didyn, gautume sumą 51.

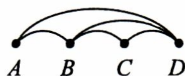
30. a) Imkime, pavyzdžiui, $k_1 = 3{,}9$ ir $k_2 = 10{,}1$ ($M = 14$). Tiek Hamiltono, tiek Laundeso metodu A gauna 4 vietas, o B – 10 vietų.
b) Imkime, pavyzdžiui, $k_1 = 3{,}4$ ir $k_2 = 10{,}6$ ($M = 14$). Hamiltono metodu A gauna 3 vietas, o B – 11 vietų. Laundeso metodu A gauna 4 vietas, o B – 10 vietų.
c) Jei $f_1 > f_2$, tai, skirstant Hamiltono metodu, perteklinė vieta atitenka valstijai A. Skirstant Laundeso metodu, perteklinė vieta atitenka B, jei $\frac{f_2}{k_2 - f_2} > \frac{f_1}{k_1 - f_1}$.

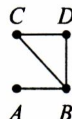
5 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) Viršūnės: A, B, C, D. Briaunos: AB, AC, AD, BD.
b) Viršūnės: A, B, C. Briaunos: nėra.
c) Viršūnės: V, W, X, Y, Z.
Briaunos: $XX, XY, XZ, XV, XW, WY, YZ$.

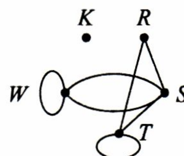
3. a)





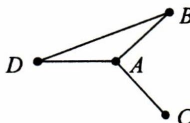
b)



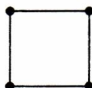


5. a) $\deg(A) = 3$; $\deg(B) = 2$; $\deg(C) = 1$; $\deg(D) = 2$.
b) $\deg(A) = 0$; $\deg(B) = 0$; $\deg(C) = 0$.
c) $\deg(X) = 6$; $\deg(Y) = 3$; $\deg(Z) = 2$; $\deg(V) = 1$; $\deg(W) = 2$.

7. a) Abu grafai turi keturias viršūnes A, B, C, D ir (tas pačias) briaunas AB, AC, AD, BD.
b)



9.

a) 

b) 

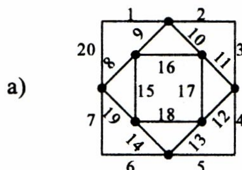
11. a) C, B, A, H, F. b) C, B, D, A, H, F.
c) 4 (C, B, A; C, D, A; C, B, D, A; C, D, B, A).
d) 3 (H, F; H, G, F; H, G, G, F).
e) 12 (bet kuris iš punkto c) kelių, po to AH, po to bet kuris iš punkto d) kelių).

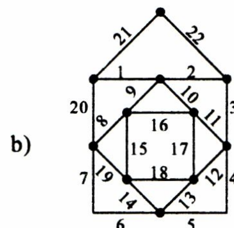
13. a) D, C, B, A, D.
b) 6 (D, C, B, D; D, B, C, D; D, A, B, D; D, B, A, D; D, C, B, A, D; D, A, B, C, D).
c) HA ir FE.

15. a) Nė vienas.
b) 

17. a) Turi Oilerio ciklą, nes visų viršūnių laipsniai yra lyginiai.
b) Neturi Oilerio ciklo, bet turi Oilerio kelią, nes yra lygiai dvi nelyginio laipsnio viršūnės.
c) Neturi nei Oilerio ciklo, nei Oilerio kelio, nes yra keturios nelyginio laipsnio viršūnės.

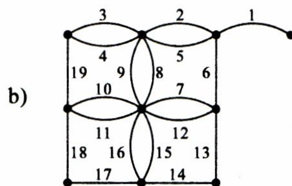
19.

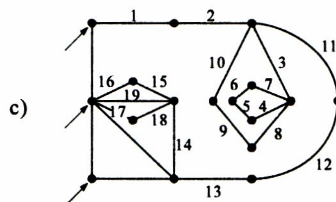
a) 

b) 

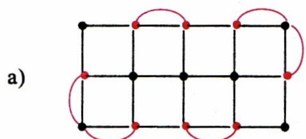
c) Neįmanoma, nes yra keturios nelyginio laipsnio viršūnės.

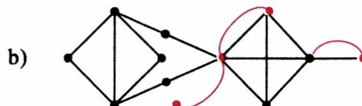
20. a) Neįmanoma, nes yra daugiau kaip dvi nelyginio laipsnio viršūnės.

b) 

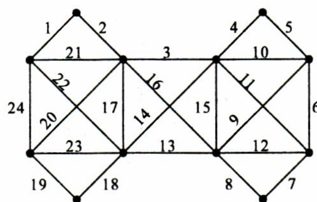
c) 

21.

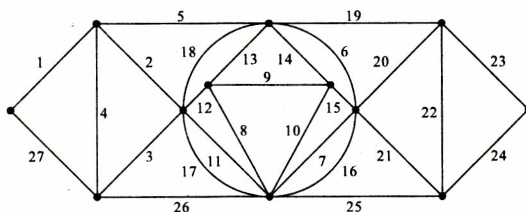
a) 

b) 

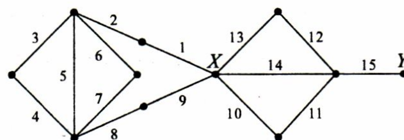
23.



25.



26.



Treniruotė

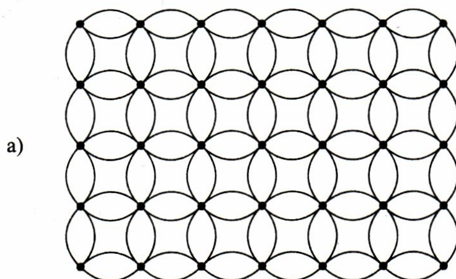
28. a)

Grafas	Briaunų skaičius	Visų viršūnių laipsnių suma
1 a) pratimas	4	$3+2+1+2=8$
1 b) pratimas	0	0
1 c) pratimas	7	$6+2+3+1+2=14$
2 a) pratimas	4	$3+2+1+2=8$
2 b) pratimas	10	$4+4+4+4+4=20$
2 c) pratimas	7	$1+3+2+1+5+2=14$

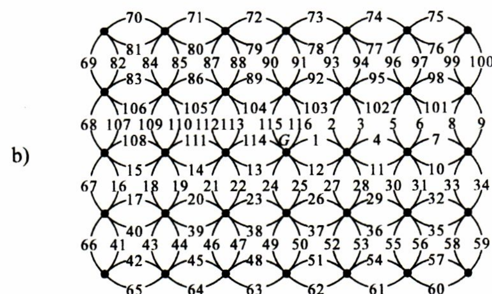
b) Kiekviena briauna įneša 2 (po 1 kiekviename briaunos gale) į visų viršūnių laipsnių sumą. Jeigu būtų nelyginis skaičius nelyginio laipsnio viršūnių, tai visų viršūnių laipsnių suma būtų nelyginė.

30.

a)

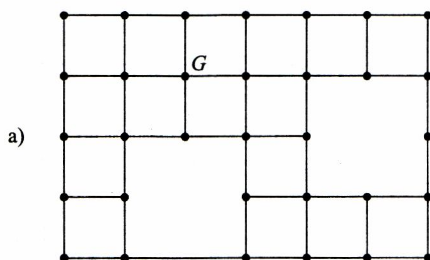


b)

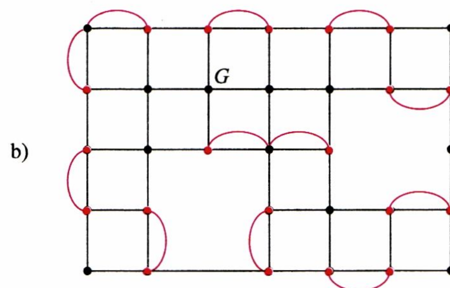


32.

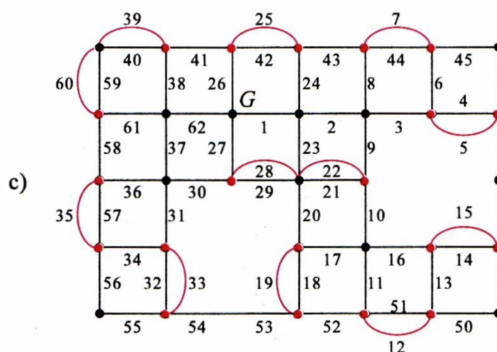
a)

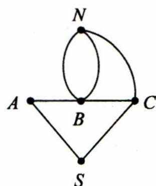


b)

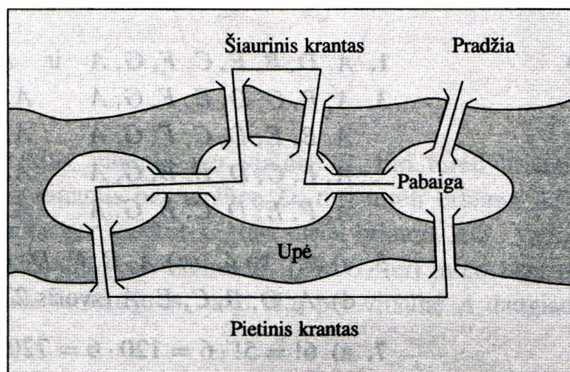


c)



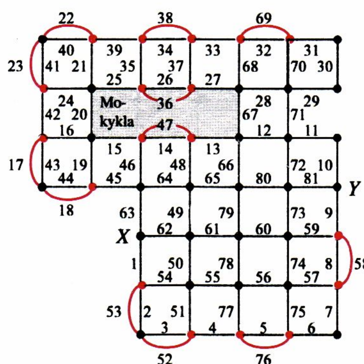


35. Uždavinį galima pavaizduoti kairėje parodytu grafu. Čia N yra šiaurinis krantas, S – pietinis krantas, A, B, C – trys salos. Kadangi N ir C yra vienintelės nelyginio laipsnio viršūnės, tai šis grafas turi Oilerio kelią (bet neturi Oilerio ciklo). Vadinasi, įmanoma pasivaikščioti, kiekvienu tiltu pereinant lygiai vieną kartą, jei pradėsime nuo taško N arba C ir baigsime kitu iš tų taškų. (Neįmanoma pradėti ir baigti pasivaikščiojimą toje pačioje vietoje.)



38. a) 12.

b)



39. Įstaigą galima pavaizduoti grafu (kuriame kiekviena viršūnė vaizduoja buvimo vietą, o briauna – duris).

a) Kadangi yra nelyginio laipsnio viršūnių (pavyzdžiui, sekretoriatas turi laipsnį 3), tai Oilerio ciklo nėra.

b) Kadangi yra lygiai dvi nelyginio laipsnio viršūnės (sekretoriatas turi laipsnį 3, o vestibiulis turi laipsnį 9), tai galima rasti Oilerio kelią, prasidedantį sekretoriate arba vestibiulyje ir pasibaigiantį kitoje iš šių vietų.

c) Jeigu pašalintume duris iš sekretoriato į vestibiulį (t.y. pašalintume briauną tarp sekretoriato ir vestibiulio), tai kiekviena viršūnė turėtų lyginį laipsnį, ir atsirastų Oilerio ciklas. Todėl galima būtų pradėti bet kur, eiti pro kiekvienas duris lygiai vieną kartą ir baigti maršrutą pradiniame taške.

6 SKYRIUS

Apšilimas

1. A, D, B, E, C, F, G, A ir A, G, B, D, C, E, F, A.

3. A, B, C, D, E, F, G, A $\quad A, G, F, E, D, C, B, A$
A, B, E, D, C, F, G, A $\quad A, G, F, C, D, E, B, A$
A, F, C, D, E, B, G, A $\quad A, G, B, E, D, C, F, A$
A, F, E, D, C, B, G, A $\quad A, G, B, C, D, E, F, A$

5. a) 6. b) 4. c) A, B, C, D, E, A (svoris 32).
d) A, D, B, C, E, A (svoris 27).

7. a) $6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$. b) $9! = 10!/10 = 362\,880$.
c) $9! = 362\,880$.

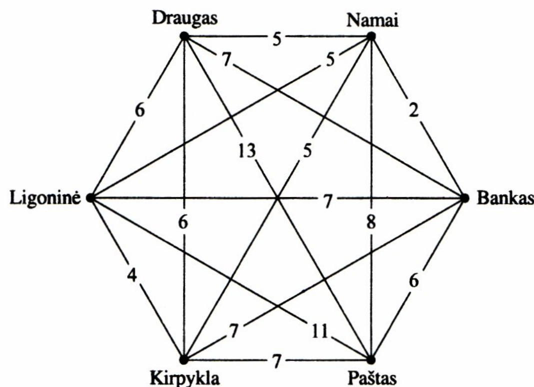
9. a) A, C, B, D, A (svoris 62). b) A, D, C, B, A (svoris 80).
c) A, B, D, C, A (svoris 74).
d) Sprendinys, gautas punkte c), yra 29,0% ilgesnis už punkte a) rastąjį optimalųjį sprendinį – santykinė paklaida lygi 0,290. Sprendinys, gautas punkte c), yra 19,4% ilgesnis už optimalų sprendinį – santykinė paklaida lygi 0,194.

11. D, A, C, E, B, D.

13. a) A, D, B, E, C, A (svoris 103). b) A, B, C, D, E, A (svoris 82).

15. C, D, E, A, B, C. **17.** A, B, F, C, D, E, A.

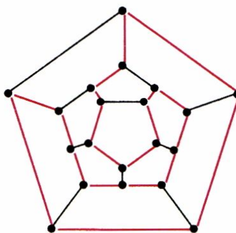
19. a)



b) Namai, bankas, paštas, kirpykla, ligoninė, draugas, namai. Viso kelio ilgis yra 30 km (artimiausiojo kaimyno algoritmas).

Treniruotė

21.



23. Bet kuris ciklas, einantis per viršūnę B, turi turėti briauną AB. Bet kuris ciklas, einantis per viršūnę D, turi turėti briauną AD. Bet kuris ciklas, einantis per viršūnę G, turi turėti briauną AG. Vadinasi, bet kuris ciklas, einantis per viršūnes B, D ir G, turi turėti bent tris briaunas, susikertančias viršūnėje A, taigi eitų per viršūnę A daugiau kaip vieną kartą.

25. $A, B, C, D, J, I, F, G, E, H$.

27. a) $2^3 = 8 > 6 = 3!$.

b) $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

c) $N!$ yra didesnis. Iš tikrųjų,

$2^5 = 2 \cdot 2^4 < 2 \cdot 4! < 5 \cdot 4! = 5!$,

$2^6 = 2 \cdot 2^5 < 2 \cdot 5! < 6 \cdot 5! = 6!$,

$2^7 = 2 \cdot 2^6 < 2 \cdot 6! < 7 \cdot 6! = 7!$,

$\vdots$

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!, \ldots$.

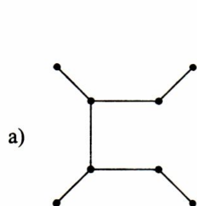
Kitaip tariant, kai k padidėja vienetu, tai 2^k padidėja 2 kartus, o k padidėja $k+1$ kartą.

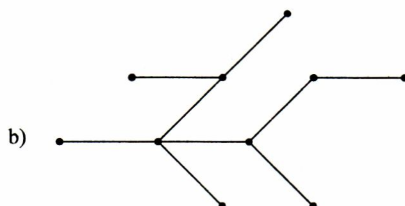
7 SKYRIUS

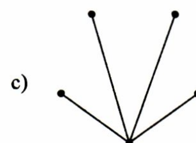
Apšilimas

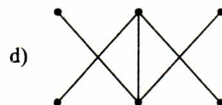
1. a) Medis. b) Ne medis (turi ciklą, nėra jungus). c) Ne medis (turi ciklą). d) Medis.

3.

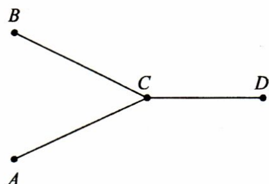
a) 

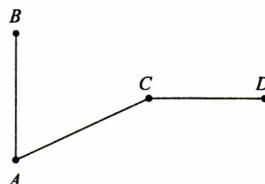
b) 

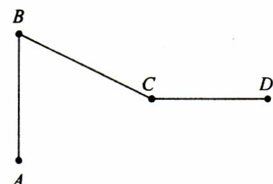
c) 

d) 

5.

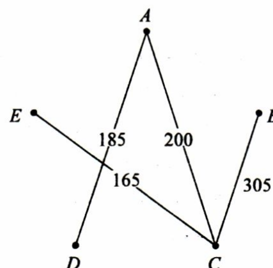




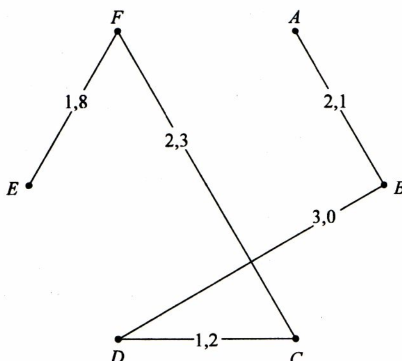


7. a) 3. b) 1.

9.



11.



13. a) $CE+ED+EB$ yra daugiau, nes $CD+DB$ yra trumpiausias tinklas, jungiantis taškus C, D ir B.

b) $CD + DB$ yra trumpiausias tinklas, jungiantis taškus C, D ir B. Kadangi kampas CDB yra lygus 120°, tai trumpiausias tinklas yra minimalusis jungiantysis medis.

c) $CD + EB$ yra trumpiausias tinklas, jungiantis taškus C, E ir B. Kadangi kampas CEB yra didesnis kaip 120°, tai trumpiausias tinklas yra minimalusis jungiantysis medis.

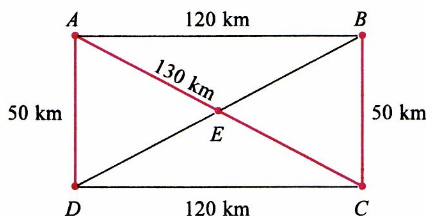
17. Pažymėkime $\angle SAB = x$. Tada $\angle SBA = 60° - x$, $\angle SBC = 60° - (60° - x) = x$ ir $\angle SCB = 60° - x$. Todėl $AB = BC$. Vadinasi, trikampiai ASB ir BSC yra lygūs. Analogiškai įrodome, kad trikampiai BSC ir CSA yra lygūs.

19. a) Iš 18 pratimo išplaukia, kad ABM yra statusis trikampis su smailiuoju kampu 30° ir įžambine $AB = 500$. Todėl $BM = 250$, o $MA = 250\sqrt{3} \approx 433{,}0$.

b) Trikampio BSM kampai taip pat yra 30°, 60° ir 90°, o jo didesnis statinis $BM = 250$. Todėl trumpesnis statinis $SM = 250/\sqrt{3}$, o įstrižainė $BS = 500/\sqrt{3}$. Kadangi $BS = SA$, tai $SA = 500/\sqrt{3} = 500\sqrt{3}/3 \approx 288{,}7$.

Treniruotė

21. 230 km.



23. Medis turi vieną ir tik vieną kelią, jungiantį bet kurias dvi viršūnes. Todėl vienintelis kelias, jungiantis dvi gretimas viršūnes, yra jas jungianti briauna, ir jei tą briauną pašalintume, grafas taptų nejungus.

25. a) Ne. Medis su keturiomis viršūnėmis turi turėti tris briaunas, todėl visų viršūnių laipsnių suma bus 6.

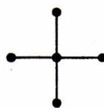
b) 6. c) 8.

d) $2N-2$. (N-viršūnis medis turi $N-1$ briauną, o kiekvieno grafo visų viršūnių laipsnių suma lygi dvigubam briaunų skaičiui – žr. 5 skyriaus 28 b) uždavinio sprendimą.)

27.



a)

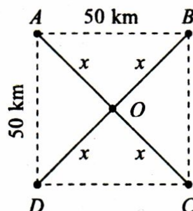


b)



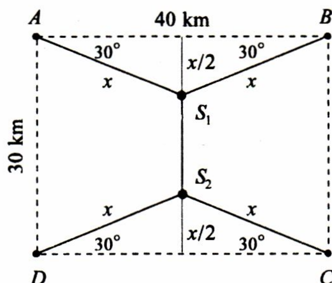
c)

29. Tinklo ilgį pažymėkime $4x$ (žr. brėžinį).



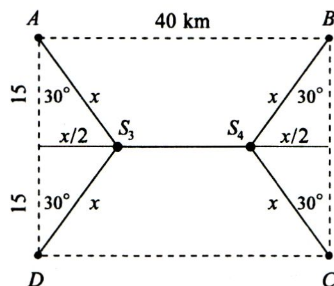
Kadangi kvadrato įstrižainės statmenos, tai $x^2 + x^2 = 50^2$, $2x^2 = 50^2$, $x = 50/\sqrt{2} = 50\sqrt{2}/2 = 25\sqrt{2}$. Todėl $4x = 100\sqrt{2} \approx 141{,}4$.

31. a) Tinklo ilgis yra $4x + (30 - x) = 3x + 30$, o $20^2 + (x/2)^2 = x^2$ (žr. brėžinį).



Išsprendę lygtį, randame, kad $x = 40\sqrt{3}/3$, todėl tinklo ilgis yra $40\sqrt{3} + 30 \approx 99{,}3$.

b) Tinklo ilgis yra $4x + (40 - x) = 3x + 40$, o $15^2 + (x/2)^2 = x^2$ (žr. brėžinį).



Išsprendę lygtį, randame, kad $x = 30\sqrt{3}/3$, todėl tinklo ilgis yra $30\sqrt{3} + 40 \approx 91{,}96$.

8 SKYRIUS

Apšilimas

1. a)

Viršūnė	Laipsnis	Įeičių laipsnis	Išeičių laipsnis	Viršūnė eina prieš viršūnes	Viršūnė eina po viršūnių
A	3	2	1	*C*	*B*, *D*
B	2	0	2	*A*, *D*	–
C	1	1	0	–	*A*
D	2	1	1	*A*	*B*

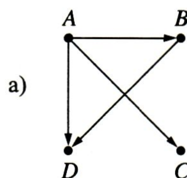
b)

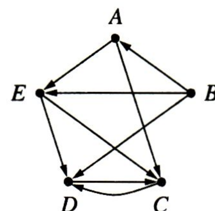
Viršūnė	Laipsnis	Įeičių laipsnis	Išeičių laipsnis	Viršūnė eina prieš viršūnes	Viršūnė eina po viršūnių
A	3	2	1	*C*	*B*, *C*
B	2	0	2	*A*, *D*	–
C	4	1	3	*A*, *D*, *E*	*A*
D	3	3	0	–	*B*, *C*, *E*
E	2	1	1	*D*	*C*

c)

Viršūnė	Laipsnis	Įeičių laipsnis	Išeičių laipsnis	Viršūnė eina prieš viršūnes	Viršūnė eina po viršūnių
A	1	1	0	–	*B*
B	3	2	1	*A*	*E*
C	2	1	1	*F*	*E*
D	1	1	0	–	*E*
E	5	0	5	*B*, *C*, *D*, *F*	–
F	2	2	0	–	*C*, *E*

3.

a) 

b) 

5.

Užduotys	PS	GS	GT	SS	KS	VT	ST	BJ	KT	SP	SI	SV	SK	KO	VA
Laikas:	0	7	12	17	23	31	35	42	46	51	54	58	60	63	64	70

7. Kaip rodo nuoseklumo sąryšiai, užduotis BJ turi būti užbaigta prieš pradedant SP, taigi BJ negali tvarkaraštyje būti po SP.

9. Laiko momentu 16 yra tinkama užduotis VT Tibsui 1, todėl jis negali būti laisvas.

11.

Laikas	0	9	15	17	26
1 vykdytojas	*C*(9)	*E*(6)	*G*(2)	Prastova	

Laikas	0	8	13	25	26
2 vykdytojas	*A*(8)	*B*(5)	*D*(12)	*F*(1)	

13.

Laikas	0	15	20	25	30	45	65
1 vykdytojas	*D*	*H*	*J*	Prastova	*I*	*K*	

Laikas	0	10	14	17	21	23	30	65
2 vykdytojas	*C*	*B*	*F*	*G*	*A*	*E*	Prastova	

15.

Laikas	0	2	4	11	14	19	29	49
1 vykdytojas	*B*	*E*	*F*	*I*	*K*			
2 vykdytojas	*A*	*C*	Prastova	*G*	Prastova			

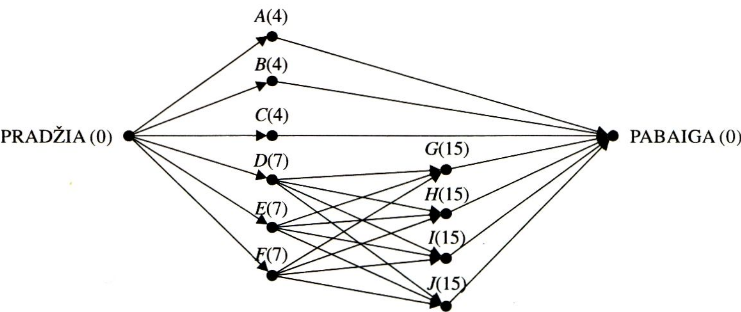
Laikas	0	12	15	20	25	49
3 vykdytojas	*D*	*H*	*J*	Prastova		

17.

Laikas	0–8	8–15	15–20	20–27	27–32	32–35	35–38	38–44
X	*KS*	*PS*	*GT*	*ST*	*KT*	*SP*	*SK*	*VA*

Laikas	0–6	6–11	11–20	20–24	24–27	27–31	31–35	35–37	37–38	38–44
Y	*SS*	*GS*	Prastova	*VT*		*BJ*	*SI*	*SV*	*KO*	Prastova

19. a)



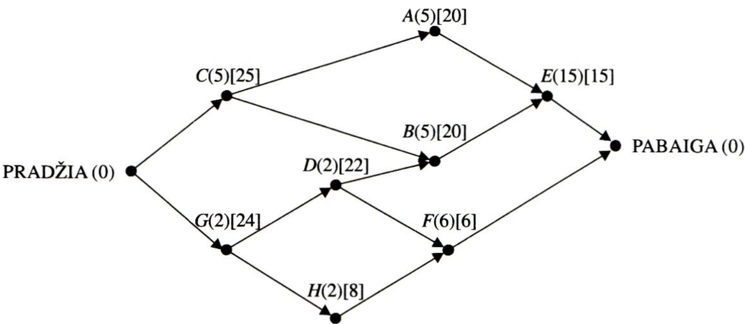
b)

Laikas	0–7	7–22	22–26
1 vykdytojas	*D*	*G*	*C*
2 vykdytojas	*E*	*H*	Prastova
3 vykdytojas	*F*	*I*	Prastova

Laikas	0–4	4–8	8–23	23–26
4 vykdytojas	*A*	*B*	*J*	Prastova

Treniruotė

21. a)



b)

Laikas	0	5	10	16	26
1 vykdytojas	*C*	*A*	*F*	Prastova	

2 vykdytojas	*G*	*D*	*H*	*B*	*E*	
Laikas	0	2	4	6	11	26

23.

Laikas	0	3	6	9	12	15	18 – 21
1 vykdytojas	*A*	*D*	*G*	*J*	*M*	*O*	*R*
2 vykdytojas	*B*	*E*	*H*	*H*	*N*	*Q*	Prastova
3 vykdytojas	*C*	*F*	*I*	*I*	*P*	Prastova	Prastova

25.

Laikas	0	7	11	15
1 vykdytojas	*A*(7)	*G*(4)	*I*(4)	
2 vykdytojas	*C*(7)	*H*(4)	Prastova	

3 vykdytojas	*E*(6)	*B*(5)	Prastova	
4 vykdytojas	*F*(6)	*D*(5)	Prastova	
Laikas	0	6	11	15

27.

Laikas	0	18	20	29	31	36
1 vykdytojas	*A*(20)		*F*(9)		*G*(7)	
2 vykdytojas	*B*(18)	*E*(13)		*I*(2)	*J*(2)	*K*(1)

3 vykdytojas	*C*(16)	*D*(14)	*H*(5)	*L*(1)	
Laikas	0	16	30	33 – 35	

Šis tvarkaraštis yra optimalus, nes visų užduočių vykdymo trukmių suma yra 108, taigi 3 vykdytojai negali baigti darbo greičiau nei per 108/3=36.

29. a)

Laikas	0	10	18	48
1 vykdytojas	*A*	*D*	*F*	

2 vykdytojas	*B*	*C*	*E*	*G*	*H*	Prastova	
Laikas	0	5	10	18	31	44	48

b) Šio projekto kritinio kelio ilgis yra 48, todėl darbas negali būti užbaigtas greičiau.

c)

Laikas	0	5	10	18	26	56
1 vykdytojas	*A*		*D*	*E*	*F*	
2 vykdytojas	*B*	*G*		Prastova		
3 vykdytojas	*C*	*H*		Prastova		
Laikas	0	5	10	18		56

d) Vykdytojai negali būti laisvi, jei yra užduočių, kurias reikia atlikti. Vadinasi, iš pradžių turi būti paskirtos užduotys A, B, C (tai vienintelės 3 užduotys, kurias galima pradėti vykdyti). Po to užduotis G ir H reikia skirti vykdytojams, kurie baigė vykdyti B ir C (nes visoms kitoms užduotims reikia, kad anksčiau būtų įvykdyta užduotis A). Tai reiškia, kad vykdytojui, kuris baigia užduotį A, reikia skirti užduotį D arba E, o tada visi trys vykdytojai bus laisvi laiko momentu 18. Bet yra likusios tik dvi užduotys – F bei viena iš užduočių D ir E. Užduotis F negali būti pradėta vykdyti, kol nebus pabaigtos abi užduotys D ir E, taigi projekto negalima baigti anksčiau kaip laiko momentu $18 + 18 = 36$.

e) Optimali trijų vykdytojų projekto vykdymo trukmė yra didesnė už dviejų vykdytojų trukmę. Ši paradoksiška situacija susidaro dėl reikalavimo, kad vykdytojas negali būti be darbo, jeigu yra jam tinkama užduotis. Užduotis D ir E reikėtų įvykdyti anksti, kad galima būtų pradėti ilgą užduotį F. Bet 2 ir 3 vykdytojai buvo priversti pradėti kitus darbus ir negalėjo pradėti vykdyti užduočių D ar E, kai jos jau tapo parengtos.

9 SKYRIUS

Apšilimas

1. $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$, $F_{18} = 2584$.

3. a) $F_{38} = 39088169$. b) $F_{35} = 9227465$.

5. $F_{14}/F_{13} = 1{,}6180258$; $F_{16}/F_{15} = 1{,}6180328$; $F_{18}/F_{17} = 1{,}6180338$. Santykiai didėja ir artėja prie aukso pjūvio Φ.

8. $N = 12$ ir $M = 12$ ($F_{12} = 12^2$).

17. $x = 12$, $y = 10$. **19.** $x = 1{,}2$.

Treniruotė

21. $x = 6$, $y = 12$, $z = 10$.

23. $x = 3$, $y = 5$.

25. Jei $\Phi^N = a\Phi+b$, tai $\Phi^{N+1} = (a\Phi+b)\Phi = a\Phi^2+b\Phi = a(\Phi+1)+b\Phi = (a+b)\Phi + a$. (Prisiminkite, kad $\Phi^2 = \Phi + 1$.)

27. a) 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, ...
b) $F_1 + F_2 + \cdots + F_N = F_{N+2} - 1$.

29. Kadangi $AM = AC$, tai I trikampis yra lygiašonis, todėl $\angle AMC = 72°$. Vadinasi, $\angle MAC = 180° - 72° - 72° = 36°$. Todėl trikampis ABC panašus į trikampį I, ir II trikampis yra I trikampio gnomonas.

31. a) 1. b) -1. c) 3. d) 4. **32.** $A_n = 5F_n$.

35. $F^2_{N+2} - F^2_{N+1} = (F_{N+2} - F_{N+1})(F_{N+2} + F_{N+1}) = F_N \cdot F_{N+3}$.

10 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) 40,50 Lt. b) 40,5%. c) 40,5%.

3. 35%. **5.** 54587,64 Lt. **7.** a) 9083,48 Lt. b) 12,6825%.

9. Bankas A: 6%; Bankas B: $\approx$ 5,9%; Bankas C: $\approx$ 5,65%.

11. $\approx$ 1133,56 Lt.

13. a) 716. b) $16 + 7N$. c) 3 519 500. d) 3 510 141.

15. a) 213. b) $137 + 2N$. c) 7124 Lt. d) 2 652 Lt.

17. a) 3^{99}. b) 3^{N-1}. c) $(3^{100} - 1)/2$. d) $(3^{100} - 3^{49})/2$.

18. a) $3 \cdot 2^{99}$. b) $3 \cdot 2^{N-1}$. c) $3(2^{100} - 1)$. d) $3 \cdot 2^{49}(2^{51} - 1)$.

21. a) $p_2 = 0{,}357$. b) $p_3 = 0{,}6427428$. c) $p_5 = 0{,}64278397$.

22. a) 10/29. b) 19/29. c) Pastoviai 19/29. d) 25/29.

24. $p_2 = 0{,}3825$, $p_3 = 0{,}70858125$, $p_4 = 0{,}619481586$, $p_5 = 0{,}707172452$, $p_6 = 0{,}621238725$, $p_7 = 0{,}705903515$, $p_8 = 0{,}622811228$, $p_9 = 0{,}704752207$, $p_{10} = 0{,}624229601$. (Atsakymai suapvalinti 9 ženklų tikslumu po kiekvieno pẽrėjimo.)

Treniruotė

26. 100%.

28. 10 737 418,23 Lt.

30. $\approx$ 14 619 sraigių.

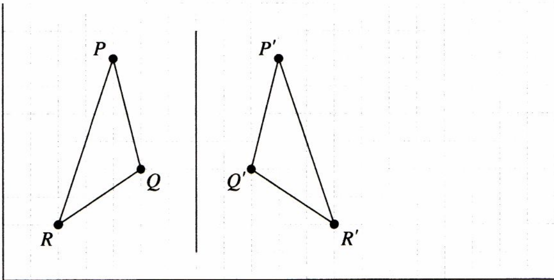
32. 6425.

35. $\approx$ 105 006 Lt.

11 SKYRIUS

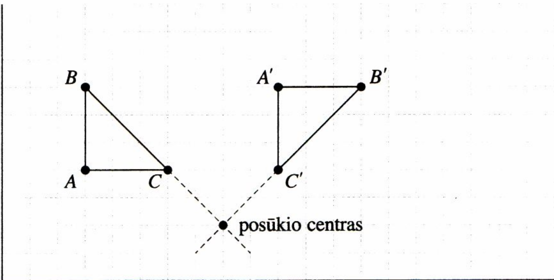
Apšilimas

1.

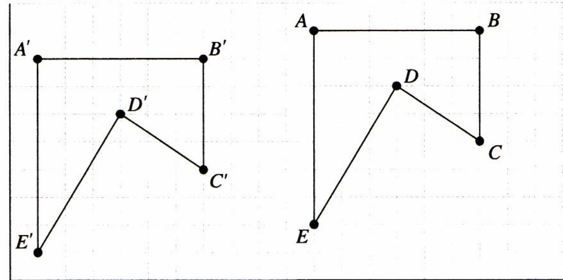


3. a) 140°. b) 279°.

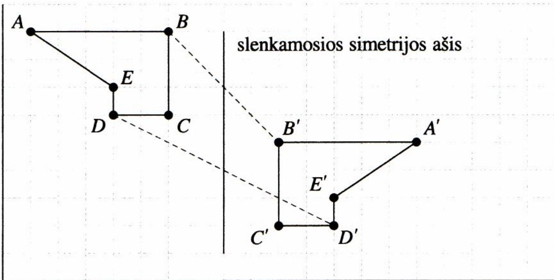
5.



7.



9.



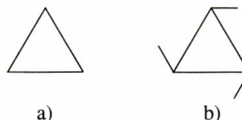
11. a) Vertikalusis atspindys. b) Horizontalusis atspindys.

c) Horizontalusis atspindys, vertikalusis atspindys, atspindys šiaurės vakarų krypties ašies atžvilgiu, atspindys šiaurės rytų krypties ašies atžvilgiu, posūkis 90° (180°, 270° ir t.t.) kampu.

d) Posūkis 180° kampu. e) Tik tapatusis judesys.

13. a) C. b) V. c) I. d) S. e) J.

15.



17. a) Postūmis, vertikalusis atspindys, horizontalusis atspindys, 180° posūkis. b) Postūmis, horizontalusis atspindys. c) Postūmis, vertikalusis atspindys.

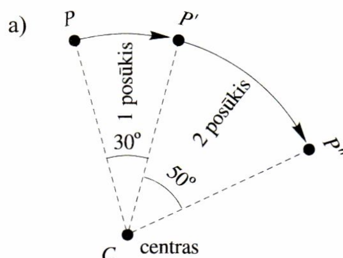
19. a) Postūmis, vertikalusis atspindys. b) Postūmis, horizontalusis atspindys.

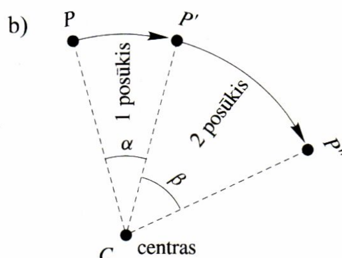
Treniruotė

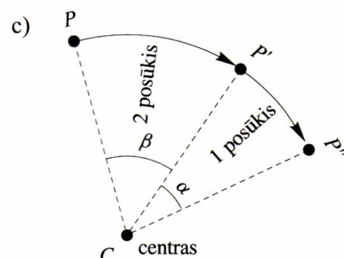
21. a) Pirmas posūkis perkelia tašką P į tašką P'. Antras posūkis perkelia tašką P' į tašką P''. Atlikus po pirmojo posūkio antrąjį, taškas P pereina į tašką P'', o tai yra ekvivalentu posūkiui su centru C ir 80° kampu pagal laikrodžio rodyklę.

b) Pirmas posūkis perkelia tašką P į tašką P'. Antras posūkis perkelia tašką P' į tašką P''. Po pirmojo posūkio atlikus antrąjį, taškas P pereina į tašką P'', o tai yra ekvivalentu posūkiui su centru C ir kampu $\alpha + \beta$ pagal laikrodžio rodyklę.

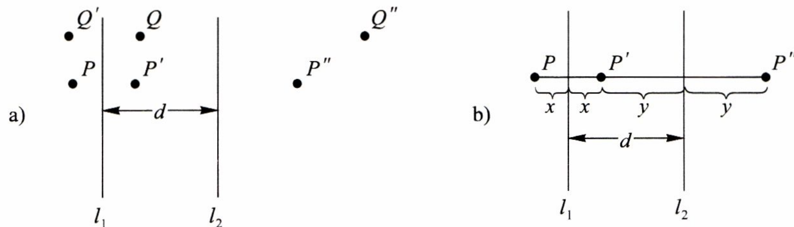
c) Po antrojo posūkio atlikus pirmąjį, gaunamas posūkis su centru C ir kampu $\beta + \alpha$ (o tai lygu $\alpha + \beta$) pagal laikrodžio rodyklę.





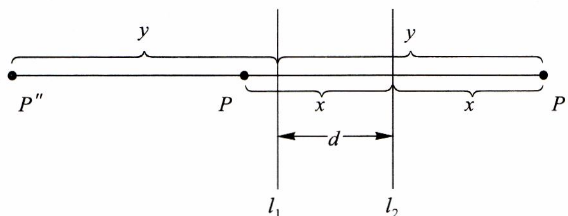


23.



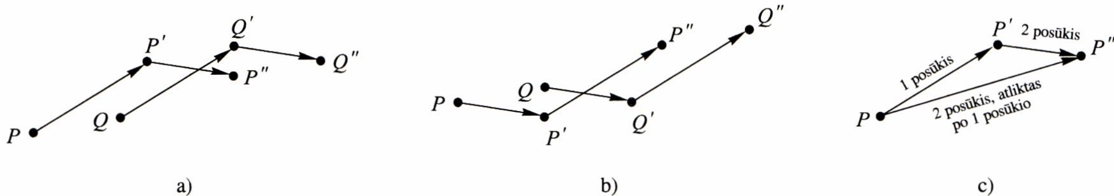
Atstumas nuo P iki P' yra $x+x+y+y = 2x+2y = 2(x+y) = 2d$. Tai postūmis iš kairės į dešinę ilgio $2d$ vektoriumi, statmenu l_1 ir l_2.

c)



Atstumas nuo P iki P' yra $y-(x+x-y) = 2y-2x = 2(y-x) = 2d$. Tai postūmis iš dešinės į kairę ilgio $2d$ vektoriumi, statmenu l_1 ir l_2.

25.



27. a) Postūmis, 180° posūkis. b) Postūmis, 180° posūkis.
c) Postūmis, vertikalusis atspindys, 180° posūkis, slenkamasis atspindys.

29. a) Posūkiai ir postūmiai yra tikriniai standieji judesiai, todėl išlaiko kryptis pagal ir prieš laikrodžio rodyklę. Duotasis judesys yra netikrinis standusis judesys (sukeičia kryptis pagal ir prieš laikrodžio rodyklę).
b) Jeigu šis standusis judesys būtų atspindys, tai PP', RR' ir QQ' būtų statmenos atspindžio ašiai, taigi būtų lygiagrečios.
c) Tai turi būti slenkamasis atspindys (vienintelis likęs standusis judesys).

12 SKYRIUS

Apšilimas

1. a), b), c) Atkarpa, jungianti dviejų trikampių kraštinių vidurio taškus, yra lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei. Todėl visi trikampiai yra lygūs.

d) $\frac{1}{4}$; visi 4 trikampiai lygūs, taigi ir jų plotai lygūs.

3. a) $\frac{3}{4}X$, $\frac{9}{16}X$, $\frac{27}{64}X$. b) $\left(\frac{3}{4}\right)^N X$.

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^N$ artėja prie 0, kai N be galo didėja.

5.

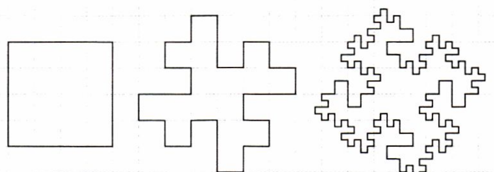


Pradžia 1 žingsnis 2 žingsnis 3 žingsnis

7. a) 512. b) $\left(\frac{8}{9}\right)^3 X = \frac{512}{729}X$. c) 8^N. d) $\left(\frac{8}{9}\right)^N X$.

e) $\left(\frac{8}{9}\right)^N$ artėja prie 0, kai N be galo didėja.

9.

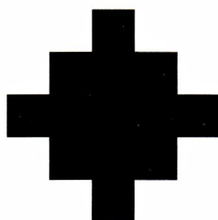


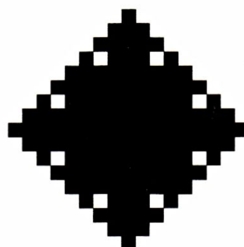
Pradžia 1 žingsnis 2 žingsnis

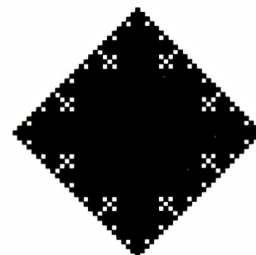
11. $4 \cdot 7N$.

13.





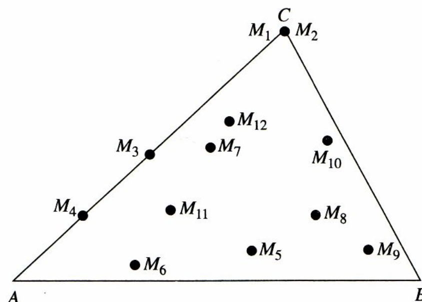




Pradžia 1 žingsnis 2 žingsnis 3 žingsnis

15. a) 20/3, 100/9. b) $4 \cdot (5/3)^N$.

17.



19. a) 2, 2, 2, 2, 2. b) Visą laiką būtų lygūs 2.

Treniruotė

21. Kiekvienu žingsniu juodųjų trikampių skaičius patrigubėja, o kiekvienas juodasis trikampis duoda naują baltąjį trikampį. Lentelėje parodyti keli pirmieji žingsniai.

	Baltieji trikampiai	Juodieji trikampiai
1 žingsnis	1	3
2 žingsnis	$1+3$	3^2
3 žingsnis	$1+3+3^2$	3^3
4 žingsnis	$1+3+3^2+3^3$	3^4

Matome, kad po N-tojo žingsnio bus $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{N-1} = (3^N-1)/2$ baltųjų trikampių.

23. Visada liks be galo daug taškų. Pavyzdžiui, liks pradinio trikampio 3 viršūnės; taip pat liks kiekvieno juodojo trikampio, gauto bet kuriuo žingsniu, viršūnės.

25. 99-asis žingsnis: $-0{,}4299$; 100-asis žingsnis: $-0{,}5652$. Tęsiant procesą be galo, skaičiai svyruotų aukštyn – žemyn apie $-0{,}5$ ir artėtų prie $-0{,}5$.

27. 99-asis žingsnis: 0,4906; 100-asis žingsnis: 0,4907. Skaičiai artėja prie 0,5.

29. 1-asis žingsnis: $2+\sqrt{2}$. Skaičiai neaprėžtai didėja.

13 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) Vienas iš galimų atsakymų: visi vedusieji. Kitas atsakymas: visi vedusieji, kurie skaito žurnalą. (Nors abu atsakymai yra priimtini, bet aišku, kad žurnalas norėjo padaryti išvadą apie visus vedusiuosius, todėl pirmas atsakymas yra geresnis.)

b) 210 336. c) Imtį lėmė patys atsiliepusieji skaitytojai.
d) 85% yra statistika, kadangi tas skaičius remiasi imties duomenimis.

3. a) 74,0%. b) 81,8%.
c) Nelabai tikslūs. Imtis toli gražu neatstovavo visai populiacijai.

5. a) Šio miesto gyventojai. b) 475.

7. a) Gatvės kampo pasirinkimas gali lemti didelį atsakymų skirtumą.
b) *D*. (Galima manyti, kad žmonės, kurie gyvena ar dirba miesto centre, daug dažniau atsakys teigiamai.)
c) Taip, dėl dviejų pagrindinių priežasčių. i) Žmonės, esantys gatvėje tarp 16 ir 18 valandos, apskritai imant neatspindi visų gyventojų. Pavyzdžiui, tikėtina, kad įstaigų tarnautojai dažniau paklius į imtį negu namų šeimininkės. ii) Penki gatvių kampai, kuriuose atsidūrė klausėjai ir praeiviai, vargu ar gali atspindėti visą miestą.
d) Ne. Nebuvo bandyta nustatyti kvotų ir gauti reprezentatyvesnę imtį.

9. a) Visi seniūnijai priklausantys butai.

11. a) Neturėtų nukentėti, nes imtis sudaroma atsitiktinai.
b) Paprastojoje atsitiktinėje imtyje bet kurie du populiacijos nariai turi tą pačią tikimybę pakliūti į imtį kaip ir bet kurie kiti du. Šioje imtyje du paeiliui paimti numeriai neturi jokių šansų kartu pakliūti į imtį. (Beje, nagrinėjamasis imties būdas vartojamas dažnai ir yra vadinamas **sistemine imtimi**).

Treniruotė

13. a) Kiekvienas žmogus, galįs persišaldyti ir svarstyti, pirkti ar ne vaistą *X* (t.y. beveik visi suaugusieji).
b) Buvo imami savanoriai. (Beje, jiems buvo mokama.)
c) $n = 500$. d) Ne. Nebuvo sudaryta kontrolinė grupė.

15. 1) Buvo tiriami moksleiviai. (Moksleiviai neatspindi visų gyventojų amžiaus prasme, o ypač noro dalyvauti tyrime prasme.)
2) Tyrime dalyvavo tik vieno miesto gyventojai.
3) Skatinant dalyvauti buvo mokama.
4) Apklaustieji patys nustatė savo pasveikimo laiką, o tai nepatikima, ypač kai jie yra mokami savanoriai.

17. Profesoriaus tyrimą galima laikyti eksperimentu, nes jis stengėsi nustatyti priežasties (10 mg kofeino kasdien) ir pasekmės (pažymių pagerėjimas) ryšį. Vis dėlto tam ryšiui nustatyti šis tyrimas mažai tinkamas: tai nebuvo kontroliuojamasis eksperimentas (nebuvo kontrolinės grupės); jis nebuvo atsitiktinis (buvo tiriami tik blogi studentai); nebuvo vartojamas placebas, todėl tyrimas nebuvo dvigubai aklas eksperimentas.

18. 1) Nuolatiniai pokalbiai su profesoriumi jo kabinete galėjo patys savaime suteikti studentui pasitikėjimo ir padėti pagerinti pažymius.
2) „Individualios konsultacijos“ taip pat galėjo nukreipti studentą tinkama linkme.
3) Tyrimui pasirinkti studentai pirmajame semestre gavo patenkinamus pažymius, todėl antrajame semestre jų pažymiai vargu ar galėjo pablogėti.

20. a) i) Visas dangus. ii) Visa kava puodelyje. iii) Visas Danutės kraujas.
b) Visuose trijuose pavyzdžiuose imtis nėra atsitiktinė.
c) i) Kai kuriose situacijose, matant nedidelę dangaus dalį, galima nuspręsti, lis ar nelis, bet dažnai lietaus debesys nebūna užtraukę viso dangaus, ir, vien žvilgtelėjus pro langą, galima apsirikti.
ii) Jei kavos paviršius labai karštas, tai greičiausiai ji karšta visa, ir panašu, kad Birutės išvada teisinga.
iii) Dėl kraujo apytakos žmogaus kūne iš Danutės dešinės rankos paimti 5 ml kraujo atspindi visą jos kraują, todėl labai tikėtina, kad laboratorijos atsakymas yra teisingas.

22. a) Klausimas buvo suformuluotas taip, kad beveik neįmanoma į jį atsakyti „taip“.
b) Klausimas „Ar jūs pritariate mokesčių didinimui, jeigu įmanoma įrodyti, kad tai labai reikalinga?“ yra jau geresnis, bet vis tiek dar nėra neutralus. Klausimas „Ar jūs pritariate, ar nepritariate bet kokiam mokesčių didinimui?“ gal kiek neįprastas, bet, ko gero, visiškai neutralus.

23. a) 2000. b) $N = n_1 \cdot n_2 / k$.
c) Abi imtys turi teisingai atspindėti visą populiaciją. Ypač svarbu, kad paleistos pirmosios imties žuvys spėtų tolygiai išsisklaidyti populiacijoje, o pati populiacija neturi pastebimai pakisti per laiko tarpą nuo paleidimo iki naujojo sugavimo.
d) Gali būti ir taip (ypač kalbant apie vikrius gyvūnus), kad pats faktas, jog pirmosios imties gyvūnai leidosi pagaunami, daro imtį iškreiptą (tie gyvūnai gali atstovauti lėtesnei, ne tokiai vikriai populiacijos daliai). Tokia iškreiptis gresia ir antrosios imties gyvūnams. Antra priežastis – tai efektas, kurį pirmasis pagavimas gali sukelti paleistiesiems gyvūnams. Kartais gyvūnas gali būti traumuotas (fiziškai ar emociškai), ir tai gali jį padaryti lengviau (ar sunkiau) pagaunamą antrą kartą. Trečias iškreipties šaltinis yra galimybė, kad dėl vienokių ar kitokių priežasčių bus neįmanoma nustatyti, ar gyvūnas buvo ženklintas, ar ne.

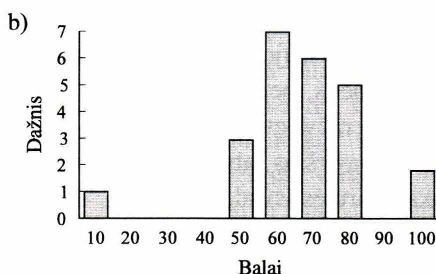
14 SKYRIUS

Apšilimas

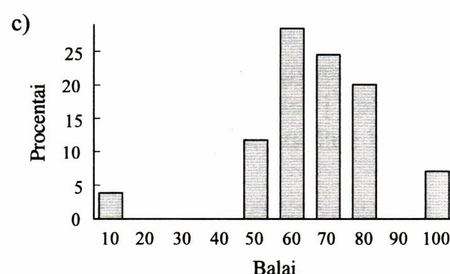
1. a)

Balas	10	50	60	70	80	100
Dažnis	1	3	7	6	5	2

b)

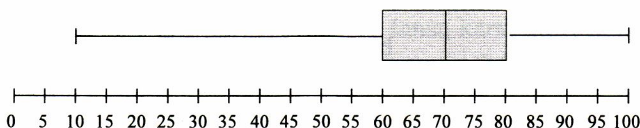


c)



3. a) Min = 10, $Q_1 = 60$, $M = 70$, $Q_3 = 80$, Max = 100.

b)



5. a) 79%. b) 70%. c) $Q_1 = 55\%$, $Q_3 = 76\%$. d) KP = 21%.

7. a) $\approx 65{,}32\%$. b) $\approx 15{,}76\%$.

9. a)

Atstumas iki mokyklos (km)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	8,5
Dažnis	5	3	4	6	3	2	1	1	1

11. a) 30.

b)

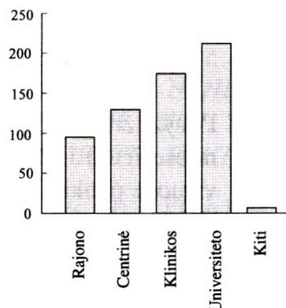
Balas	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	2	5	6	4	4	5	3	1

c) 6,17. d) 6.

13. Dzūkai: 39,6°; suvalkiečiai: 68,4°; žemaičiai 86,4°; aukštaičiai: 140,4°; kiti: 25,2°.

15. a) 132. b) 9.

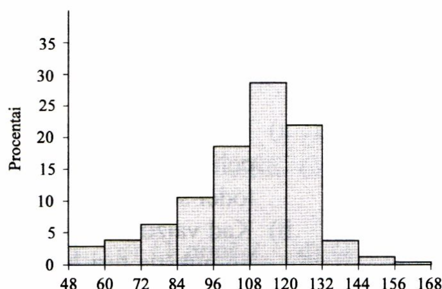
c)



17. a) 0,4 kg.

b) Trečiajam grupavimo intervalui „nuo 2,2 kg (išskirtinai) iki 2,6 kg (imtinai)“. Galiniai taškai (reikšmės, kurios patenka tiksliai ant ribos tarp dviejų grupavimo intervalų) priklauso kairiajam grupavimo intervalui.

19.



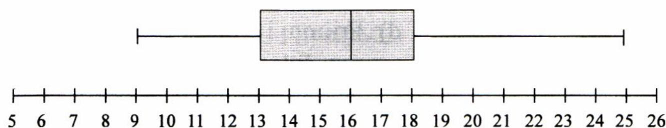
21. $\mu = 5$, $\sigma = 0$; $\mu = 5$, $\sigma \approx 3{,}54$; $\mu = 5$, $\sigma \approx 11{,}73$. Visi vidurkiai vienodi, o standartinis nuokrypis didesnis, kai skaičiai labiau išsisklaidę.

23. a) 4,5. b) 4,5. c) $\approx 2{,}87$.

25. a) 2. b) 7. c) 5. **27.** a) 50,5. b) 50,5.

29. a) Min $= 9$, $Q_1 = 13$, $M = 16$, $Q_3 = 18$, Max $= 25$, $\mu \approx 15{,}49$, $\sigma \approx 3{,}11$.

b)



31. a) 350 Lt yra inžinierių atlyginimų pirmasis kvartilis, todėl 459 inžinieriai gauna ne mažiau kaip 350 Lt.

b) 250 Lt yra agronomų atlyginimų pirmasis kvartilis, todėl 240 agronomų gauna ne daugiau kaip 250 Lt. Atkreipkite dėmesį, kad nustatyti

tikslų skaičių gaunančių mažiau negu 250 Lt iš pateiktų duomenų neįmanoma.

33. 58 balai.

Treniruotė

35. Pavyzdžiui, Tadas gauna 85 balus iš 100 pirmuose keturiuose egzaminuose ir 60 iš 100 penktame egzamine, o Darius gauna 80 balų iš 100 visuose penkiuose egzaminuose.

37. a) $\{1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6\}$; $\mu = 4$; $M = 6$.
b) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6\}$; $\mu = 3$; $M = 1$.
c) $\{1, 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6\}$; $\mu = 5$; $Q_1 = 6$.
d) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 6\}$; $\mu = 2$; $Q_3 = 1$.

39. a) Pradinių balų penkiaskaitė suvestinė buvo Min $= 1$, $Q = 9$, $M = 11$, $Q_3 = 12$, Max $= 24$. Kai pridėsime du balus prie kiekvieno rezultato, kiekvienas penkiaskaitės suvestinės skaičius taip pat padidės 2 balais (t.y. Min $= 3$, $Q = 11$, $M = 13$, $Q_3 = 14$, Max $= 26$).
b) Kai prie kiekvieno rezultato pridėsime 10% (t.y. kiekvienas balas dauginamas iš 1,1), tai kiekvienas penkiaskaitės suvestinės skaičius taip pat padidės 1,1 karto (t.y. Min $= 1{,}1$, $Q = 9{,}9$, $M = 12{,}1$, $Q_3 = 13{,}2$, Max $= 26{,}4$).

41. a) Kad vaizduotų 50% populiacijos, intervalą 30–35 atitinkančio stulpelio aukštis turi būti 4 vienetai. (Stulpelio plotas : 10 = 10% : 25%, todėl stulpelio plotas yra 20, o jo aukštis – 4.)
b) Kad vaizduotų 10% populiacijos, intervalą 35–40 atitinkančio stulpelio aukštis turi būti 0,4 vieneto. (Stulpelio plotas : 10 = 10% : 25%, todėl stulpelio plotas yra 4, o aukštis – 0,4.)
c) Kad vaizduotų 15% populiacijos, intervalą 45–60 atitinkančio stulpelio aukštis turi būti 0,4 vieneto. (Stulpelio plotas : 10 = 15% : 25%, todėl stulpelio plotas yra 6, o aukštis – 0,4.)

43. a) 10%, 20%. b) 80%, 90%.
c) Abiejų fakultetų skaičiai buvo sumaišyti į vieną krūvą. Į abu fakultetus kartu buvo priimta 820 vaikinų iš 1200 stojančiųjų į abu fakultetus, ir tai sudarė apie 68,3%. Panašiai į abu fakultetus buvo priimta 460 merginų iš 900 stojusiųjų, ir tai sudarė apie 51,1% stojusiųjų merginų.
d) Priimtų į Architektūros fakultetą merginų procentas (100/500 = 20%) yra didesnis negu vaikinų (20/200 = 10%); priimtų į Inžinerijos fakultetą merginų procentas (360/400 = 90%) taip pat yra didesnis negu vaikinų (800/1000 = 80%). Kai skaičiai sumaišomi į krūvą, priimtų merginų procentas (460/900 $\approx$ 51,1%) pasidaro mažesnis negu vaikinų (820/1200 $\approx$ 68,3%). Priežastis, dėl kurios atsiranda šis tariamas paradoksas, yra aritmetinė: jei $\frac{a_1}{a_2} > \frac{b_1}{b_2}$ ir $\frac{c_1}{c_2} > \frac{d_1}{d_2}$, tai dar nebūtinai $\frac{a_1+c_1}{a_2+c_2} > \frac{b_1+d_1}{b_2+d_2}$.

15 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) {*HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT*}.
b) 16. c) {*HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH*}. d) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

3. a) $\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$; $\mathrm{P}(D_1) = 0{,}25$; $\mathrm{P}(D_2) = \mathrm{P}(D_3) = \mathrm{P}(D_4) = \mathrm{P}(D_5) = \mathrm{P}(D_6) = \mathrm{P}(D_7) = 0{,}125$.
b) D_1 galimybės laimėti turnyrą yra 1 prieš 3. D_2 galimybės laimėti turnyrą yra 1 prieš 7.

5. a) 17 576 000. b) 15 818 400. c) 11 232 000.

7. a) 40 320. b) 40 319.

9. a) {raudona, mėlyna, geltona, violetinė, oranžinė}. b) {raudona, mėlyna, geltona}. c) {violetinė, oranžinė}.
d) P{raudona} = P{mėlyna} = P{geltona} = 0,1; P(violetinė) = P (oranžinė) = 0,35.

11. { }, $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{A, B, C\}$.

13. a) {*A, B, C, D, E*}
b) {*AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED*}

15. a) $\frac{1}{12}$. b) 1 prieš 11. c) 11 prieš 1. d) $\frac{11}{12}$.

17. a) $X =$ {⚀⚀, ⚀⚁, ⚀⚂, ⚀⚃, ⚁⚀, ⚁⚁, ⚁⚂, ⚂⚀, ⚂⚁, ⚃⚀}.
b) $\frac{5}{18}$. c) 5 prieš 13.

19. a) $\frac{1}{36}$. b) $\mathrm{P}(ss) = \frac{1}{36}$; $\mathrm{P}(sf) = \frac{5}{36}$; $\mathrm{P}(fs) = \frac{5}{36}$; $\mathrm{P}(ff) = \frac{25}{36}$.

Treniruotė

21. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0{,}51$.

23. a) $0{,}98^{12} \approx 0{,}78$. b) $0{,}98^{12} + 12 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{11} \approx 0{,}98$.

25. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5. b) $\frac{5}{18}$. c) $\frac{1}{6}$.

27. $2^6 = 64$. **29.** a) 24 360. b) 4060.

31. a) Pažymėkime atvirtusių herbų skaičių m. Tada $8 - m$ yra atvirtusių skaičių skaičius. Tada $L = m - (8 - m) = 2m - 8$. Vadinasi, L yra lyginis, ir kai $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, gauname $L = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$.
b) $L = 1{,}50m - 1{,}75(8 - m) = 3{,}25m - 14$. Todėl kai $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, gauname $L = -14, -10{,}75, -7{,}50, -4{,}25, -1, 2{,}25, 5{,}50, 8{,}75, 12$.

16 SKYRIUS

Apšilimas

1. a) 52. b) 50%. c) 68%. d) 16%.

3. a) 44,6. b) 59,4. c) 14,8.

5. a) 1900. b) 50.

7. a) Apytikriai trečiasis procentilis. b) 16-asis procentilis. c) Apie 22-ąjį ar 23-iąjį procentilį. d) 84-asis procentilis. e) 99,85 procentilis.

9. a) 95%. b) 47,5%. c) 97,5%.

11. a) 13. b) 80. c) 250. d) 420. e) 488. f) 499.

13. $\mu = 75$, $\sigma = 3$.

15. $\mu = 80$, $\sigma = 10$.

17. a) 16-asis procentilis. b) 97,5 procentilis.

19. a) 97,5 procentilis. b) 99,85 procentilis.

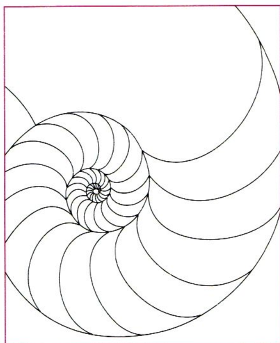
Treniruotė

21. Labai didelių: 125; didelių: 2375; mažų: 2500.

23. a) 0,5. b) 0,475. c) 0,025. d) 0.

25. Idealiosios monetos atveju $p = 1/2$. Taikydami realiosios monetos principą su $p = 1/2$, gauname $\mu = n/2$ ir $\sigma = \sqrt{n}/2$.

27. a) $\mu + 0{,}25\sigma = 55 + 0{,}25 \cdot 12 = 58$ taškai.
b) 45 taškai atitinka 20-ąjį procentilį. $(55 - 0{,}84 \cdot 12 \approx 45.)$
c) 83 taškai atitinka 99-ąjį procentilį. $(55 + 2{,}33 \cdot 12 \approx 83.)$
d) Apytikriai 50 studentų (1%).
e) Apytikriai 200 studentų. (52 taškai atitinka 40-ąjį procentilį).



Turinys

3 Teisingos dalybos. *Musę per pusę* 65

4 Skirstymas. *Apvalinimo paradoksai* 101

II DALIS

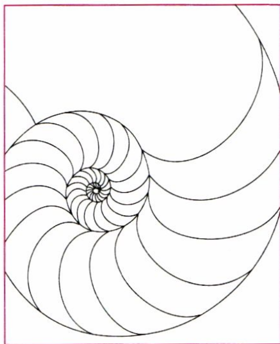
VADYBOS MOKSLAS

5 Oilerio ciklai. *Maršrutai miesto gatvėmis* 129

III DALIS

SPIRALINIS AUGIMAS IR SIMETRIJA

16 Normalieji skirstiniai. *Beveik viskas normalu* 451



Įvadas

Prašalaičiams šiuolaikinė matematika – priešiška ir uždara šalis, kurią supa griežtų loginių teiginių siena. Jos peizažas – sudėtingiausių formulių kalnynai bei neišsprendžiamų lygčių tarpekliai...

Taip pradeda savo knygos (*Excursions in Modern Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1992) pratarmę atkaklūs matematikos grožio ir paprastumo ieškotojai, Kalifornijos Fresno universiteto (JAV) profesoriai Peteris Tannenbaumas ir Robertas Arnoldas. Užsibrėžę tikslą sugriauti įsišaknijusį stereotipą, – kad mokyklinis matematikos kursas yra nuobodus, atitrūkęs nuo realaus pasaulio, labai sudėtingas, nagrinėjantis pasenusias ir niekam neįdomias problemas, – autoriai meistriškai to tikslo siekia visuose šešiolikoje knygos skyrių.

Ši knyga jokiu būdu nėra vadovėlis ir nepretenduoja pakeisti jokios mokomosios priemonės. Autoriai nesistengė aprėpti tradicinio mokyklinės matematikos kurso ar išspręsti kuo daugiau uždavinių. Knyga sumanyta ir parašyta kaip įvadas į šiuolaikinę matematiką, padedantis suprasti jos taikymus praktiniams, ypač su visuomenės gyvenimu susijusiems uždaviniams spręsti. Autoriai tarsi lydi skaitytoją, keliaujantį po matematikos šalį, atkreipia dėmesį į jos grožį ir turiningumą, gyvais žodžiais ir paprastais pavyzdžiais aiškina, kaip matematikai sprendžia iškylančias problemas, glaustai aptaria jų istoriją ir nušviečia vienos ar kitos matematikos srities perspektyvas. Jie geranoriškai ir neįkyriai, lyg prityrę ekskursijų vadovai (angliškąjį knygos pavadinimą galima versti ir kaip „Ekskursijos po šiuolaikinę matematiką“), siūlo skaitytojui žvilgterėti į kairę ar į dešinę („čia taip gražu, o ten taip įdomu“), atgal („šią

problemą nagrinėjo jau senovės graikai“) ar į priekį („įsivaizduokite, kad dabar – 2535-ieji metai“). O kad skaitytojui besigręžiojant neįskaustų kaklas, autoriai kartais stabteli prie pasirinktų temų ir čia pat vaizdžiai parodo, kaip reikėtų spręsti iškylančius uždavinius (arba paaiškina, kad kartais vienintelio ar tikslaus sprendimo gali ir nebūti). Amerikietiškojo knygos varianto sėkmę (du leidimai per trejus metus, knyga pripažinta geriausia pagalbine mokomąja priemone JAV koledžams) lėmė tiek autorių įdėtas didžiulis darbas ir begalinis kruopštumas parenkant pavyzdžius bei sudarant uždavinius, tiek ir kriterijai, kurių laikantis parašyta knyga. Knygos pratarmėje nurodyti keturi pagrindiniai principai, kuriais rėmėsi autoriai darbo metu.

- **Pritaikomumas**. Nė viena, net pati subtiliausia matematinė abstrakcija ar efektingiausias teorinio uždavinio sprendimas nesudomins eilinio skaitytojo, jei jam nebus aišku, kam tai reikalinga. Šimtai knygoje pateiktų pavyzdžių įtikina, kad amžiais kurtos matematinės teorijos netikėčiausiai ir (kartais) labai paprastai pritaikomos realiame gyvenime.
- **Suprantamumas**. Tikriausiai ne vienas iš mūsų vaikystėje svajojome būti gydytoju, lakūnu, mokytoju ar pan., bet nedaug atsiras tokių, kurie nuo pat mažumės nutartų tapti matematikais, sprendžiančiais sudėtingiausias teorines problemas. Ką veikia gydytojai, lakūnai ar mokytojai – visi mato ir žino, o ką ir kaip daro matematikai – lieka paslaptis. Autoriai tarsi įveda skaitytoją į matematikų „virtuvę“ ir, praskleisdami paslapties skraistę, paprasčiausiais žodžiais bei pavyzdžiais parodo matematikos galią.
- **Naujumas**. Nors autoriai ne kartą grįžta į praeitį, nukeliaudami net į mūsų eros pradžią, daugelis uždavinių ir jų sprendimo metodų yra visiškai nauji ir atspindi kelių paskutinių dešimtmečių matematikos turinį. Beje, kai kurios paliestos sritys yra labiau matematikos ateitis negu dabartis (pvz., fraktalų geometrija).
- **Estetiškumas**. Daugelis mano, kad matematikos grožį gali suprasti tik patys matematikai. Žinoma, skaitant nuobodžius, sausa matematikos kalba parašytus vadovėlius (o dar labiau – mokslines knygas), ne vienam kyla noras numoti ranka ir... pažiūrėti siaubo filmą. Autoriai padarė viską, kad skaitytojas norėtų vėl ir vėl pavartyti šią knygą ir sakytų: „O, kaip čia viskas aišku, gražu ir įdomu!“.

Didele dalimi knygos sėkmę lėmė temų pasirinkimas. Ką jau kalbėti apie mūsų skaitytojus, jei net amerikiečių moksleiviams daugelis knygoje nagrinėjamų dalykų buvo naujiena. Nedaug yra pasaulyje mokyklų ar koledžų, kur būtų dėstomos tokios disciplinos, kaip „Rinkimų teorija“, „Vietų skirstymas atstovaujamosios valdžios organuose“ ar „Tvarkaraščių sudarymas“, jau

nekalbant apie tokius specifinius dalykus, kaip „Apklausos ir jų rezultatai“ ar „Fraktalai ir mastelio simetrija“. Visa tai ir dar daug ką kita galima rasti šioje knygoje.

Po tokios įžangos tikriausiai jau numanote, kad lietuviškojo knygos varianto sudarytojai ir leidėjai yra tiesiog susižavėję amerikietiškuoju originalu. Nuo pat pirmosios pažinties su šiuo kūriniu mes degėme troškimu supažindinti su juo Lietuvos skaitytojus. Iš pradžių sunku buvo net nuspręsti, kokiam skaitytojui ji galėtų būti skirta, bet dabar manome, kad ji tinka visiems, pradedant vidurinės mokyklos moksleiviais ir baigiant jų tėvais, o ypač tiems, kuriems vien žodis „matematika“ kelia pasibaisėjimą. Po ilgų svarstymų, derybų su amerikietiškosios knygos leidėjais ir konsultacijų su autoriais mes apsisprendėme ir pasižadėjome išleisti lietuvišką šios knygos variantą, tenkinantį dvi sąlygas.

1. Knygoje turi būti išsaugotos autorių idėjos ir dėstymo tvarka. Visa kita, įskaitant tiek pavyzdžius, tiek pratimus, tiek patį teksto dėstymą kiekviename skyriuje, buvo leista keisti savo nuožiūra, kad knyga būtų kuo geriau pritaikyta Lietuvos skaitytojui. Tai labai svarbu, nes pažodinis vertimas būtų tik amerikietiška knyga, išleista lietuvių kalba (patys autoriai prisipažino, jog rašė knygą Amerikos moksleiviams ir nemanė, kad ji bus verčiama).

2. Knyga turi atrodyti taip pat gražiai, kaip ir amerikietiškasis leidinys. Suprasdami, kad čia daug kas priklauso nuo spaudos galimybių, mes savo ruožtu pasistengėme padaryti, kas tik įmanoma. Knyga buvo rengiama naudojantis moderniausia kompiuterine technika ir programine įranga, mūsų specialistai sukūrė programas jai maketuoti ir specialius šriftus. Matyt, tai yra pirmoji tokia sudėtinga ir didelė knyga Lietuvoje, parengta naudojant leidybos sistemą TEX. Ar viskas pavyko, sužinosime, deja, tik kai knyga bus atspausdinta ir jūsų įvertinta.

Stengdamiesi nepažeisti autorių sumanymo, siekėme parengti lietuvišką knygą, patrauklią skaitytojui ir žadinančią jo susidomėjimą matematika kaip nuo realybės neatsiejamu mokslu, padedančiu suvokti ir spręsti praktines mūsų gyvenimo problemas. Todėl mums teko perrašyti kai kuriuos skyrius (ypač tuos, kurie remiasi JAV istorija ar tyrimų metodais, taikomais praktiškai tik ten), praleisti literatūros sąrašą (aišku, kad Lietuvoje beveik neįmanoma rasti autorių cituojamų leidinių), atsisakyti vienos kitos iliustracijos (mums tiesiog nepavyko gauti leidimo joms spausdinti). Vis dėlto tikimės, kad lietuviškoji knyga išlaiko visus amerikietiškojo leidinio privalumus, o lietuviški pavyzdžiai ir intarpai tekste neiškreipia autorių koncepcijos. Reikėtų pabrėžti, kad originalioji knyga parašyta labai subtiliai ir žaismingai, todėl buvo sunkumų ją verčiant. Kiek įmanoma, bandėme išlaikyti autorių stilių, o kaip mums tai

pavyko, geriausiai galėtų įvertinti skaitytojai, radę galimybę susipažinti ir su originalu (tai mes labai rekomenduotume).

Knygą sudaro keturios dalys. Kiekvienoje dalyje aprašomos keturios „kelionės“ – temos, susijusios tarpusavyje, ir todėl skaitytinos iš eilės.

- **I dalis. Socialinių sprendimų matematika.** Ši dalis yra skirta matematinių metodų taikymui visuomenės moksluose. Iš tikrųjų, klausimai, keliami pirmuose keturiuose skyriuose, yra nauji ir neįprasti mūsų visuomenei. Su kai kuriais iš jų susidūrėme vos prieš keletą metų, kitus girdėjome dar vaikystėje, bet tikrai daugelis neįsivaizduoja, kad yra matematinių teorijų, galinčių patarti, kokia rinkimų sistema geresnė, kaip išmatuoti koalicijų galią, kaip teisingai pasidalyti visiškai nedalomas gėrybes ar skirti laisvą vietą parlamente.

- **II dalis. Vadybos mokslas.** Šioje dalyje nagrinėjami metodai, padedantys spręsti sudėtingiausias darbų organizavimo problemas. Tai uždaviniai, kuriuose yra daugybė kintamųjų arba daug darbų etapų (elektros tinklo tiesimas, kelionių maršruto sudarymas, namo statyba ir t.t.). Juos nagrinėjant visada iškyla efektyvumo problema – kaip viską padaryti pigiau, greičiau ir geriau. Su panašiais uždaviniais daugelis susiduria (ar neišvengiamai susidurs) kasdieniniame gyvenime, todėl įdomu pažiūrėti, kaip matematika gali palengvinti mūsų rūpesčius.

- **III dalis. Spiralinis augimas ir simetrija.** Skaitant šią dalį, gali susidaryti įspūdis, kad iki šiol mūsų niekas nemokė geometrijos. Tiksliau, mokė, bet kažkokios neįdomios, „kampuotos“ geometrijos, vertė kalti aksiomas ir teoremas, skaičiuoti kampus ir lankus. Kas galėtų pagalvoti, kad matematikai nagrinėja tokius klausimus, kaip „Kas sieja saulėgrąžą ir jūrinę kriauklę?“, „Kiek gali būti skirtingų apmušalų raštų?“, „Kokios simetrijos rūšys slypi debesyse?“ ir pan. Tokios problemos (beje, iliustruotos fantastiškiausiais piešiniais, nė iš tolo neprimenančiais garsiųjų „Pitagoro kelnių“) nagrinėjamos šioje, matyt, įspūdingiausioje knygos dalyje.

- **IV dalis. Statistika.** Pats žodis „statistika“ daug kam girdėtas. Bet nedaug kas susimąsto, kad statistikos dėsniai valdo visą mūsų gyvenimą. Kaip renkami statistiniai duomenys, kaip jie apdorojami, kokiu būdu pateikiami tyrimų rezultatai ir kaip iš jų daromos išvados, sužinosite pirmuose dviejuose šios dalies skyriuose. Kiti du skyriai padės suprasti ryšį tarp šansų, tikimybių ir galimybių, susipažinti su tikimybių teorijos pagrindais.

- **Pratimai.** Nepaisant to, kad knygoje išnagrinėta dešimtys pavyzdžių iš visų paliestų temų, autoriai siūlo pasitikrinti, kaip jums pavyko suvokti išdėstytą medžiagą. Kiekvieno skyriaus pratimai skirstomi į tris grupes:

1. *Apšilimas.* Tai tiesiogiai su išdėstyta medžiaga susijusios užduotys, kurias, matyt, bus nesunku atlikti perskaičius atitinkamą skyrių.
2. *Treniruotė.* Tai jau gerokai sudėtingesnės užduotys, kai reikia „pasukti galvą“, bet neturėtų kilti didesnių sunkumų jas sprendžiant. Beje, knygos gale pateikti pusės pirmųjų dviejų grupių pratimų atsakymai.
3. *Varžybos.* Tai pakankamai sudėtingi uždaviniai, reikalaujantys gero mokyklinio matematikos kurso mokėjimo ir abstraktaus mąstymo. Jie skirti tiems, kas mėgsta savarankiškai dirbti ir nebijo sunkumų. Šios grupės uždaviniams neduoti net atsakymai.

Linkime Jums, malonūs skaitytojai, gerai praleisti laiką su šia knyga ir pasimankštinti sprendžiant uždavinius. Po to jau jokios varžybos, konkursai ar net egzaminai jums neturėtų būti baisūs.

Norėtume padėkoti visiems, prisidėjusiems prie šios knygos lietuviškojo varianto gimimo. Visi, tiesiogiai dalyvavę knygos rengimo darbe, yra išvardyti antrame knygos puslapyje. Tai dar nelabai įprasta lietuviškuose leidiniuose, bet manome, kad skaitytojui bus įdomu sužinoti, kas ką darė.

Tikriausiai ši knyga lietuvių kalba būtų pasirodžiusi dar negreit, jeigu ne aistringas šiuolaikinės matematikos dėstymo propaguotojas dr. Saulius Norvaišas. Jis ne tik ragino ją leisti ir padovanojo mums savąjį amerikietiškojo leidimo egzempliorių, bet ir išvertė didelę knygos dalį. Didžiulę moralinę paramą teikė ir nuolat mus palaikė Švietimo ir mokslo ministerijos skyriaus viršininkė Virginija Būdienė. Pagaliau, didžiulis daugiau kaip dvejų metų darbas būtų buvęs neįmanomas be Atviros Lietuvos fondo projekto „Švietimas Lietuvos ateičiai“ finansinės paramos. Iš tikrųjų ši knyga yra minėto projekto dovana Lietuvos moksleiviams, o mes tą dovaną tik perduodame.

Esame įsitikinę, kad įsigyti šią labai nedideliu tiražu išleistą knygą norės daugelis, ir jau dabar pradedame galvoti apie jos antrąjį leidimą. Mums būtų labai pravartu žinoti Jūsų nuomonę, gauti pastabų ir pasiūlymų. Prašome rašyti adresu: Leidykla TEV, Akademijos 4, Vilnius 2600.

LEIDĖJAI

1a



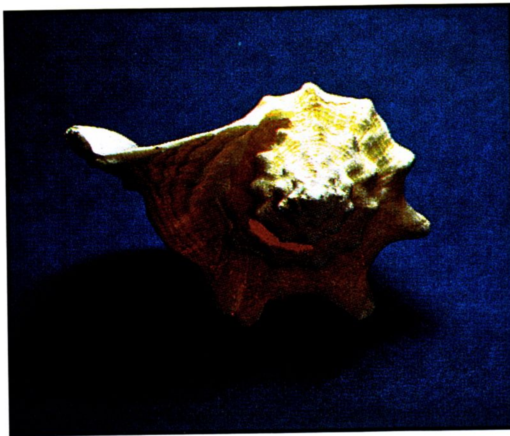
1b



Kokia tvarka reikia apkeliauti žemyninės JAV dalies visų 48 valstijų sostines, kad kelionė būtų trumpiausia? Šiose iliustracijose pavaizduoti du uždavinio sprendimai. Viršuje matome optimalų kelią, kurio ilgis yra apie 12 000 mylių oro linija (t.y. apie 19 500 km). Jis buvo rastas pasitelkus sudėtingą kompiuterinę programą, patikrinusią milijardus galimų kombinacijų, – o tai labai brangus malonumas. Šiuo metu nėra žinomas joks efektyvus algoritmas (žr. 6 skyrių), kuriuo galima išspręsti panašų uždavinį, kai miestų skaičius daug didesnis. Apačioje matome apytikslį šio uždavinio sprendimą, gautą vienu iš paprasčiausių – artimiausiojo kaimyno – algoritmu. Nors šiuo atveju kelionė yra apie 20% ilgesnė (t.y. apie 14 500 mylių), užtat kiekvienas, nepatingėjęs pasėdėti pusvalandį prie žemėlapio, gali rasti šį sprendimą, naudodamasis vien pieštuku ir liniuote.

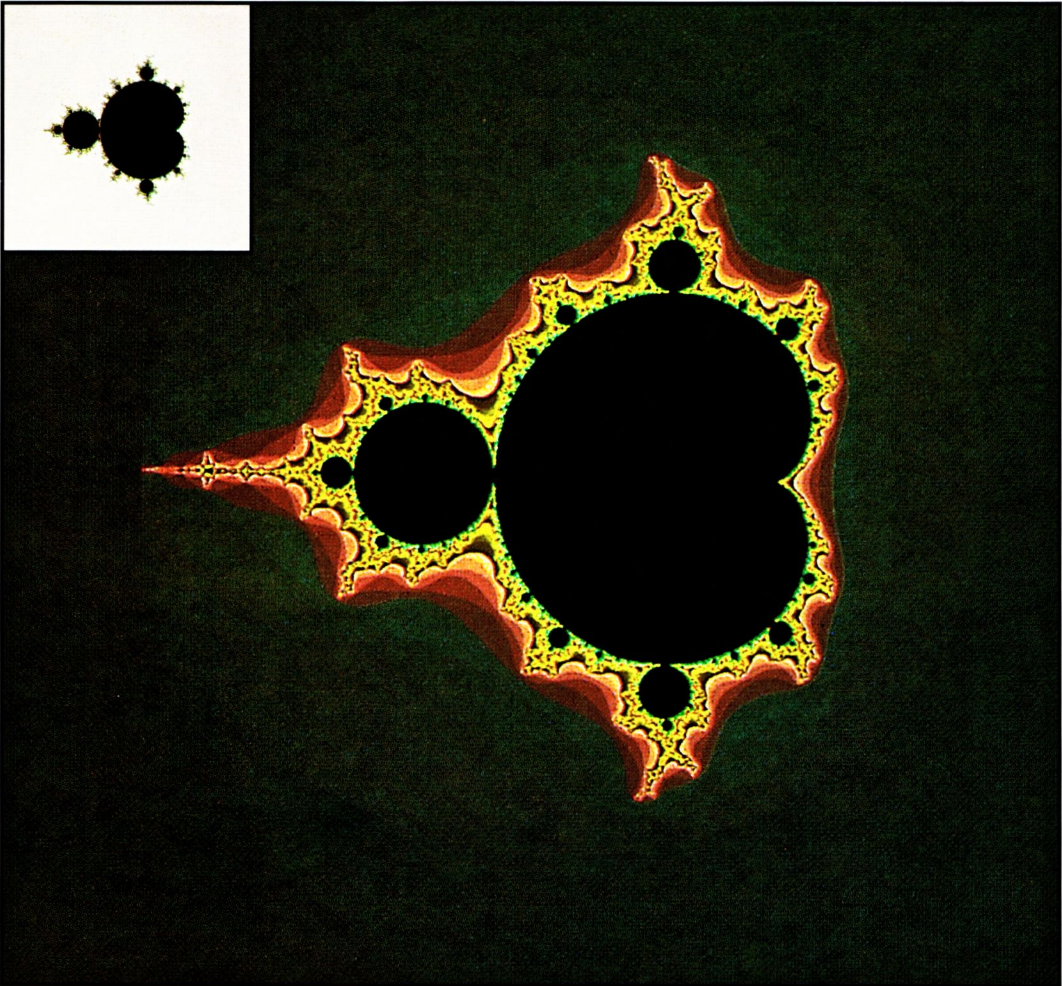
2a

2b



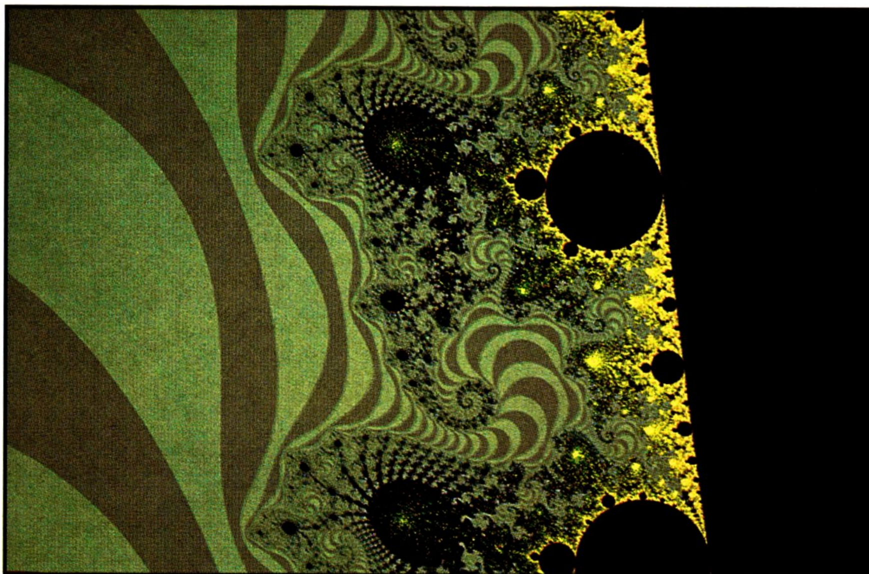
Logaritminę spiralę galima išvysti gnomoniškai augančiuose gyvuosiuose organizmuose (žr. 9 skyrių). Šiose iliustracijose ją demonstruoja nariuotojo nautilaus kriauklė (viršuje) ir kukli jos giminaitė – paprastoji jūrinė kriauklė (apačioje).

3

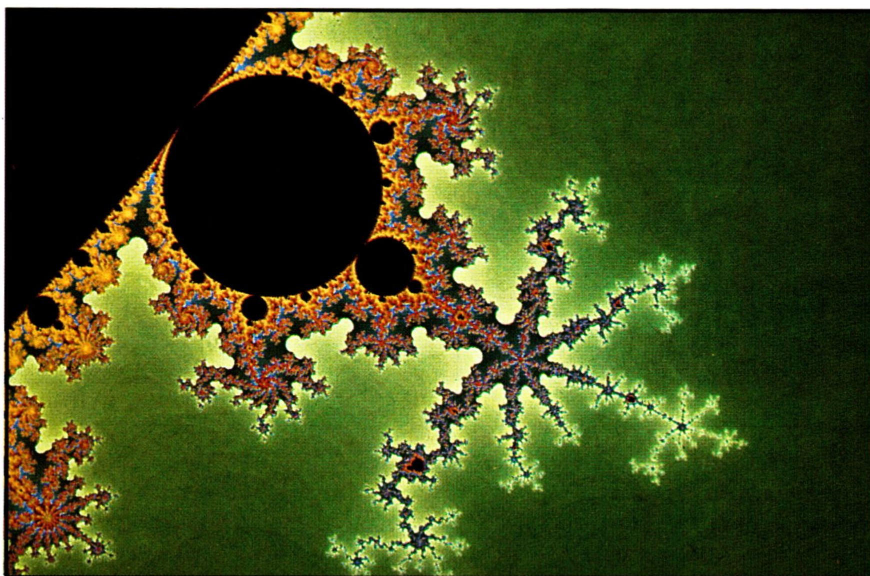


Nespalvotas Mandelbroto aibės piešinys atgyja, kai sužėri spalvos. Ką jis vaizduoja: kosminį virusą, tolimos galaktikos sprogimą ar fantastinę salą spalvų vandenyne? Mandelbroto aibė – tai fraktalas, visiškai nesudėtingo rekursinio proceso taikymo kompleksiniams skaičiams rezultatas (žr. 12 skyrių). Iliustracijos kituose keturiuose puslapiuose vaizduoja atskirus, labai padidintus šios aibės elementus ir atskleidžia visą kompiuteriu sukurtų fraktalų grožį.

4a

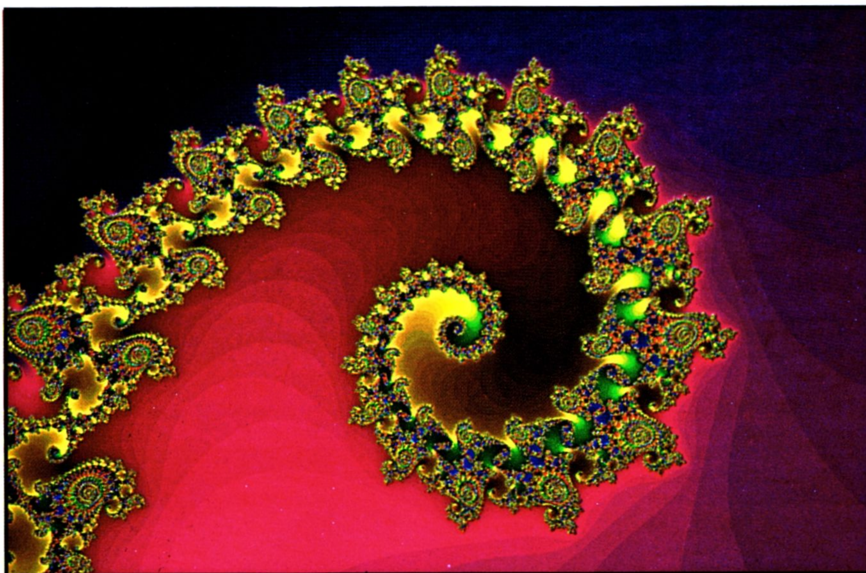


4b

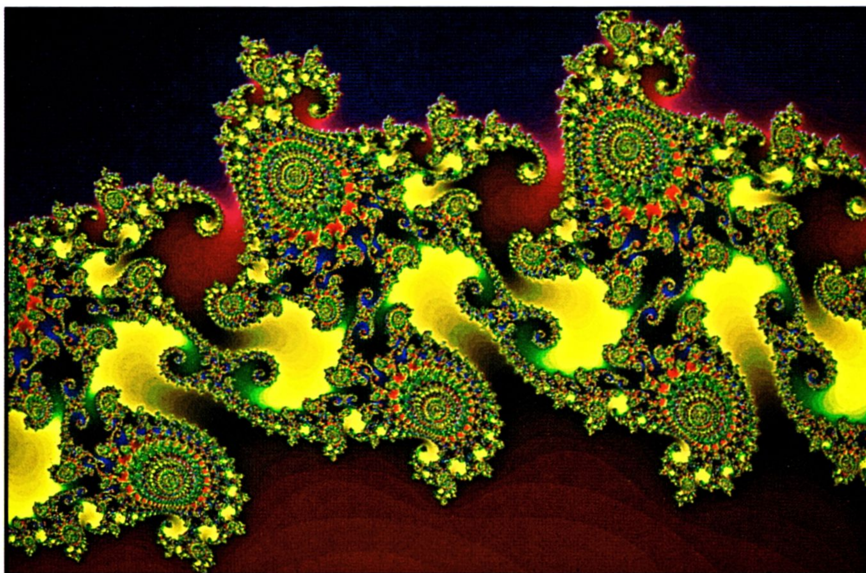


Šimtai Mandelbroto koralų juosia salos pakrantes. Kiekvieną koralą supa daugybė smulkesnių koraliukų, ir tai kartojasi be galo. Visi jie panašūs vienas į kitą ir į pačią Mandelbroto aibę, kuri vadinama „sudėtingiausiu iš visų žinomų matematikos objektų“.
Atidžiau įsižiūrėję į rifus aplink salą bei kiekvieną koralą, pastebime didžiulę įvairovę. „Jūrų ežius“ ir „jūrų arkliukus“ viršuje keičia „jūrų žvaigždės“ ir „sraigės“ apačioje. Toks begalinis spalvų ir formų kartojimasis ir maišymasis yra viena būdingiausių Mandelbroto aibės savybių.

5a

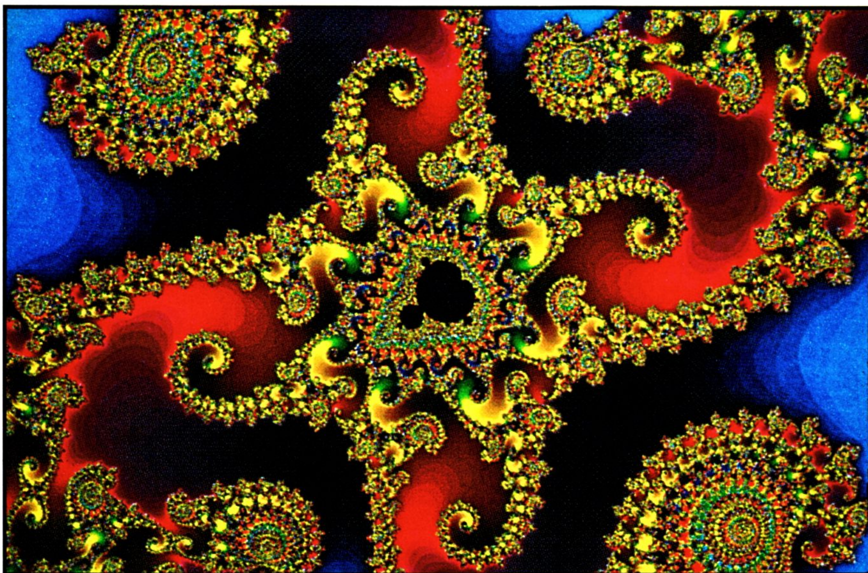


5b



Pažvelkime į jūrų arkliuko uodegą iš arčiau. Paėmę bet kurią jos dalelę, vėl matome tokios pat formos, tik mažesnes uodegėles, kartais po vieną, o kartais ir po dvi. Jei galėtume įžiūrėti smulkesnes detales, tai pamatytume jų ketvertukus (žr. įklijos 5a pav.), aštuonetukus, šešiolik-tukus ir t.t.

6a

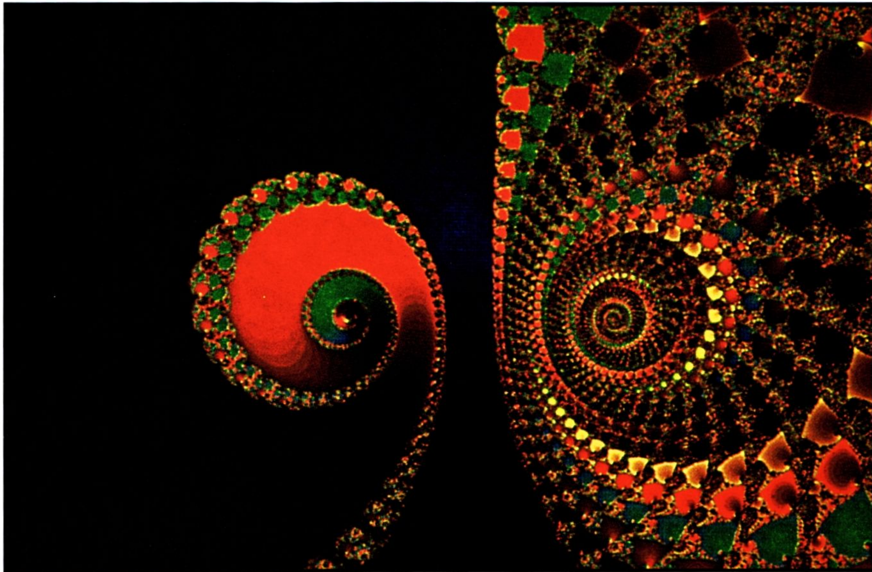


6b



Dabartis ir praeitis susilieja. Viršutinėje nuotraukoje matome 250 000 kartų padidintos pradinės Mandelbroto aibės (žr. įklijos 3 pav.) gabalėlį. Jame jūros arkliukų uodegų ketveriukė lyg sargybiniai saugo mažytę Mandelbroto aibės kopiją. Beje, tiek padidinus, pačios aibės plotis būtų apie 30 km. Apatinėje nuotraukoje matome visiškai naują elementą – labai padidintą vieną iš Mandelbroto salą supančių rifų.

7a

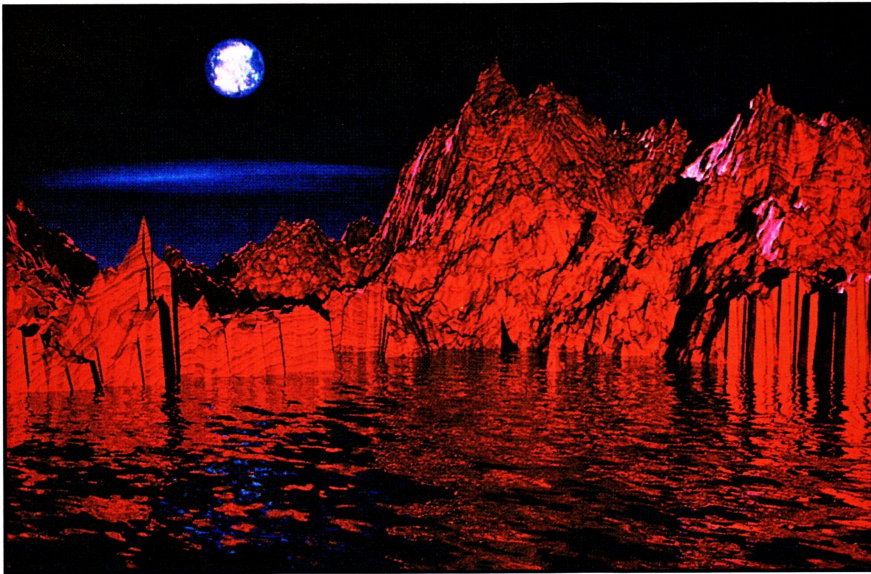


7b



Dar pora grožybių iš Mandelbroto salos pakrančių. Viršuje matome „beždžionės uodegą“ – spiralę, kurios forma gerokai skiriasi nuo jūros arkliuko uodegos. Apačioje – „rojaus paukštis“, gerokai padidintas beždžionės uodegos gabalėlis. Jį pavyksta pamatyti tik padidinus pradinę Mandelbroto aibę 700 000 kartų.

8a



8b



Šios iliustracijos – jau tikra fantastika. Pasitelkus fraktalų geometriją, galima ne tik piešti realius peizažus, bet ir, pridėjus truputį vaizduotės, kurti neregėtus vaizdus. Viršuje matome mitinę užmaršties upę Letą, kurios vandens gurkšnelis priversdavęs pamiršti visą ankstesnį gyvenimą. Už upės matyti niūrokos Hado karalystės vaizdas. Apačioje – „Dvasių pasaulis“: didžiulis mėnulis virš nesudrumsto vandens paviršiaus atrodo tiesiog siurrealistiškai.